Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Besprechung: 27.11.-28.11.2014

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/

–Anwesenheitsaufgaben–

A 8.1 Die Lorentzgruppe

In dieser Aufgabe sollen die fundamentalen Konzepte der speziellen Relativitätstheorie eingeführt werden. Diese beinhalten den Begriff des Vierer-Vektors, den Minkowski-Raum und die Lorentztransformationen als seine Isometrien. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^4$ mit der *Minkowskimetrik* $g = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ und

$$\langle x, x' \rangle := \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x'^\nu = c^2 t t' - x^1 x'^1 - x^2 x'^2 - x^3 x'^3 =: x^0 x'^0 - \vec{x} \cdot \vec{x'}$$

für *Vierervektoren*

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} .$$

$\mathbb{R}^4$ mit dieser Metrik heißt *Minkowskiraum* oder $\mathbb{R}^{1,3}$. Ein Vierervektor ist

$$\left.\begin{array}{c}\text{raum-}\\ \text{licht-}\\ \text{zeit-}\end{array}\right\} \text{artig, falls } \langle x, x \rangle \left\{\begin{array}{l} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array}\right. .$$

(a) Motiviere die Definition von Raum-, Licht- und Zeitartigkeit.

(b) Warum betrachtet man als Symmetrietransformationen von Raum und Zeit nur lineare Abbildungen $x \mapsto \Lambda x$, in Komponenten: $x^\mu \mapsto \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu x^\nu =: \Lambda^\mu_\nu x^\nu$?

(c) Begründe, dass die Forderung nach Konstanz der Lichtgeschwindigkeit auf

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \langle \Lambda x, \Lambda x \rangle = 0$$

als Bedingung an Λ führt und zeige, dass diese Bedingungen durch

$$\langle \Lambda x, \Lambda x' \rangle = a(\Lambda) \langle x, x' \rangle$$

mit einem Faktor $a(\Lambda)$, der von Λ abhängen kann, erfüllt wird.

(d) Warum darf man $a(\Lambda) = 1$ setzen?

Eine nicht schwierige, aber technische Rechnung (z.B. H.Römer/M.Forger, Elementare Feldtheorie, Wiley-VCH 1993, S.110) zeigt, dass die beiden Bedingungen in (c) äquivalent sind. Daher nennt man eine lineare Abbildung $\Lambda : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}^{1,3}$ *Lorentztransformation*, falls

$$\langle x, x' \rangle = \langle \Lambda x, \Lambda x' \rangle \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^{1,3} \ . \tag{1}$$

(e) Folgere die Bedingung $\Lambda^T g \Lambda = g$ und vergleiche mit der für orthogonale Matrizen.

(f) Wie kann man räumliche Drehungen als Lorentztransformationen interpretieren?

(g) Zeige, dass die diskreten Transformationen Zeitumkehr $T = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ und Parität $P = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ Lorentztransformationen sind.

(h) Folgere aus der definierenden Eigenschaft (1), dass $|\Lambda^0_0| \geq 1$ und $\det \Lambda = \pm 1$.

(i) Was bedeutet $\Lambda^0_0 < 0$? Weshalb wird T manchmal nicht als eine Lorentztransformation angesehen?

(j) Zeige, dass die Lorentztransformationen eine Gruppe bilden, und zwar die sog. *Lorentzgruppe* $\mathcal{L} = O(1, 3)$, welche in vier Zweige zerfällt:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}^{\uparrow}_{+} : \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det\Lambda = 1 & \mathcal{L}^{\uparrow}_{-} : \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det\Lambda = -1 \\ \mathcal{L}^{\downarrow}_{-} : \Lambda^0_0 \leq -1, \quad \det\Lambda = -1 & \mathcal{L}^{\downarrow}_{+} : \Lambda^0_0 \leq -1, \quad \det\Lambda = 1 \end{array}$$

Wenn $\Lambda^0_0 \geq 1$, so heißt Λ *orthochron*. Falls $\det\Lambda = 1$, so nennt man Λ *eigentlich*. Die eigentlichen Lorentztransformationen $\mathcal{L}_{+} := \mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \cup \mathcal{L}^{\downarrow}_{+}$ heißen auch $SO(1, 3)$.

(k) Wie erhält man aus der eigentlich orthochronen Gruppe die anderen Zweige?

–Hausaufgaben–

Das Midterm findet am Dienstag, den 2. Dezember von 10-12 Uhr in Hörsaal 1 PI statt. Zur Klausur darf ein beidseitig, handbeschriebenes DIN A4 Blatt mitgebracht werden.
Auf diesem Zettel gibt es keine Hausaufgaben. Stattdessen gibt es an dieser Stelle eine kleine Checkliste, die jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit besitzt!

Checkliste

- Differentialoperatoren
- Koordinatensysteme
- Eigenschaften der Deltadistribution
- Coulomb Gesetz
- Zusammenhang Feld und Potential
- Superpositionsprinzip
- Anwendungen der Integralsätze von Gauss und Stokes

- Problem der Selbstenergie
- Elektrostatische Probleme und deren Lösung
- Oberflächenladungsdichte
- Poisson-Gleichung
- Greensfunktion
- Separationsansatz
- Randbedingungen
- Konzept der vollständigen Funktionensysteme
- Kugelflächenfunktionen und Legendre-Polynome als Lösungskonzept elektro- und magnetostatischer Probleme
- Multipolmomente
- Magnetostatische Probleme und deren Lösung
- Kontinuitätsgleichung
- Biot-Savart Gesetz
- Allgemeine Maxwellgleichungen, ihre Spezialiserungen und Folgerungen
- Eichbedingungen und Eichinvarianz
- Wellengleichung