

---

# Quantenhalleffekt - ganzzahlig und fraktional

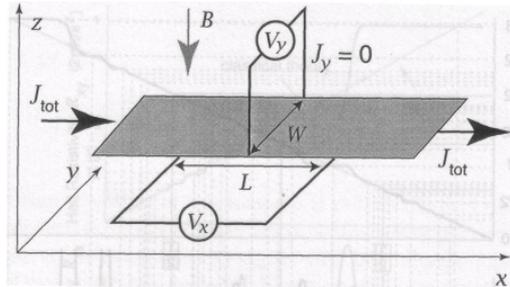
---

# Outline

- Phänomen
- Landauniveaus und Entartung
- Ganzzahliger Quantenhalleffekt (IQHE)
- Störstellen und Lokalisierung
- Fraktionaler Quantenhalleffekt (FQHE)
- Laughlin-Wellenfunktion
- Verbundteilchen

# Phänomenen der Halleffekte

Versuchsaufbau (schematisch)



Voraussetzungen:

- 2D Elektronengas
- $T \sim 1,0$  K
- $B \sim 150$  kG
- reine Proben

---

# Klassisch

Ohmsches Gesetz:

$$\vec{j} = \sigma(B)\vec{E}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{E} = \rho(B)\vec{j}$$

Leitfähigkeitstensor:  $\sigma(B) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}$

Widerstandstensor:  $\rho(B) = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}$

Klassische Erwartung:

Kräftegleichgewicht:  $E_y = \frac{v_x}{c} B = \frac{B}{\rho_0 e c} j_x$

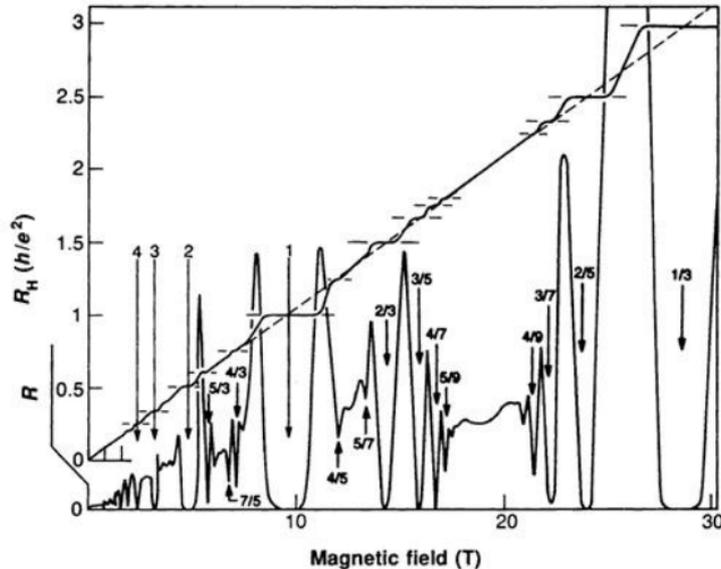
$\Rightarrow$

$$-\rho_{xy} = \frac{B}{\rho_0 e c}$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{xy} \sim \frac{B}{\rho_0}$$

# Beobachtung



- Der Hallwiderstand auf den Stufen beträgt **EXAKT**  $R_H = -\rho_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$
- Plateau in  $\rho_{xy} \Rightarrow$  Minimum in  $\rho_{xx}$ ; Leitfähigkeit  $\sigma$  verhält sich wie Widerstand  $\rho$

# Landau-Niveaus

Freies Elektronengas in 2D im homogenen Magnetfeld  $\vec{B} = B_{\perp} \hat{e}_z$

Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}) = (0, B_{\perp} x, 0)$

$$\begin{aligned} \text{Hamiltonian: } H &= \frac{1}{2m_e} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2m_e} p_x^2 + \frac{1}{2} m_e \omega_c^2 (x + l_B^2 k_y)^2 \\ \omega_c &= \frac{eB_{\perp}}{m_e c} \text{ Zyklotronfrequenz; } l_B = \frac{\hbar c}{eB_{\perp}} \text{ magnetische L\u00e4nge} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Harmonischer Oszillator mit Energieniveaus  $E_n = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$   
unabh\u00e4ngig von  $p_y \Rightarrow$  bez\u00fcglich  $p_y$  entartet:

periodische Randbedingungen:  $p_y = \frac{2\pi\hbar}{W} \cdot s, s \in \mathbb{Z}$

Entartung:  $g = \frac{W}{2\pi\hbar} (p_y^{\max} - p_y^{\min})$

Teilchen eingeschlossen in Kasten mit Seitenl\u00e4ngen  $L$  und  $W$ :

$$\Rightarrow -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{c}{eB_{\perp}} p_y - \frac{L}{2} \leq \frac{c}{eB_{\perp}} p_y \leq x + \frac{c}{eB_{\perp}} p_y + \frac{L}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Entartung f\u00fcr jedes Landauniveau: } g(B_{\perp}) &= \frac{eLW}{2\pi\hbar c} B_{\perp} \\ &= \frac{e}{\hbar c} \Phi = \frac{\Phi}{\Phi_D} = N_{\Phi} \end{aligned}$$

---

# Füllfaktor und Inkompressibilität

Füllfaktor:

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\text{Anzahl Elektronen}}{\text{Anzahl Plätze pro Landauniveau}} \\ &= \frac{N}{g} = \frac{N}{N_\Phi}\end{aligned}$$

⇒ Füllfaktor gibt an, wieviele magnetische Flußquanten auf ein Elektron fallen

$\nu = n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n$  Landauniveaus komplett gefüllt

⇒ für Anregung Energie  $\hbar\omega_c$  benötigt

⇒ Inkompressibilität

---

# Ganzzahliger Quantenhalleffekt

Randbedingung 1

Responsefunktion:  $\vec{E} = \sigma \vec{j}$

Strom  $j_x$  in x-Richtung

kein Abgriff des Hallstromes  $\Rightarrow$  Hallspannung  $\Rightarrow$  Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned} \nu \text{ magisch} &\Rightarrow \sigma_{xx} = 0 \\ &\Rightarrow E_y = -j_x / \sigma_{xy} \\ &\Rightarrow E_x = 0 \end{aligned}$$

d.h. kein Feld in x-Richtung zur Aufrechterhaltung des Stromes nötig  $\Rightarrow$  Stromfluß ideal

Erklärung:

Landauniveaus komplett gefüllt oder leer  $\Rightarrow$  Inkompressibilität  $\Rightarrow$  keine Streuung möglich  
Kräftegleichgewicht

$\Rightarrow$  keine Elektronen durch Magnetfeld abgelenkt

$\Rightarrow$  Stromfluß erfolgt in x-Richtung ideal

---

# Ganzzahliger Quantenhalleffekt

Randbedingung 2

Responsefunktion:  $\vec{j} = \rho \vec{E}$

Feld  $E_x$  in x-Richtung

Abgriff des Hallstromes  $\Rightarrow$  keine Hallspannung  $\Rightarrow$  kein Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned} \nu \text{ magisch} &\Rightarrow \sigma_{xx} = 0 \\ &\Rightarrow j_y = -E_x / \sigma_{xy} \\ &\Rightarrow j_x = 0 \end{aligned}$$

d.h. bei angelegtem Feld  $E_x$  nur Stromfluß in y-Richtung  $\Rightarrow$  Stromfluß ideal

Erklärung:

Landauniveaus komplett gefüllt oder leer  $\Rightarrow$  Inkompressibilität  $\Rightarrow$  keine Streuung möglich

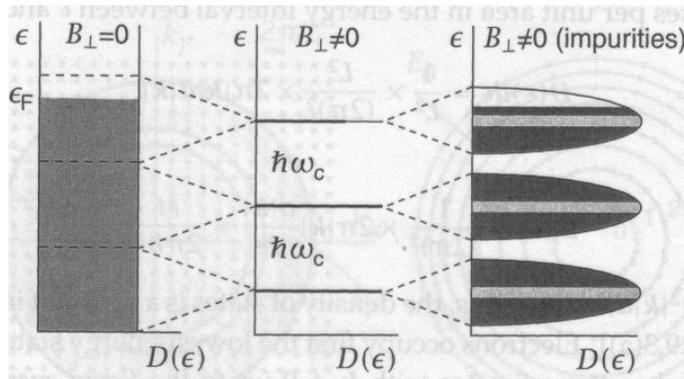
$\Rightarrow$  alle Elektronen durch Magnetfeld abgelenkt

$\Rightarrow$  kein Stromfluß in x-Richtung

# Plateaus

$$\nu \sim \frac{1}{B_{\perp}} \quad \Rightarrow R_H \sim B_{\perp} \quad \Rightarrow R_H \text{ linear in } B_{\perp} \quad \Rightarrow \text{keine Stufen!}$$

Lokalisierung durch Störstellen:



Nur Elektronen in ausgedehnten Zuständen tragen zum Strom bei

$\Rightarrow$  für  $\nu \approx n$  ist der Strom der gleiche wie für  $\nu = n$

$\Rightarrow$  Plateau um  $\nu = n$

---

# Fraktionaler Quantenhalleffekt

Füllfaktor :  $\nu = \frac{1}{m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m$  ungerade

⇒ Landauniveau nur zu  $\frac{1}{m}$  gefüllt

⇒ es gibt genug Zustände, in die gestreut werden kann

⇒ keine Inkompressibilität

**Aber** man sieht dennoch Stufen

Lösung:

Die Wechselwirkung zwischen den Elektronen spielt eine Rolle

⇒ Entartung aufgehoben

⇒ Inkompressibilität

2 Modelle:

1. Laughlin-Wellenfunktion und Plasma-Analogon

2. Verbundteilchen

# Elektronen mit Wechselwirkung

Ein Elektron in 2D im Magnetfeld:  $H = \frac{1}{2m_e} (\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A})^2$

symmetrische Eichung:  $\vec{A} = \frac{B_{\perp}}{2} (y\hat{e}_x - x\hat{e}_y)$

Einheiten, in denen  $l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB_{\perp}}} = 1$

Eigenzustände von H:

$$|m, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{m+n+1} \pi m! n!}} \exp\left(\frac{1}{4}(x^2 + y^2)\right) (\partial_x - i\partial_y)^m (\partial_x + i\partial_y)^n \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$$

Im niedrigsten Landauniveau mit  $z = x - iy$

$$|m, n = 0\rangle \equiv |m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{m+1} \pi m!}} \cdot z^m \exp\left(-\frac{1}{4}|z|^2\right)$$

2 Elektronen:

$$H = \frac{1}{2m_e} (\vec{p}_1 + \frac{e}{c} \vec{A}_1)^2 + \frac{1}{2m_e} (\vec{p}_2 + \frac{e}{c} \vec{A}_2)^2 + \frac{e^2}{r_{12}}$$

Separation in Schwerpunktskoordinaten  $\bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$  und Relativkoordinaten  $z_a = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{2}}$ :

$$H_{int} = \frac{1}{2m_e} (\vec{p}_a + \frac{e}{c} \vec{A}_a)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}r_a}$$

Eigenfunktion im niedrigsten Landauniveau:  $\Psi = (z_1 - z_2)^m \exp\left(-\frac{1}{4}(|z_1|^2 + |z_2|^2)\right)$

---

# Laughlins Wellenfunktion

Laughlin generalisierte auf  $N$  Teilchen wie folgt:  
N-Teilchen Hamiltonian:

$$H = \sum_{j=1}^N \{ |\vec{p}_j + \frac{e}{c} \vec{A}_j|^2 + V(z_j) \} + e^2 \sum_{k < j} \frac{1}{|z_j - z_k|}$$

N-Teilchen Wellenfunktion im Grundzustand:

$$\Psi = \{ \prod_{j < k} f(z_j - z_k) \} \exp(-\frac{1}{4} \sum_l |z_l|^2)$$

Minimierung der Energie bezüglich  $f$  liefert:

- Elektron im niedrigsten Landauniveau  $\Rightarrow f(z)$  ist Polynom in  $z$
- Antisymmetrie der Wellenfunktion  $\Rightarrow f(z)$  ist ungerade
- Drehimpulserhaltung  $\Rightarrow$   
 $\prod_{j < k} f(z_j - z_k)$  ist homogenes Polynom vom Grad  $M = \frac{m}{2} N(N - 1)$   
 $\Rightarrow f(z) = z^m$  mit  $m$  ungerade

# Plasmaanalogon

$$|\Psi_m|^2 = |\{\prod_{j<k} (z_j - z_k)^m\} \exp(-\frac{1}{4} \sum_l |z_l|^2)|^2 \equiv \exp(-\beta H_m)$$

$$\text{mit } H_m = -\sum_{j<k} m^2 \ln |z_j - z_k| + \frac{1}{4} m \sum_l |z_l|^2 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2}{m}$$

Potential eines Systems mit

- N identischen Teilchen der Ladung q
- einem einheitlichen, neutralisierenden Hintergrund der Ladungsdichte  $\sigma = \frac{1}{2\pi l_B^2}$
- Wechselwirkung untereinander über logarithmisches Potential

$$V_{OCP}(r) = -q^2 \sum_{j<k} \ln r_{jk} + \frac{1}{2} \pi \sigma q \sum_j r_j^2$$

Vergleich von  $H_m$  und  $V_{OCP} \Rightarrow$

$H_m$  ist Hamiltonian eines 2D Plasmas mit Ladungsdichte  $\sigma = \frac{1}{2\pi l_B^2}$

Monte-Carlo  $\Rightarrow OCP \hat{=} \left( \begin{array}{c} \text{hexagonaler Kristall} \\ \text{Flüssigkeit} \end{array} \right)$  für  $m \left( \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right) 70$

# Quasiteilchen

Laughlin:

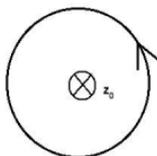
Das 2D Elektronengas ist eine inkompressible Quantenflüssigkeit deren elementare Anregungen Quasiteilchen der Ladung  $\pm \frac{e}{m}$  sind.

$$\Psi_m = \left\{ \prod_{j < k} \overbrace{(z_j - z_k) \cdots (z_j - z_k)}^{m\text{-mal}} \right\} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_l |z_l|^2\right)$$

$\frac{1}{m}$ -Elektron

Verändere Magnetfeld:

schicke bei  $z_0$  durch einen unendlich dünnen Solenoid adiabatisch ein Flußquant  $\Phi_D = \frac{hc}{e}$



$$\Psi_m^{(-)} = \prod_j (z_j - z_0) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_l |z_l|^2\right)$$

# Quasilöcher

$$|\Psi_m^{(-)}|^2 = \exp(-\beta H_m^{(-)})$$

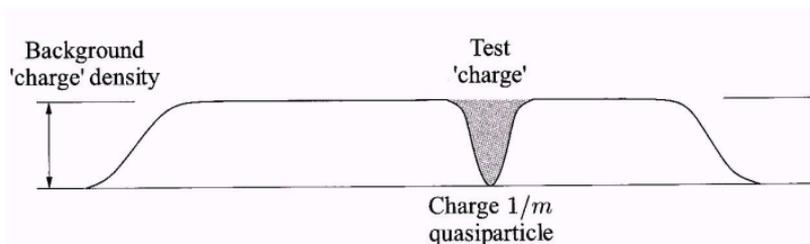
mit

$$H_m^{(-)} = H_m - m \sum_j \ln |z_j - z_0|$$

Hamiltonian eines OCP mit extra repulsiver Phantompunktladung bei  $z_0$

Ladung:  $\frac{1}{m}$ -faches der Ladungen des Plasmas

$\Rightarrow$  Plasma neutralisiert Phantom durch Abziehen von  $\frac{1}{m}$  Ladung nahe  $z_0$



Ladung der Plasmateilchen:  $-e \Rightarrow$  Phantom hat Ladung  $+\frac{e}{m}$

$\Rightarrow$  elementare Anregung ist Quasiloch mit fraktionaler Ladung

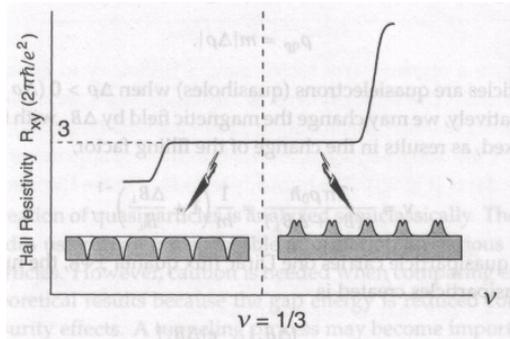
# Quasielektronen

Schicke bei  $z_0$  Flußquant  $\Phi_D = -\frac{hc}{e}$  durch Flüssigkeit  
Schwieriger, da man ein Flußquant rausnehmen muß:

$$\psi_m^{(+)} = \prod_{j=1}^N \left( \exp\left(-\frac{1}{4}|z_j|^2\right) (2\partial_j - z_0^*) \right) \prod_{l < k} (z_l - z_k)^m$$

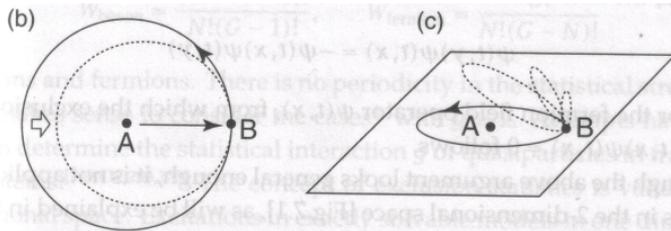
⇒ Phantom hat Ladung  $-\frac{e}{m}$

⇒ **elementare Anregung ist Quasielektron mit fraktionaler Ladung**



Quasiteilchen geladene Objekte ⇒ werden an Störstellen gefangen ⇒ Plateau

# Anyons



Austausch zweier identischer Teilchen  $\Rightarrow$  Wellenfunktion erhält Phasenfaktor:

$$\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = e^{i\alpha\pi} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Zweifaches Tauschen  $\Rightarrow$  geschlossener Loop

In 3D: stetiges Schrumpfen auf einen Punkt möglich, Eindeutigkeit  $\Rightarrow e^{2i\alpha\pi} = 1$

In 2D: Teilchen **IM** Loop  $\Rightarrow$  stetiges Schrumpfen nicht möglich  $\Rightarrow$  Phase  $\alpha$  beliebig: Anyon

---

# Statistische Transmutation

Lagrangian von N Fermionen/Bosonen :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{M}{2} \sum_{r=1}^N \left( \frac{d\vec{x}_r}{dt} \right)^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

Teilchen  $\rightarrow$  Anyons: Einführen einer statistischen Wechselwirkung:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \alpha \hbar \sum_{r < s} \frac{d}{dt} \underbrace{\Theta(\vec{x}_r - \vec{x}_s)}_{= \langle (\vec{x}_r - \vec{x}_s, x - \text{Achse})}$$

$$\vec{p}_r = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\vec{x}}_r} = M \dot{\vec{x}}_r - e \vec{C}(\vec{x}_r)$$

mit

$$C_k(\vec{x}_r) = \frac{\alpha \hbar}{e} \sum_s \partial_k \Theta(\vec{x}_r - \vec{x}_s)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} H &\equiv \sum_{r=1}^N \vec{p}_r \cdot \dot{\vec{x}}_r - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{r=1}^N (\vec{p}_r + e \vec{C}(\vec{x}_r))^2 + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \end{aligned}$$

d.h. minimale Kopplung mit Chern-Simons-Feld  $\vec{C}(\vec{x})$  und Ladung  $e$

---

# Verbundteilchen

in Analogie zur Elektrodynamik:

$$H = \int d^2x \left( \frac{1}{2M} (-i\hbar \vec{\nabla} - e\vec{C}) \phi^\dagger(x) (-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{C}) \phi(x) + V(\vec{x}) \phi^\dagger(x) \phi(x) \right) + \frac{1}{2} \int d^2x \int d^2y \phi^\dagger(x) \phi^\dagger(y) U(|\vec{x} - \vec{y}|) \phi(x) \phi(y)$$

mit  $\phi(x)$  Verbundboson-/Verbundfermionfeld

Constraint:

$$\epsilon_{jk} \partial_j C_k(x) = \frac{2\alpha\pi\hbar}{e} \phi^\dagger(x) \phi(x)$$

zugehöriger Lagrangian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int d^2x \left[ \phi^\dagger(x) (i\hbar \partial_t + eC_0(x)) \phi(x) - \frac{1}{2M} \phi^\dagger(x) (i\hbar \partial_k - eC_k(x))^2 \phi(x) \right] \\ &- \int d^2x \phi^\dagger(x) V(x) \phi(x) - \frac{1}{2} \int d^2x \int d^2y \phi^\dagger(x) \phi^\dagger(y) U(|\vec{x} - \vec{y}|) \phi(x) \phi(y) \\ &- \frac{e^2}{4\alpha\pi\hbar} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \int d^2x C_\mu(x) \partial_\nu C_\lambda(x) \end{aligned}$$

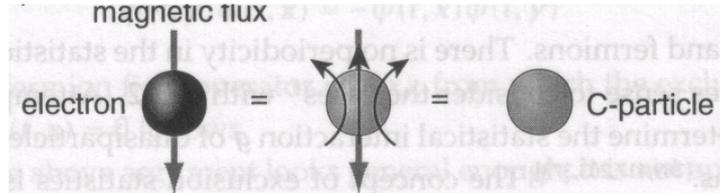
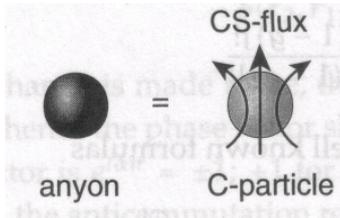
kanonische Kommutatorrelationen:

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})]_\pm &= [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \phi^\dagger(t, \vec{y})]_\pm = 0 \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi^\dagger(t, \vec{y})]_\pm &= \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

d.h. wir haben eine Feldtheorie für Anyons konstruiert, durch Benutzung des Verbundteilchenfeldes und des Chern-Simon-Feldes.

**$\Rightarrow$  Anyon ist ein Verbundteilchen mit Chern-Simons-Fluß**

# Elektronen und Verbundteilchen



Elektronen in 2D sind Anyons  $\Rightarrow$

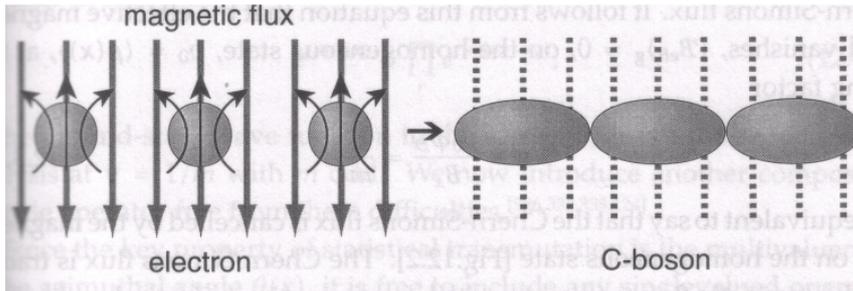
Elektron: gebundener Zustand von Verbundteilchen und Chern-Simons-Fluß

$\Rightarrow$  System von Elektronen im Magnetfeld ist System von Verbundteilchen in magnetischem und Chern-Simons Fluß

$\Rightarrow$  Verbundteilchen erfahren effektives magnetisches Feld:

$$B_{\perp}^{eff} \equiv B_{\perp} - \tilde{m}\Phi_D\rho_0$$

# FQHE und Verbundbosonen



Füllfaktor  $\nu = \frac{1}{2p+1}$  d.h. auf ein Elektron fallen  $2p + 1$  magnetische Flußquanten

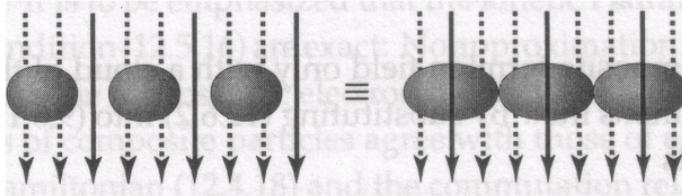
Elektron: Verbundboson mit  $\tilde{m} = 2p + 1$  Chern-Simons-Flußquanten

$$\Rightarrow B_{\perp}^{eff} = \underbrace{(2p + 1)\Phi_D\rho_0}_{B_{\perp}} - \underbrace{(2p + 1)\Phi_D\rho_0}_{\tilde{m}} = 0$$

$\Rightarrow$  Verbundbosonen erfahren kein Magnetfeld

$\Rightarrow$  Bose-Kondensat

# FQHE und Verbundfermionen



Füllfaktor  $\nu = \frac{1}{2p+1}$  d.h. auf ein Elektron fallen  $2p + 1$  magnetische Flußquanten  
Elektron: Verbundfermion mit  $\tilde{m} = 2p$  Chern-Simons-Flußquanten

$$\Rightarrow B_{\perp}^{eff} = (2p + 1)\Phi_D\rho_0 - (2p)\Phi_D\rho_0 = \rho_0\Phi_D = \frac{B_{\perp}}{2p + 1}$$

$$\Rightarrow \nu_{eff} = \frac{2\pi\hbar\rho_0}{eB_{\perp}^{eff}} = (2p + 1)\nu = 1$$

⇒ auf ein Verbundfermion fällt ein magnetisches Flußquant

⇒ der FQH-Zustand von Elektronen bei  $\nu = \frac{1}{2p+1}$  ist  
der IQH-Zustand von Verbundfermionen bei  $\nu_{eff} = 1$

⇒ „fettes“ Elektron besetzt  $(2p + 1)$ -Landauplätze

---

## Zusammenfassung

Quantisierung des Widerstandes in Einheiten  $\frac{h}{e^2}$ :

- Ganzzahliges Vielfaches  $\Rightarrow$  IQHE  $\Rightarrow$  gefüllte Landaulevel  $\Rightarrow$  inkompressibles System  $\Rightarrow$  idealer Stromfluß
- fraktionales, ungerades Vielfaches  $\Rightarrow$  FQHE  $\Rightarrow$ 
  1. Laughlins Wellenfunktion  $\Rightarrow$  Plasmaanalogon  $\Rightarrow$  elementare Anregungen sind geladene Quasiteilchen mit fraktionaler Ladung
  2. Verbundbosonen  $\Rightarrow$  effektives magnetisches Feld = 0  $\Rightarrow$  Bosekondensat
  3. Verbundfermionen  $\Rightarrow$  IQHE mit „fetten“ Elektronen

## Sinn und Zweck

- von Klitzing-Konstante:  $R_K = \frac{h}{e^2} \approx 25812,80700 \Omega$   $\Rightarrow$  dient seit 1990 als Widerstandsnorm mit einer Genauigkeit von über  $10^{-9}$
- Präzisionsmessung der Feinstrukturkonstanten  $\alpha = \frac{e^2}{2hc}$
- Technische Systeme immer kleiner  $\Rightarrow$  Quanteneffekte spielen immer größere Rolle