Übungsblatt 8

Besprechung: 13. Juni - 17. Juni

8.1 Modell für weiße Zwerge

Als weißen Zwerg bezeichnet man einen sehr alten Stern in einer der möglichen Endphasen eines Sternenlebens. In einem einfachen Modell besteht er aus einem nichtwechselwirkenden Elektronengas und einem Ionenhintergrund, der nur für die Ladungsneutralität und den Zusammenhalt des Sterns durch Gravitation sorgt. Die Elektronendichte beträgt typischerweise $n = 10^{30}/\mathrm{cm}^3$ und die Masse $M = 10^{30}\mathrm{kg}$. Wegen der hohen Dichte bewegt sich ein großer Anteil der Elektronen relativistisch, d.h. es gilt die Energie-Impuls-Beziehung $\varepsilon(p) = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$.

1) Berechnen Sie den Fermi-Impuls p_F des Elektronengases in Abhängigkeit von der Elektronendichte n. Schätzen Sie ab, oberhalb welcher Dichte n sich die Elektronen an der Fermikante relativistisch bewegen, d.h. $p_\mathrm{F} > mc$.

2) Die Temperatur eines weißen Zwergs beträgt etwa 10^7K. Berechnen Sie die Fermi-Energie ε_F des Elektronensystems für die oben angegebene Dichte des Elektronengases und zeigen Sie $\varepsilon_\mathrm{F} \gg mc$. Es kann deshalb bei $T = 0$ gerechnet werden!

3) Berechnen Sie die innere Energie U in Abhängigkeit vom Radius R des weißen Zwergs a) im nichtrelativistischen Fall ($p_\mathrm{F} \ll mc$) und b) im ultrarelativistischen Fall ($p_\mathrm{F} \gg mc$). Verwenden Sie dabei die Energie-Impuls-Beziehungen

$$\varepsilon(p) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \quad \text{(nichtrelativistisch)}$$

$$\varepsilon(p) = cp \quad \text{(ultrarelativistisch)}.$$

4) Geben Sie den Druck $P = -(\partial U/\partial V)_N$ des Elektronensystems an ('Pauli-Druck').

5) Betrachten Sie nun die Gesamtenergie $E(R) = U + E_{grav}$ des Sterns, mit $E_{grav} = -GM^2/R$. Skizzieren Sie in einem Diagramm $E(R)$ für kleinen ($\rightarrow$ ultrarelativistisch) und für großen ($\rightarrow$ nichtrelativistisch) Sternradius. Was ist (qualitativ) die Bedingung an $E(R)$, daß ein Radius R existiert, bei dem der Stern stabil ist? Zeigen Sie, daß der weiße Zwerg für Massen M größer als eine kritische Masse M_c nicht stabil sein kann. Der Stern stürzt dann in sich zusammen und bildet einen Neutronenstern oder ein schwarzes Loch. Bestimmen Sie M_c (Chandrasekhar-Masse).

8.2 Landau- Diamagnetismus

1) Betrachten Sie ein System von geladenen spinlosen Teilchen (Ladung e), die der *klassischen* Mechanik und der *klassischen* Statistik gehorchen. Wie lautet die kinetische Energie eines Teilchens in einem angelegten äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$? Zeigen Sie, daß die Zustandssumme des Systems unabhängig von $\mathbf{B}$ ist, d.h., daß die magnetische Suszeptibilität exakt gleich null ist (Bohr-van Leeuwen-Theorem). Dies bedeutet, daß es klassisch keinen Magnetismus geben kann.

Als Landau-Diamagnetismus bezeichnet man den Magnetismus, der sich aus der Quantisierung der Bahnbewegung der Elektronen in einem magnetischen Feld ergibt. Wir betrachten nun quantenmechanisch ein System von Elektronen in einem Kasten der Seitenlänge $L_x,\ L_y,\ L_z$ in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$ entlang der $z-$Achse. Der Elektronenspin würde zum Pauli-Paramagnetismus führen und soll hier nicht berücksichtige werden. Wählen Sie die Eichung $\mathbf{A} = B(0, x, 0)$.

2) Zeigen Sie, daß die Bewegung in der $x-y-$Ebene einem eindimensionalen harmonischen Oszillator entspricht und geben Sie die Energieniveaus an. Beachten Sie, daß die Bewegung in der $z-$Richtung frei ist. Die Oszillatorenniveaus im Magnetfeld heißen Landau-Niveaus. Bestimmen Sie den Entartungsgrad eines Landau-Niveaus mit Hilfe der Tatsache, daß der Impuls p_y in dem Kasten quantisiert ist.

3) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme Z_G des Systems für hohe Temperaturen $k_{\mathrm{B}}T \gg$ Fermi-Energie ($\rightarrow$ Boltzmann-Statistik). Bestimmen Sie daraus die mittlere Teilchenzahl in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ und der Temperatur T und berechnen Sie das magnetische Moment M. Wie lautet der Ausdruck für M im Grenzfall eines schwachen Magnetfeldes, $\mu_0 B \ll k_{\mathrm{B}}T$ ($\mu_0 =$ Bohrsches Magneton)?

8.3 Elektronengas

Man betrachte ein Elektronengas ohne Wechselwirkung (z.B. Leitungselektronen in Metallen) in einem zweidimensionalen Kasten der Kantenlänge L.

1) Berechnen Sie die Teilchendichte und das chemische Potential als Funktion der Temperatur.

2) Welchen Fermi-Druck besitzt das zweidimensionale Elektronensystem bei $T = 0$?

Viel Spaß!