Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 27.11.2014, Besprechung: 4.12.-5.12.2014

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/

–Anwesenheitsaufgaben–

A 7.1 Greensche Funktion des Wellenoperators
Wir suchen die Greensche Funktion $G(\vec{r},t)$ des Wellenoperators im $\mathbb{R}^3$, d.h. es gilt

$$\Box G(\vec{r},t) = \delta^{(3)}(\vec{r})\delta(t) \quad \text{mit} \quad \Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \ .$$

(a) Die Fouriertransformation bildet Ableitungen in Multiplikationen ab und vereinfacht somit das Problem: Zeige $(|\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\tilde{G}(\vec{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}$ für die Fouriertransformierte $\tilde{G}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3r dt e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}G(\vec{k},t)$.

(b) Folgere aus (a), dass mit beliebigen Funktionen $a_\pm(\vec{k})$ gilt:

$$\tilde{G}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{|\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + a_-(\vec{k})\delta(|\vec{k}| + \frac{\omega}{c}) + a_+(\vec{k})\delta(|\vec{k}| - \frac{\omega}{c}) \ .$$

Was ist demnach die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\Box G(\vec{r},t) = 0$?

(c) Wir betrachten nun nur noch den inhomogenen Term. Zeige, dass nach Anwenden der inversen Fouriertransformation mit $\omega_0 = c|\vec{k}|$ gilt:

$$G(\vec{r},t) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\int d^3k d\omega \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \ .$$

(d) Zu berechnen ist demnach das Integral

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{-i\omega t} \ .$$

Wegen der Pole bei $\omega = \pm\omega_0$ ist es zweckmässig, den Integrationsweg über die reelle Achse in der Nähe der Pole in die komplexe Ebene hinein zu deformieren. Wir deformieren den Integrationsweg in die obere Halbebene hinein, dies entspricht der Wahl der *retardierten* Greenschen Funktion. Um den Cauchyschen Integralsatz bzw. den Residuensatz anwenden zu können, muss der Integrationsweg aber noch zu einer geschlossenen Kurve ergänzt werden, dies kann mit einem Halbkreis in der oberen oder unteren Halbebene geschehen.
Zeige, dass für $t < 0$ ein Halbkreis mit unendlich großem Radius in der oberen, für $t > 0$ entsprechend in der unteren Halbebene keinen Beitrag zum Integral ergibt. Folgere, dass $I(t) = 0$ für $t < 0$.

(e) Zeige mit dem Cauchyschen Integralsatz $f(\omega_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$, wobei der Integrationsweg den Pol ω_0 positiv orientiert umschließt: $I(t) = -\frac{2\pi}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\Theta(t)$. Damit gilt dann für die retardierte Greensche Funktion:

$$G_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \Theta(t)\frac{c}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{1}{|\vec{k}|} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sin(|\vec{k}|ct) \ .$$

(f) Führe in (e) Polarkoordinaten ein und integriere über die Winkel.

(g) Zeige schließlich mit $\int e^{i\vec{x}\cdot\vec{y}} d^n y = (2\pi)^n \delta^{(n)}(\vec{x})$, dass

$$G_{\rm ret}(\vec{r},t) = \Theta(t)\frac{c}{4\pi r}(\delta(r-ct) - \delta(r+ct))\ .$$

(h) Gib die allgemeine Lösung der Wellengleichungen für Φ und $\vec{A}$ in Lorentzeichung mit Hilfe der Greenschen Funktion des Wellenoperators an.

–Hausaufgaben–

H 7.1 Allgemeines zu den Maxwellgleichungen **(1+1+1+2+1+1+1+1+1=)10 Punkte**

Die Maxwell bekannten Gleichungen für elektrische und magnetische Felder waren

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\ .$$

Maxwell erkannte das dieses System von Gleichungen inkonsistent ist und fand die richtige Erweiterung. In dieser Aufgabe soll Maxwells Erweiterung durch den Verschiebungsstrom nachvollzogen werden und anschließend einige Eigenschaften der resultierenden Maxwellgleichungen diskutiert werden.

(a) Welche der obigen Gleichungen ist inkonsistent und wieso?

(b) Formuliere die Kontinuitätsgleichung $\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ in einen divergenzfreien Ausdruck um.

(c) Nutze Teil (b) um eine konsistente Erweiterung der in (a) gefundenen Gleichung zu definieren.

(d) Wie lautet der Zusammenhang zwischen Feld $\vec{E},\vec{B}$ und den jeweiligen Potentialen Φ und $\vec{A}$? Zeige, dass die *Lorenzeichung* $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$ die Maxwellgleichungen für Φ und $\vec{A}$ entkoppelt. Zeige insbesondere die Wellengleichungen

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\ , \qquad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\Phi = 4\pi\rho\ .$$

Ist solch eine Eichung immer möglich?

(e) Zeige, dass in der *Coulombeichung* $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ die Maxwellgleichung für Φ genau dem statischen Fall entspricht. Ist solch eine Eichung immer möglich?

(f) Begründe, warum ein elektromagnetisches Feld die Energie $E_{\rm mat}$ einer Ladungs- und Stromverteilung wie folgt ändert:

$$\frac{dE_{\rm mat}}{dt} = \int \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)d^3r\ .$$

Zerlege hierzu zunächst $E_{\rm mat}$ in infinitesimale Stücke $dE_{\rm mat} = \sum_i \vec{F}_i\cdot d\vec{x}_i$ mit der Lorentzkraft $\vec{F}_i = q_i(\vec{E} + \frac{\vec{v}_i}{c}\wedge\vec{B})$ und identifiziere anschließend die Stromdichte $\vec{j}$ als $\vec{j} = \sum_i q_i\vec{v}_i\delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$.

(g) Betrachte die Transformationen C, P, T mit der Wirkung auf die Ladungsdichte:

$$\begin{array}{rll} \text{Zeitumkehr } T: & t \to t' = -t, & \varrho(\vec{r},t) \to \varrho'(\vec{r},t') = \varrho(\vec{r},-t) \\ \text{Raumspiegelung } P: & \vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}, & \varrho(\vec{r},t) \to \varrho'(\vec{r}',t) = \varrho(-\vec{r},t) \\ \text{Ladungskonjugation } C: & & \varrho(\vec{r},t) \to \varrho'(\vec{r},t) = -\varrho(\vec{r},t) \end{array}$$

Wie sind $\vec{j}$ und die Felder zu transformieren, so dass die Maxwellgleichungen gelten?

(h) Die *Dualitätstransformation* wirkt als $\vec{B} \to \vec{E}$, $\vec{E} \to -\vec{B}$. Zeige die Invarianz der Vakuum-Maxwellgleichungen. Kann man auch kontinuierlich transformieren?

(i) Wieso haben die Maxwellgleichungen nur im Vakuum die Dualitätssymmetrie?