Übungsblatt 2

Besprechung: 24. April - 28. April

Aufgabe 2.1 Ideales Gas

Ist die Entropie eines Systems als Funktion der extensiven Zustandsgrößen aufgrund einer mikroskopischen Theorie bekannt, so können mit Hilfe der thermodynamischen Fundamentalbeziehung die Zustandsgleichungen explizit angegeben werden (vgl. Vorlesung). Hier soll der umgekehrte Weg betrachtet werden:
Für ein ideales Gas seien die beiden Zustandsgleichungen

$$U = \frac{f}{2} N k_B T, \qquad pV = N k_B T$$

experimentell gegeben, wobei k_B die Boltzmann–Konstante und f die Zahl der Freiheitsgrade pro Molekül bezeichnen (für ein einatomiges ideales Gas ist z.B. $f = 3$). Damit sollen verschiedene thermodynamische Relationen und die Entropie hergeleitet werden.

a) Zeigen Sie, daß bei einer adiabatischen Zustandsänderung ($\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} = 0$) mit konstanter Teilchenzahl N gilt

$$pV^{(f+2)/f} = const. \qquad \text{und} \qquad VT^{f/2} = const.$$

Gehen Sie hierzu jeweils von der differentiellen Form der Fundamentalbeziehung $\mathrm{d}S = (1/T)\mathrm{d}U + (p/T)\mathrm{d}V - (\mu/T)\mathrm{d}N$ aus und eliminieren Sie die Unbekannten.

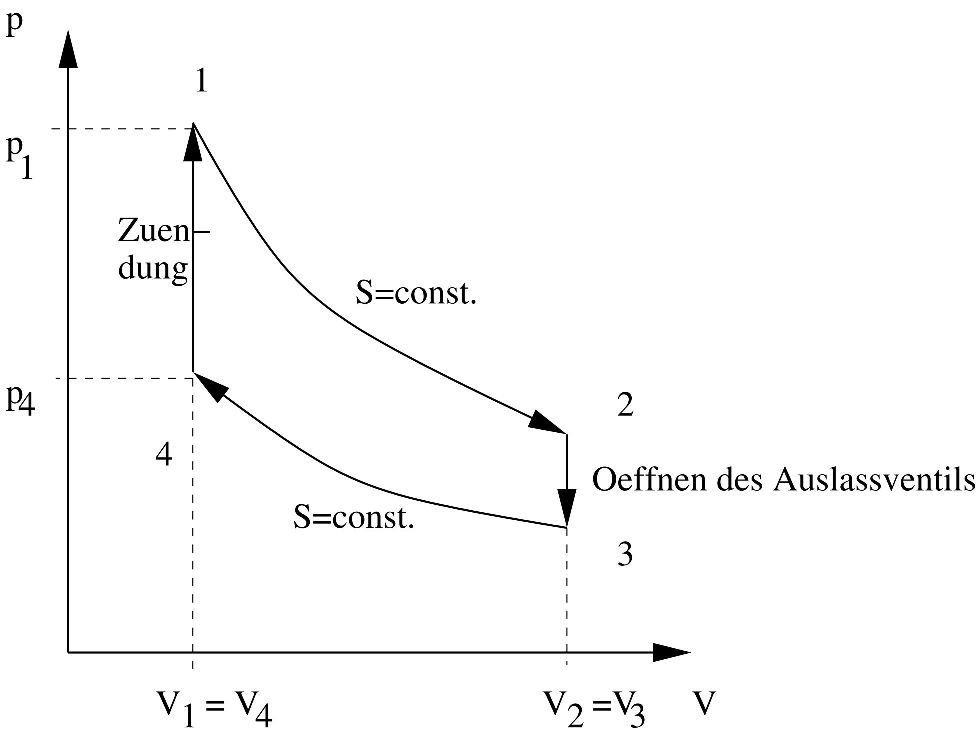
b) Zeigen Sie, daß die Entropie des idealen Gases gegeben ist durch

$$S(U, V, N) = S_o \frac{N}{N_o} + N k_B \Big[\frac{f}{2} \ln\Big(\frac{U}{U_o}\Big) + \ln\Big(\frac{V}{V_o}\Big) - \frac{f+2}{2} \ln\Big(\frac{N}{N_o}\Big)\Big],$$

wobei S_o, U_o, V_o, N_o Integrationskonstanten sind.
(Hinweis: Integrieren Sie die Gleichung $\mathrm{d}s = (1/T)\mathrm{d}u + (p/T)\mathrm{d}v$, mit $s = S/N$, $u = U/N$, $v = V/N$. Wie ergibt sich diese Gleichung aus der thermodynamischen Fundamentalbeziehung?)

Aufgabe 2.2 Otto-Motor

Ein Otto–Verbrennungsmotor wird idealisiert durch den gezeigten Kreisprozeß beschrieben. Die Füllung des Zylinders mit Benzin–Luft–Gemisch erfolgt bei Punkt 3. Als Arbeitssubstanz soll ein ideales Gas angenommen werden. Berechnen Sie den Wirkungsgrad $\eta = \Delta W/\Delta Q_{23}$ in Abhängigkeit vom Verdichtungsverhältnis $\epsilon = V_1/V_2$.



Aufgabe 2.3 Thermodynamische Potentiale und Legendre Transformationen

Sei $f(x_1, ..., x_n)$ eine Funktion von n Variablen x_i, $i = 1, \cdots, n$. Bei der Legendre-Transformation ersetzt man die Variable x_i durch die Variable $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Die Legendre-Transformierte ist dann $f - y_i x_i$.

a) Sei $f(x) = a + bx^2$, $g(x) = -\frac{1}{x}$, $x > 0$. Berechne die Legendre-Transformierte von f und g. Zeigen sie, daß die Legendre-Transformation involutiv ist.

b) Sei $U(S, V, N)$ die innere Energie eines Systems. Die thermodynamischen Potentiale $H(S, P, N)$ (Enthalpie), $F = F(T, V, N)$ (freie Energie), $G(T, P, N)$ (Gibbsche Enthalpie) lassen sich als Legendre-Transformierte von U bezüglich S, V, S und V, respektive ausdrücken. Berechne diese Legendre-Transformierten und gebe die Beziehungen zwischen U, H, F und G.

c) Die innere Energie ist eine extensive Größe. Sind die anderen thermodynamischen Potentiale auch extensiv?