Übungsblatt 11

Besprechung: 3.–8. Juli

11.1 Zeitabhängiger Zustandsoperator

Wir betrachten ein System von nichtwechselwirkenden Spins ($S = \frac{1}{2}$) im Magnetfeld B. Der Hamiltonoperator eines Spins sei $H = 2\mu_0 B\sigma$.

1) Zur Zeit $t = 0$ seien alle Spins in $+z$-Richtung polarisiert. Bestimmen Sie den Zustandsoperator $\hat{W}(t = 0)$, $\hat{W}(t)$, $\langle\sigma_x\rangle(t)$ und $\langle\sigma_y\rangle(t)$.

2) Geben Sie anhand des Ergebnisses die Oszillationsfrequenz von $\langle\sigma_x\rangle(t)$ an (Larmor-Frequenz).

11.2 Mottstreuung

Wir betrachten ein Streuexperiment von teilweise polarisierten Elektronen am Coulomb-Potential eines Atomkerns (Mott-Streuung, siehe Versuch im F-Praktikum). Aufgrund der Spinbahnkopplung ist der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ abhängig von der Spinorientierung eines Elektrons relativ zu dem Bahndrehimpuls, den das Elektron bezogen auf den Ort des Streuzentrums hat. Die S-Matrixelemente mit dem Eingangsimpuls $\boldsymbol{p}$ und dem Ausgangsimpuls $\boldsymbol{p}'$ sind gegeben durch

$$S_{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}} = 4\pi i \frac{Ze^2}{V} \frac{mc^2}{\sqrt{EE'}} \frac{\hbar^2}{|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'|^2} (2\pi)\delta(E - E') \cdot \left(\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)\right).$$

In dieser Formel ist Ze die Kernladung, $p = (E, \boldsymbol{p})$ (analog für p'), und

$$u(p) = (\not{p} + m)\, u_0/\sqrt{2m(m + E)}$$

ist der Spinor des einlaufenden Elektrons mit 4-Impuls p, $\bar{u}(p') = u^\dagger(p')\gamma^0$ ist der adjungierte Spinor des auslaufenden Elektrons. Für Spinprojektion $s = 1/2$ ist $u_0 = (1, 0, 0, 0)^t$, für $s = -1/2$ ist $u_0 = (0, 1, 0, 0)^t$. Paarerzeugung tritt nicht auf.

Nun sei der einfallende Elektronenstrahl parallel zur x-Achse gerichtet und zu 90 Prozent transversal polarisiert, d. h. 90 Prozent der Elektronen seien in $+z$-Richtung senkrecht zur Einfallsrichtung polarisiert und 10 Prozent in $-z$-Richtung.

Damit ist der Polarisationsgrad $(90 - 10)/(90 + 10) = 0.8$. Somit ergibt sich für die S-Matrixelemente (erste Zeile/Spalte: Spin $-1/2$, zweite: $+1/2$) der *Elektronen*streuung

$$(\langle\boldsymbol{p}'\sigma'|\, S\, |\boldsymbol{p}\sigma\rangle)_{\sigma\sigma'} = R \cdot \frac{1}{2m(m + E)} \begin{pmatrix} (m + E)^2 + p_x p'_x - i p_x p'_y & p_x p'_z \\ -p_x p'_z & (m + E)^2 + p_x p'_x + i p_x p'_y \end{pmatrix}$$

mit

$$R = 4\pi i \frac{Ze^2}{V} \cdot \frac{m}{\sqrt{EE'}} \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{p}'^2|} \cdot 2\pi \cdot \delta(E' - E)$$

und

$$p'_x = p' \cos\phi \cos\theta, \qquad p'_y = p' \sin\phi \cos\theta, \qquad p'_z = p' \sin\theta \qquad \text{mit } p' = |\boldsymbol{p}'|\,.$$

Folglich ergibt sich ein differen**t**ieller Wirkungsquerschnitt der Form

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} (\theta, s) = \frac{Z^2\alpha^2}{4E^2 v^4 \sin^4(\frac{\theta}{2})} (1 - s \sin\phi S(\theta))$$

mit $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ (Sommerfeld-Feinstrukturkonstante) und der *Sherman*-Funktion $S(\theta)$.

1) Geben Sie die Dichtematrix W_{in} fuer das Ensemble der Elektronen vor der Streuung an.

2) Berechnen Sie die Dichtematrix W_{out} nach der Streuung. Beachten Sie, dass W_{out} sowohl vom Streuwinkel (θ, ϕ) als auch von der Spinorientierung abhaengt.

   Bestimmen Sie dazu zunächst, wie die Dichtematrix nach der Streuung mit der vor der Streuung zusammenhängt. Genügt die Kenntnis der differentiellen Streuquerschnitte?

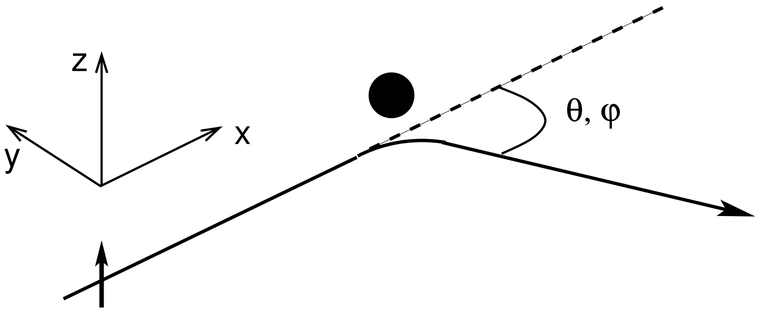
3) Geben Sie mit Hilfe von W_{out} nun explizit den Polarisationsgrad der Elektronen an, die in den Winkel (θ, ϕ) gestreut werden.

Hinweis: Die Dirac-Matrizen sind

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix},$$

wobei jeder Eintrag eine 2×2-Matrix bedeutet und $\boldsymbol{\sigma}$ die Pauli-Matrizen sind:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



11.3 Räumliche Korrelationen im Bose- bzw. Fermi-System (für Liebhaber :-))

Wir betrachten ein System von zwei freien, identischen Teilchen mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}.$$

1) Die Teilchen seien in Impulszuständen mit p_1, p_2. Geben Sie die Zwei-Teilchen-Wellenfunktion in Ortsdarstellung $\Psi_{p_1,p_2}(r_1, r_2) = \langle r_1 r_2 | p_1 p_2 \rangle$ an für den Fall, daß es sich a) um Bosonen und b) um Fermionen handelt.

2) Das Matrixelement des Dichteoperators

$$W(r_1, r_2) = \langle r_1 r_2 | \hat{W} | r_1 r_2 \rangle$$

   gibt die Wahrscheinlichkeit an, die Teilchen an den Orten r_1 und r_2 zu finden. Berechnen Sie $W(r_1, r_2)$ für den Fall, daß sich die Teilchen im thermodynamischen Gleichgewicht befinden, d.h. $W = e^{-\beta H}$. Betrachten Sie jeweils wieder den Fall von Bosonen und von Fermionen.
   Hinweis: Berechnen Sie das Matrixelement in Impulsdarstellung. Der Ortseigenzustand $|r_1 r_2\rangle$ ist z.B. in Impulsdarstellung: $\Psi_{r_1,r_2}(p_1, p_2) = \langle p_1 p_2 | r_1 r_2 \rangle$.

3) Skizzieren Sie $W(|r_1 - r_2|)$. Das Ergebnis kann so interpretiert werden, daß auf Grund ihrer Statistik Fermionen eine effektive Abstoßung, Bosonen eine effektive Anziehung haben.

Viel Spaß!