Übungsblatt 6

Besprechung: 30. Mai – 4. Juni

6.1 Ensemble-Vergleich

Wir betrachten ein System aus N wechselwirkungsfreien Spins mit Spinprojektion $s_i^z = \pm 1$ und HAMILTON-Operator

$$H = -2\mu_{\rm B} B \sum_i s_i^z.$$

1. *Mikrokanonisch:* Erinnern Sie sich an die mikrokanonische Verteilung aus der Vorlesung. Berechnen Sie daraus die Entropie $S(E,N)$, die Temperatur $T(E,N)$, die Energie $E(N,T)$ und das chemische Potential $\mu(N,T)$.

   Tip: Verwenden Sie die STIRLING-Formel $\ln n! \approx n \ln n - n$.

2. *Kanonisch:* Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_{\rm c}$ und daraus die Energie E für große N. Vergleichen Sie mit dem mikrokanonischen Ergebnis.

3. *Großkanonisch:* Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme $Z_{\rm g}$ und hieraus die Teilchenzahl N bzw. das chemische Potential μ für große N. Vergleichen Sie auch hier mit dem mikrokanonischen Ergebnis.

4. Aus der kanonischen Zustandssumme berechnen Sie nun die Entropie, $S(T,N) = -\left(\partial F/\partial T\right)_N$, die Wärmekapazität $C(T,N) = \left(\partial U/\partial T\right)_N$, die Magnetisierung $M(T,N) = 2\mu_{\rm B}\left\langle \sum_i s_i^z \right\rangle$ und die Suszeptibilität $\chi(T,N) = \left(\partial M/\partial B\right)_T$. Was passiert für die Grenzübergänge $T \to 0$, $T \to \infty$? Was kann man daraus für das Verhalten der Wärmekapazität dazwischen schließen (SCHOTTKY-Anomalie; Skizze!)?

6.2 Negative Temperatur

Wir betrachten wieder das Spinsystem aus der vorhergehenden Aufgabe.

1. Skizzieren Sie die in 6.1.1 ausgerechnete Temperatur $T(E,N)$ und die Entropie $S(T,N)$ als Funktionen der Energie, und diskutieren Sie das Ergebnis. Sind negative Temperaturen auch sinnvoll? Was bedeuten sie für die Ausrichtung der Spins?

2. Nun betrachten wir zwei Systeme, zwischen denen Wärmeaustausch möglich ist; mit den Temperaturen $T_1 > 0$ bzw. $T_2 < 0$.

   Berechnen Sie die Änderung der Entropie im Verlauf der Zeit: was kann man daraus über den Wärmeaustausch aussagen?

6.3 Korrelationsfunktionen und Spinfluktuation

Wieder betrachten wir das Spinsystem aus der ersten Aufgabe im mikrokanonischen Ensemble. Die Korrelationsfunktion zweier Spins an den Orten i und j ist gegeben durch $\left\langle s_i^z s_j^z \right\rangle$.

Berechne die Korrelationsfunktion und die Spinfluktuation $\left\langle \left(s_i^z - \langle s_i^z \rangle\right)^2 \right\rangle$.

Tip:

$$\left\langle s_i^z s_j^z \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \left(s_i^z + s_j^z\right)^2 \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle (s_i^z)^2 \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \left(s_j^z\right)^2 \right\rangle .$$

6.4 Kühlung durch adiabatische Entmagnetisierung

Gegeben sei ein Spinsystem im äußeren Magnetfeld B_1 und bei der Temperatur T_1. Dieses wird wärmeisoliert und der Wert des äußeren Magnetfeldes adiabatisch auf B_2 reguliert.

Was ist die Temperatur T_2 nach diesem Prozess?

1. Diskutieren Sie, ob das Spinsystem im Verlaufe der Änderung des Magnetfeldes im Gleichgewicht verbleibt.

   Überlegen Sie sich die Bedingung an die Entropie, die B_2 und T_2 im Verhältnis zu B_1 und T_1 erfüllen müssen.

2. Verwenden Sie die Entropie aus Aufgabe 6.1.1.

3. Stellen Sie fest, dass S nur von B/T abhängt, nicht von B und T einzeln. Was folgt daraus, wenn man B_2 adiabatisch variiert?

4. $S(B/T)$ ist injektiv (warum?). Bestimmen Sie T_2 daraus.

   Wie muss man B_2 wählen, damit $T_2 < T_1$ gilt? Was folgt im Falle $B_2 = -B_1$?

5. Wir überlegen nun, wie man mit Hilfe des Spinsystems ein zweites System, genannt „die Umgebung“, kühlen kann. Diese Umgebung habe eine temperaturunabhängige Wärmekapazität C_V^{U}. Beide Systeme befinden sich anfänglich im Gleichgewicht bei der Temperatur T_1, das Spinsystem im Magnetfeld B_1. Nach der Entmagnetisierung stellt sich zwischen Spinsystem und Umgebung ein neues Gleichgewicht ein. Berechnen Sie die hierbei ausgetauschte Wärme ΔQ sowie die Endtemperatur T'.

   Tip: Nehmen Sie an, dass $\Delta' := g\mu_{\mathrm{B}} B_2 \ll k_{\mathrm{B}} T$ ist, und nähern Sie die spezifische Wärme des Spinsystems entsprechend.

Viel Spaß!