Übungsblatt 5

Besprechung: 23. Mai - 27. Mai

5.1 Zustandsdichte

Wir betrachten ein quantenmechanisches Teilchen in einem d-dimensionalen Kasten der Kantenlänge L, für das die Energie-Impuls-Beziehung $\varepsilon(p)$ besteht. Die Zustandsdichte $\mathcal{N}(\varepsilon)$ ist definiert als $\mathcal{N}(\varepsilon)=\int d^dp\ \delta(\varepsilon-\varepsilon(p))$. Es sei nun $\varepsilon(p)=\alpha p^n$. Bestimmen $\mathcal{N}(\varepsilon)$ für Dimensionen $d=1,2,3$. Es ist z.B.

a) $\varepsilon(p)=\frac{p^2}{2m}$ für Elektronen und

b) $\varepsilon(p)=cp$ für Photonen.

Geben Sie $\mathcal{N}(\varepsilon)$ für diese beiden Fälle explizit an und beachten Sie die Dimensionsabhängigkeit.

5.2 Polymer-Modell (Gummi)

Zur idealisierten Beschreibung der Eigenschaften eines Polymers soll angenommen werden, das System bestünde aus einer linearen Kette mit N Gliedern, die jeweils einen leicht knickbaren Abschnitt aufweisen. Die mikroskopischen Eigenschaften der Kette seien folgendermaßen charakterisiert:

a) Auf die Kette wirke eine feste *äußere* Kraft K. Zeigen Sie, daß die Zustandssumme durch folgende Gleichung gegeben ist

$$Z(\beta,N,K)=\sum_{\{\text{Zustände}\}} e^{-\beta(E+KL)}$$

und berechnen Sie sie explizit. (**Anmerkung**: Der Term KL entspricht dem bekannten Term $-pV$ bei dreidimensionalen Systemen.)
Bestimmen Sie die freie Enthalpie $G=-kT\ln Z$ und hieraus die (mittlere) Länge $L=-\frac{\partial G}{\partial K}$ der Kette. Woher kommt diese Formel? Welches Vorzeichen hat der thermische Ausdehnungskoeffizient $\alpha=\frac{\partial L}{\partial T}$, falls $\epsilon_- < \epsilon_\wedge$ und $K=0$?

b) Bestimmen Sie für festgehaltene Länge L die Zustandssumme

$$Z(\beta,N,K)=\sum_{\{\text{Zustände}\}} e^{-\beta E}.$$

Beachten Sie, daß L festgelegt ist durch N und die Zahl der geknickten Glieder $n_\wedge$, so daß nun nicht uneingeschränkt über alle Mikrozustände summiert wird. Wie erhält man die Kraft $K(T,N,L)$ aus der freien Energie F, die die Kette bei gegebener Temperatur T ausübt? Berechnen Sie $K(T,N,L)$.

5.3 Paramagnetismus

Wir betrachten ein System von N nichtwechselwirkenden Spins mit Spinquanten J $(m = -J, \cdot, +J)$ mit magnetischem Moment μ_0 in einem Magnetfeld B.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K. Zeigen Sie, daß sie in die Einteilchen-Zustandssummen faktorisiert und bestimmen Sie daraus die freie Energie $F(T)$.

b) Berechnen Sie die Magnetisierung für gegebenes J in Abhängigkeit von der Temperatur.

Ergebnis:
$$M = N\mu_0 J B_J(x), \qquad x = J\mu_0 B/kT,$$
$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J}\coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J}\coth\left(\frac{1}{2J}\right).$$

(Brillouin-Funktion)
Skizzieren Sie $M(B/T)$ für $J = \frac{3}{2}$.

5.4 Energiefluktuationen im kanonischen Ensemble

Zeigen Sie, daß für ein System im kanonischen Ensemble (Ankopplung an ein Reservoir mit Energieaustausch) die Schwankungen der Energie gegeben sind durch $\langle(\Delta E)^2\rangle = kT^2(\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T})$, indem Sie die Mittelwerte mit Hilfe der kanonischen Zustandssumme berechnen. Stellen Sie den Zusammenhang mit der Wärmekapazität C_V her. Wie hängen die Fluktuationen bezogen auf die Systemgröße N, $\sqrt{\langle(\Delta E)^2\rangle}/N$, von N ab? Was folgt daraus für die Anwendbarkeit von mikrokanonischem und kanonischem Formalismus?

Viel Spaß!