Übungen zu Theoretische Physik II

Prof. Dr. Albrecht Klemm, Jonas Reuter

Abgabe: 18.12.2014, Besprechung: 8.1.-9.1.2015

http://www.th.physik.uni-bonn.de/klemm/theo2ws1415/

–Anwesenheitsaufgaben–

A 9.1 Relativistische Kinematik

In dieser Aufgabe sollen einige Konzepte der relativistischen Kinematik eingeführt werden. Diese Kenntnisse sind vor allem zur Analyse hochenergetischer Teilchenkollisionen essentiell. Hierzu müssen insbesondere die Begriffe von Energie und Impuls abgeändert werden, die in der speziellen Relativitätstheorie in einen physikalischen Vierer-Vektor vereinheitlicht werden. Ebenso ist es notwendig, adäquate Größen einzuführen, die vom Bezugssystem unabhängig sind, wie z.B. die Mandelstam-Variablen.

Die relativistische Wirkung eines Punktteilchens der Masse m lautet

$$S_{\text{mat}} = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\sigma}(\sigma)\frac{dx_\mu}{d\sigma}(\sigma)} d\sigma\,,$$

wobei $\sigma \mapsto x^\mu(\sigma)$ eine beliebige Parametrisierung bezeichnet.

(a) Wähle die Parametrisierung nach der Zeit, d.h. $\sigma = t$. Wie transformiert sich die Wirkung unter $x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu$ für einen konstanten Vierer-Vektor a^μ? Berechne aus dem Noether-Theorem die zugehörigen Erhaltungsgrößen und interpretiere diese. Definiere hierzu

$$p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\frac{dx^\mu}{dt}\,.$$

(b) Wie transformiert p^μ unter Lorentztransformationen? Zeige, dass $p^\mu p_\mu$ unter Poincaré Transformationen invariant ist. Zeige, dass gilt

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2$$

und die Energie gegeben ist durch

$$cp_0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}\,.$$

(c) Zeige, dass p zeitartig ist und damit, dass es ein Bezugssystem gibt, so dass gilt $p'^\mu = (p'_0, 0)$. Begründe den Namen "Center of Mass System", oder kurz CMS. Schreibe hierzu $p'_0 \equiv p_0^{\text{cms}} = \sqrt{p^\mu p_\mu}$. Was gilt für $m = 0$?

Betrachte nun eine elastisch Zweiteilchen-Reaktion

$$(m_1, \vec{p}_1) + (m_2, \vec{p}_2) \to (m_3, \vec{p}_3) + (m_4, \vec{p}_4)\,,$$

wofür die Energie-Impulserhaltung gilt:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu\,.$$

Definiere nun die Lorentz-invarianten *Mandelstam-Variablen* durch

$$\begin{aligned}
s &= (p_1+p_2)^\mu(p_1+p_2)_\mu = (p_3+p_4)^\mu(p_3+p_4)_\mu \\
t &= (p_1-p_3)^\mu(p_1-p_3)_\mu = (p_2-p_4)^\mu(p_2-p_4)_\mu \\
u &= (p_1-p_4)^\mu(p_1-p_4)_\mu = (p_2-p_3)^\mu(p_2-p_3)_\mu\,.
\end{aligned}$$

(d) Berechne s, t und u als Ausdrücke in den Massen m_i, des Impules $\vec{p}_i$ und der Energie E_i und zeige, dass

$$s + t + u = c^2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)\,,$$

d.h. s, t und u sind nicht unabhängig.

(e) Zeige, dass $s = (p_0^{\text{cms}})^2 = \frac{1}{c^2}(E^{\text{cms}})^2$ gilt.

–Hausaufgaben–

H 9.1 Teilchenbewegung in einem konstanten elektromagnetischen Feld (1+2+1+3+3=)10 Punkte

In dieser Aufgabe soll die Dynamik eines relativistischen Teilchens in einem konstanten, elektromagnetischen Feld untersucht werden. Die allgemeine Wirkung für ein Punktteilchen der Masse m und Ladung q im Potential A lautet wie in der Vorlesung diskutiert

$$S_{\text{mat}} = -mc\int_{s_1}^{s_2} ds - \frac{q}{c}\int_{s_1}^{s_2} A^\mu(x(s))\frac{dx_\mu}{ds}ds\,,$$

wobei die Parametrisierung $x^\mu(s)$ durch die Bogenlänge s mit $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ gewählt wurde. Das erste Integral misst hierbei einfach die Länge der Bahnkurve $x : [s_1, s_2] \to \mathbb{R}^{1,3}$ im Minkowskiraum und der zweite Term beschreibt die Kopplung an das elektromagnetische Potential. Bemerke, dass die Ladung die Stärke der Kopplung beschreibt und daher als Kopplungskonstante angesehen wird. Insbesondere koppeln ungeladene ($q = 0$) Teilchen nicht elektromagnetisch.

(a) Wie lautet die Wirkung in allgemeiner Parametrisierung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{1,3}$, $\sigma \mapsto x(\sigma)$?

(b) Leite die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu(\tau) = \frac{q}{mc}F^\mu{}_\nu x'^\nu(\tau) \tag{1}$$

in einem konstanten elektromagnetischen Feld $F_{\mu\nu}$ unter der Benutzung des Wirkungsprinzips her. Hier verwenden wir die Abkürzung $x'(\tau) = \frac{d}{d\tau}x(\tau)$.
Tipp: Rechne dazu zuerst in allgemeiner Parametrisierung und wähle dann die Eigenzeit $\sigma = \tau$.

(c) Zeige, dass

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau d\lambda \exp((\tau - \lambda)\alpha F)x_0',$$

mit $\alpha = \frac{q}{mc}$ eine Lösung der Bewegungsgleichung (1) für die Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0 = \text{const.} \in \mathbb{R}^{1,3}, \quad x'(x) = x_0' = \text{const.} \in \mathbb{R}^{1,3},$$

ist.

(d) Zeige, dass $G(\tau) = \exp(\tau\alpha F)$ für alle τ eine Lorentz-Transformation ist. Zeige dazu zunächst, dass $\langle Fa, b\rangle = -\langle a, Fb\rangle$, dann, dass gilt: $\frac{d}{d\tau}\langle G(\tau)a, G(\tau)b\rangle = 0$, und folgere daraus: $\langle G(\tau)a, G(\tau)b\rangle = \langle a, b\rangle$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^{1,3}$.

(e) Berechne $x(\tau)$ für den Spezialfall:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix}$$

Entwickle dazu $\exp(\tau\alpha F)$ in eine Potenzreihe. Es kann hilfreich sein, $F = F_1 + F_2$ in zwei Matrizen, die kommutieren, zu zerlegen.