Vorlesung Theoretische Physik IV - SS 2005 - Prof. H. Kroha

M.-A. Lawn http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_SS05/

Übungsblatt 3

Besprechung: 2. Mai - 6. Mai

3.1 Wärmekapazitäten

Die Wärmekapazität eines Systems ist definiert als $C_X = T\left(\partial S/\partial T\right)_X$, wo X für P oder V steht. Zeige unter Verwendung der MAXWELL-Relationen, dass

$$C_V = C_P + T\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right)^2 .$$

Hinweis: Hilfreich sind die Regeln für Funktionaldeterminanten, insbesondere $\partial(u,v)/\partial(x,v) = \left(\partial u/\partial x\right)_v$ sowie die Kettenregel.

3.2 Thermodynamische Beziehungen in einem magnetischen System

Betrachen Sie ein magnetisches System, das durch die Entropie S, die Temperatur T, die Magnetisierung M und ein äußeres Magnetfeld B bestimmt ist. Seine Eigenschaften werden durch die thermodynamischen Antwortfunktionen beschrieben: die spezifischen Wärmen bei konstanter Magnetisierung bzw. bei konstantem Magnetfeld, $c_M = T(\partial S/\partial T)_M$, $c_B = T(\partial S/\partial T)_B$, die Isotherme ($dT = 0$) und die Adiabatische ($\delta S = 0$) Suszeptibilität, $\chi_T = (\partial M/\partial B)_T$, $\chi_S = (\partial M/\partial B)_S$, sowie den Temperaturkoeffizienten der Magnetisierung $\alpha_B = (\partial M/\partial T)_B$.
Zeigen Sie, daß die folgenden Zusammenhänge gelten:

a) $\frac{c_B}{c_M} = \frac{\chi_T}{\chi_S}$
(Hinweis: Drücken Sie c_B und c_M allein durch thermodynamische Ableitungen von B bzw. M aus, indem Sie bei c_B $dB = 0$ und bei c_M $dM = 0$ ausnutzen, und ordnen Sie dann die Terme im Verhältnis c_B/c_M geeignet um.)

b) $c_B - c_M = T\frac{\alpha_B^2}{\chi_T}$
(Hinweis: Führen Sie c_B mit Hilfe der Kettenregel auf c_M zurück und verwenden Sie dann die Maxwellrelationen für S, T, und B, M.)

3.3 Adiabatische Zustandsgleichung eines idealen Gases (die zweite)

Für ein ideales Gas gilt: $pV = nRT$ und $c_V = T(\partial S/\partial T)_V = \frac{f}{2}nR = Const.$

a) Zeigen Sie, daß $dU = c_V dT$, und berechnen sie die innere Energie $U(T,V)$ und die Entropie $S(T,V)$.

b) Zeigen Sie, dass die adiabatische ($S = Const$) Zustandsgleichung bei konstanter Teilchenanzahl durch $pV^\gamma = Const$ gegeben ist.

c) Betrachten Sie eine Mischung zweier idealer Gase (1 und 2) mit molaren Verhältnis $x_1 : x_2$. Zeigen Sie, dass der Exponent γ für die Mischung durch

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \frac{x_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{x_2}{\gamma_2 - 1}$$

gegeben ist.

3.4 Zur Wahrscheinlichkeitstheorie: Zentraler Grenzwertsatz

Eine Zufallsgröße X kann die Werte $x \in M$ mit einer Wahrscheinlichkeit $p(x)$ annehmen. (M heißt Ereignisraum des Zufallsexperiments.) Die Zufallsgröße X werde nun N-mal unabhängig gezogen, wobei der Mittelwert der gezogenen Werte eine neue Zufallgröße Y definiert:

$$Y : y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Wir wollen die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y, $P_N(y)$, im Grenzfall $N \to \infty$ bestimmen.

a) Zunächst sei N fest. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$? Geben Sie formal die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_N(y)$ mit Hilfe der $p(x_i)$ an.

Es ist nützlich die charakteristische Funktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$ zu definieren als

$$\phi(k) = \int e^{ik(x - \langle x \rangle)} p(x) dx.$$

Sie hängt mit der Fouriertransformierten von $p(x)$ zusammen.

b) Zeigen Sie, daß die charakterische Funktion von $P_N(y)$ gegeben ist durch

$$\Phi_N(k) = \int e^{i\frac{k}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \langle x \rangle)} p(x_1)p(x_2)\ldots p(x_N) dx_1 dx_2 \ldots dx_N = [\phi(\frac{k}{N})]^N.$$

c) Zeigen Sie nun unter der Voraussetzung, daß alle Momente (siehe unten) der Verteilung $p(x)$ existieren, daß im Grenzfall $N \to \infty$

$$\Phi_N(k) \to e^{-\frac{\sigma^2}{2N}k^2}.$$

Entwickeln Sie hierzu nach k/N. Bestimmen Sie damit schließlich die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\overline{P}(y) = \lim_{N \to \infty} P_N(y).$$

Definition: n-tes Moment einer Verteilung $p(x)$: $\langle x^n \rangle := \int x^n p(x) dx$.

Viel Spaß!