Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. H. Kroha, T. Langenbruch
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/Groups/kroha

15.04.2008

Theoretische Festkörperphysik — SS2008

Übungszettel 2

(Abgabe Do 08.05.08, Besprechung Fr 09.05.08)

2.1 Die Selbstenergie in 2. Ordnung Störungstheorie (6 Punkte)

Wir betrachten das Hubbard-Modell für Elektronen in einem Festkörper. Im Ortsraum hat der zugehörige Hamiltonoperator die folgende Form:

$$H = \sum_{ij\sigma} T_{ij} c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma} + U \sum_{i\sigma} n_{i\sigma} n_{i-\sigma}$$

a) Zeigen Sie analog zu Aufgabe **1.1 b)**, dass wir den Hamiltonoperator nach Fouriertransformation in den k-Raum wie folgt schreiben können:

$$H = \sum_{\sigma\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + U \sum_{\mathbf{p_1 p_2 p_3 p_4}\sigma} \delta(\mathbf{p_1} + \mathbf{p_3} - \mathbf{p_2} - \mathbf{p_4}) c_{\mathbf{p_1}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{p_2}\sigma} c_{\mathbf{p_3}-\sigma}^\dagger c_{\mathbf{p_4}-\sigma}$$

b) Wir möchten jetzt Störungstheorie in U betreiben.
Zeichnen Sie hierzu zunächst alle zugehörigen erlaubten Selbstenergiediagramme in zweiter Ordnung und beschriften Sie die Diagramme sowohl im Orts- als auch im Impulsraum.

c) In stark korellierten Elektronensystemen ist die Selbstenergie häufig stark im Ortsraum lokalisiert. Wir setzen deshalb alle Ortsindizes in den Selbstenergiediagrammen gleich.
Berechnen sie nun den Beitrag zweiter Ordnung zum Imaginärteil der Selbstenergie in Matsubara-Störungstheorie. Wir können dabei aufgrund der starken Lokalisierung impulsintegrierte k-unabhängige Greens-Funktionen benutzen.
Machen sie sich hierzu klar, dass für fermionische Matsubarafrequenzen ω_n und ν_m gilt:

$$\begin{aligned} f(i\omega_n - i\nu_m + E) &= f(E) \\ f(i\omega_n + E) &= -b(E) \end{aligned}$$

Wobei $f(\omega)$ und $b(\omega)$ die Fermi- und die Bosefunktion sind.

d) Folgern Sie nun, dass der Beitrag zweiter Ordnung zum Imaginärteil der Selbstenergie proportional zu ω^2 ist. Nehmen sie hierzu an, dass für $T \to 0$:

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &\to \theta(-\epsilon) \\ b(\epsilon) &\approx -f(\epsilon) \end{aligned}$$

2.2 Impulsverteilung und Quasiteilchengewicht (6 Punkte)

Die Impulsverteilung ist definiert als:

$$n_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) A_k(\omega) d\omega$$

Wobei $f(\omega)$ die Fermifunktion und $A_k(\omega)$ die Spektralfunktion ist.

Wir wissen, dass die Impulsverteilung eines nicht-wechselwirkenden Systems von Fermionen eine scharfe Diskontinuität an der Fermikante $|\mathbf{k}| = k_F$ zeigt. Man könnte jetzt erwarten, dass beim Einschalten einer starken Wechselwirkung, diese Fermikante vollkommen "verschmiert" wird und es keine Diskontinuität gibt, da in einem typischen wechselwirkenden System die Wechselwirkung zwischen den Elektronen von der Größenordnung der Fermienergie ist. Experimente an Elektronen in Metallen zeigen allerdings eine Diskontinuität in der Impulsverteilung. Wir wollen dies im Folgenden begründen.

a) Wir betrachten zunächst die volle retardierte Greens-Funktion

$$G_k^R(\omega) = \frac{1}{\omega + \mu - \epsilon_k - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)}$$

Aus **2.1** wissen wir, dass sich der Imaginärteil der Selbstenergie sich wie ω^2 verhält und vernachlässigen ihn daher in unseren folgenden Betrachtungen.
Die Greens-Funktion hat dann einen Pol bei $\omega_0 + \mu \equiv \tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k + \Sigma(\mathbf{k}, \tilde{\epsilon}_k - \mu)$.

Entwickeln Sie die Selbstenergie um diesen Pol in erster Ordnung und zeigen Sie, dass sich die retardierte Greens-Funktion dann schreiben lässt als:

$$G_k^R(\omega) = \frac{Z_k}{\omega + \mu - \tilde{\epsilon}_k + i\eta}$$

wobei das Quasiteilchengewicht Z_k gegeben ist durch

$$Z_k = \frac{1}{1 - \frac{d\Sigma}{d\omega}(\mathbf{k}, \tilde{\epsilon}_k - \mu)}$$

b) Zeigen Sie, dass die Impulsverteilung n_k für $T = 0$ bei $k = k_F$ einen Sprung der Größe Z_k hat, indem Sie $n_{k \to k_F^+}$ und $n_{k \to k_F^-}$ berechnen.