Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 20.11.2014, Besprechung: 27.11.-28.11.2014

`http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/`

–Anwesenheitsaufgaben–

A 6.1 Magnetostatik

Die Maxwellgleichunge aus der Vorlesung sind

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ .$$

Sei $\vec{j}$ ein stationärer Strom (die Felder können als zeitlich konstant angesehen werden).

(a) Wie lauten in diesem Fall die relevanten Maxwellgleichungen?

(b) Leite aus den Maxwellgleichungen eine Gleichung für $\vec{B}$ ab. Kommt Dir diese Gleichung bekannt vor? Erhalte so das Biot/Savartsche Gesetz.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\int d\vec{s}' \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \ .$$

(c) Warum ist es immer möglich, $\vec{A}$ so umzueichen, dass div $\vec{A} = 0$ wird? Leite aus den Maxwellgleichungen eine Gleichung für $\vec{A}$ in dieser Eichung her:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3 r' \ .$$

(d) Zeige für das Fernfeld einer Stromverteilung ($\vec{m}$ = magnetisches Dipolmoment):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m}\wedge\vec{r}}{r^3} + \cdots \quad \text{mit} \quad \vec{m} = \frac{1}{2c}\int \vec{r}\wedge\vec{j}(\vec{r})d^3r \ . \tag{1}$$

(e) Leite aus (1) das zugehörige Magnetfeld ab.

–Hausaufgaben–

H 6.1 Elektrischer Dipol und Quadrupol **(0,5+0,5+1+0,5+1+1+0,5=)5 Punkte**

Betrachte zwei Punktladungen $\pm Q$ an den Orten $(0, 0, \pm\frac{a}{2})$.

(a) Gib die Ladungsverteilung an und berechne das Potential.

(b) Die Ladungen sollen so zusammenrücken, dass die Grösse $p = Qa$ konstant bleibt. Entwickle das Potential und zeige, dass sich für $a \to 0$ das Potential $\Phi = \frac{pz}{r^3}$ ergibt.

(c) Zeige, dass man genau dasselbe Potential erhält, wenn man als Ladungsdichte $\varrho = -p\delta(x)\delta(y)\delta'(z)$ ansetzt. Begründe diesen Ansatz.

(d) Berechne das elektrische Feld des Dipols. Skizziere Feld- und Äquipotentiallinien.

(e) Betrachte nun eine in einem Gebiet G (mit $0 \in G$) lokalisierte Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$. Zeige für das Fernfeld ($r \gg \mathrm{vol}(G)^{\frac{1}{3}}$) einer solchen Verteilung

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} \frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5} q_{ij} + \cdots$$

mit dem Dipolmoment bzw. dem Quadrupoltensor

$$\vec{p} = \int \varrho(\vec{r})\vec{r} d^3r$$
$$q_{ij} = \int \varrho(\vec{r})(3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) d^3r \ .$$

Berechne die Spur $\sum_{i=1}^{3} q_{ii}$. Wieviele unabhängige Einträge hat der Tensor q_{ij}?

(f) Zeige, dass für verschwindende Gesamtladung $Q = 0$ das Dipolmoment von der Wahl des Koordinatenursprungs unabhängig ist, dass dagegen bei $Q \neq 0$ dieser immer so gewählt werden kann, dass das Dipolmoment verschwindet.

(g) Mit welcher Potentz von r fallen Feld und Potential bei Dipol und Quadrupol ab?

H 6.2 Verschiedene magnetostatische Konfigurationen (1+1+1+1+1=)5 Punkte

In dieser Aufgabe sollen einfache magnetostatische Konfigurationen diskutiert werden. Betrachte im Folgenden einen vom Strom I durchflossenen Kreisleiter vom Radius R in der x-y-Ebene.

(a) Wie lautet $\vec{j}$ in diesem Fall? Berechne das magnetische Moment des Kreisleiters. Verallgemeinere das Ergebnis auf beliebige ebene Leiterschleifen. Wie sieht das Ergebnis aus, wenn der Strom nur aus einem Teilchen besteht?

(b) Berechne mit dem Biot/Savartschen Gesetz das Magnetfeld auf der Symmetrieachse des Kreisleiters und vergleiche das Ergebnis mit dem Dipolfeld.

(c) Vergleiche die Felder eines elektrischen und magnetischen Dipols. Skizziere die Feldlinien des Kreisleiters und einer Punktladungskonfiguration $\pm Q$ an $(0, 0, \pm a)$.

Betrachte nun eine starre Kugel vom Radius R, auf deren Oberfläche eine Ladung Q gleichförmig verteilt ist und welche mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert.

(d) Berechne das magnetische Dipolmoment der Kugel. Zerlege dazu die Kugel in dünne Scheiben senkrecht zur Rotationsachse und benutze das Ergebnis aus (a).

(e) Die Kugel sei das Modell eines klassischen Elektrons, d.h. der Radius beträgt $R = \frac{e^2}{mc^2}$ und der Drehimpuls (Spin) $S = \Theta\omega = \frac{\hbar}{2}$, wobei $\Theta = \frac{2}{5}mR^2$ das Trägheitsmoment bezeichnet. Vergleiche das in (d) berechnete Dipolmoment mit dem quantentheoretischen Wert $m = g\mu_B S = \frac{e\hbar}{2mc}$. Berechne auch die Rotationsgeschwindigkeit am Äquator. Diskutiere das Ergebnis.