Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. H. Kroha, T. Langenbruch
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/Groups/kroha

15.04.2008

Theoretische Festkörperphysik — SS2008

Übungszettel 3

(Abgabe Do 22.05.08, Besprechung Fr 23.05.08)

3.1 Das atomare Limit (6 Punkte)

Wir betrachten im Folgenden das atomare Limit des Hubbard-Modells, charakterisiert durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2}U\sum_{i\sigma} n_{i\sigma}n_{i-\sigma}$$

In diesem Grenzfall ist es möglich, die volle retardierte Green's-Funktion aus ihrer Bewegungsgleichung zu ermitteln:

$$i\frac{\partial G^r_{i\sigma}}{\partial t}(t) = \delta(t)\langle\{c_{i\sigma}, c^\dagger_{i\sigma}\}\rangle - i\theta(t)\langle\{[c_{i\sigma}(t), H], c^\dagger_{i\sigma}(0)\}\rangle$$

a) Zeigen Sie zunächst durch Ausrechnen des Kommutators $[c_{i\sigma}(t), H]$, dass dies auf eine Bewegungsgleichung führt, die eine höhere Green's-Funktion $\Gamma_{i\sigma}(t)$ enthält.

$$-i\frac{\partial G^r_{i\sigma}}{\partial t}(t) = -\delta(t) - U\Gamma_{i\sigma}(t) \tag{1}$$

$$\Gamma_{i\sigma}(t) = -i\theta(t)\langle\{n_{i-\sigma}(t)c_{i\sigma}(t), c^\dagger_{i\sigma}(0)\}\rangle \tag{2}$$

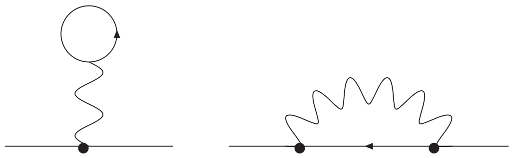
b) Stellen Sie nun die Bewegungsgleichung für $\Gamma_{i\sigma}(t)$ auf und lösen Sie diese, indem Sie auch den hier auftretenden Kommutator mit H ausrechnen und eine Fouriertransformation in den Energieraum durchführen.

c) Lösen Sie nun die Bewegungsgleichung für $G^r_{i\sigma}(t)$, indem Sie Gleichung (1) Fouriertransformieren und ihr Ergebnis aus Aufgabenteil b) einsetzen. Zeigen Sie, dass dann für die Green's-Funktion folgt:

$$G^r_{i\sigma} = \frac{1-\langle n_{-\sigma}\rangle}{\omega + i\eta} + \frac{\langle n_{-\sigma}\rangle}{\omega - U + i\eta}$$

3.2 Die Hartree-Fock Näherung (6 Punkte)

In der Hatree-Fock Näherung werden nur die Beiträge niedrigster Ordnung zur Selbstenergie berücksichtigt:



Berechnen Sie den Beitrag dieser Diagramme zur Selbstenergie des freien Elektronengases mit Coulombwechselwirkung:

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{k\sigma} \epsilon_p c^\dagger_{p\sigma} c_{p\sigma} + \frac{1}{2} \sum_q V(q) \sum_{pp'\sigma\sigma'} c^\dagger_{p+q\sigma} c^\dagger_{p'-q\sigma'} c_{p'\sigma'} c_{p\sigma} \\
\epsilon_p &= \frac{p^2}{2m} \\
V(q) &= \frac{1}{V} \frac{4\pi e^2}{|q|^2}
\end{aligned}
$$

Setzen Sie dabei voraus, dass Diagramme mit Impulsübertrag $q = 0$ nicht beitragen und nach Konvention die Operatoren bei Gleichzeitigkeit normalgeordnet sind. Normalordnung bedeutet hier, dass Erzeugungsoperatoren immer vor Vernichtungsoperatoren stehen.