Universität Bonn 14.12.2010
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, K. Ballmann, R. Katzer
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_WS10/

Theoretische Physik IV — WS 2010/11

Übungsblatt 10

(Abgabe am 21. Dezember, Besprechung vom 21. bis 23. Dezember)

10.1 Bose-Einstein-Kondensation (15 Punkte)

In der Vorlesung wurde das Phänomen der Bose-Einstein-Kondensation (BEC) behandelt. Experimentell ist es erst 1995 gelungen, BEC an einem realen System von (fast) nicht wechselwirkenden Atomen zu beobachten. Dabei wurde mit Hilfe elektromagnetischer Felder (Laser) ein dreidimensionales harmonisches Oszillatorpotential ("atomare Falle") erzeugt, in dem die Atome (Bosonen) eingefangen und dann abgekühlt wurden. Die Bewegung eines Atoms der Masse M in der Falle wird beschrieben durch den dreidimensionalen Oszillator

$$H = \frac{1}{2M}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}M\omega_0^2(x^2 + y^2 + z^2)\,,$$

mit Eigenfrequenz ω_0.

(a) Berechne den Entartungsgrad $\Omega(n)$, d.h. die Zahl der Eigenzustände mit Energie $E_n = \hbar\omega_0(n + \frac{3}{2})$ und daraus die Zustandsdichte $\rho(\epsilon_n)$, wobei $\epsilon_n = E_n - E_0$ die Anregungsenergie des Oszillators ist.

(b) Thermodynamischer Limes:
In einem quantenmechanischen System können nur Energien unterschieden werden, die sich um mehr als eine untere Schranke ΔE unterscheiden. Wodurch ist ΔE prinzipiell festgelegt? Welche Effekte können zusätzlich zu ΔE beitragen? Es ist deshalb nur sinnvoll, von Anregungsenergien über dem Grundzustand von mindestens ΔE zu sprechen. Wir wählen nun das Oszillatorpotential so flach, dass $\Delta E \gg \hbar\omega_0$. Dann ist die Zustandsdichte eine kontinuierliche Funktion. Bestimme $\rho(\epsilon)$ für diesen Grenzfall und gib einen Ausdruck für die Gesamtzahl N der Atome in der Falle an. Beachte, dass Grund- und angeregte Zustände unterschieden werden müssen.

(c) Berechne nun die BEC-Temperatur T_c in Abhängigkeit von N und ω_0. Wie groß ist die Besetzungszahl N_0 des Grundzustands bei $T < T_c$?

(d) Zur experimentellen Beobachtung des Kondensats:
Bei einem harmonischen Oszillator sind die Erwartungswerte von kinetischer und potentieller Energie in jedem Eigenzustand $|n\rangle$ gleich, also $\langle n|T|n\rangle = \langle n|V|n\rangle$. Berechne damit die mittlere quadratische Ausdehnung $\langle n|x^2 + y^2 + z^2|n\rangle$ der Wellenfunktion eines Atoms im Zustand $n = n_x + n_y + n_z$. Berechne dann die mittlere quadratische Ausdehnung des Systems von N Atomen bei $T < T_c$.

(e) Berechne zum Vergleich die mittlere quadratische Ausdehung des Systems unter der Annahme, dass die Atome nicht der Bose-Einstein- sondern der Boltzmann-Statistik gehorchen.

Hinweis:
$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^k}{e^{\beta x}-1} = \frac{1}{\beta^{k+1}}\Gamma(k+1)\zeta(k+1)$$

10.2 Spin-Präzession im inhomogenen Magnetfeld (15 Punkte)

Wir betrachten ein System aus N nicht miteinander wechselwirkenden Spins ($S = 1/2$) im äußeren Magnetfeld $\mathbf{B}$,
$$\hat{H} = -g\mu \sum_{i=1}^{N} \mathbf{B}(\mathbf{r_i}) \cdot \hat{\mathbf{S}}^i.$$

Für $t < 0$ wirke ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B} = (B_x, 0, 0)$ auf das System, das sich im thermodynamischen Gleichgewicht befinde. Zur Zeit $t = 0$ werde das Magnetfeld in z-Richtung umgeklappt, wobei nun die Feldstärke von den Positionen der einzelnen Spins abhängt, $\mathbf{B}(\mathbf{r_i}) = (0, 0, B_z^i)$. Die B_z^i seien dabei gleichmäßig über das Intervall $[B_0 - \Delta/2, B_0 + \Delta/2]$ mit $B_0 > \Delta$ verteilt, folgen also der Verteilung $p(B) = \theta(\Delta/2 - |B - B_0|)/\Delta$.

(a) Bestimme die Eigenzustände des Spinoperators in x-Richtung $\hat{S}_x$ in der Eigenbasis von $\hat{S}_z$. Benutze dazu die Matrixdarstellung $\hat{S}_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ mit den Pauli-Matrizen σ_i, $i = x, y, z$, und $|S_z, +\frac{1}{2}\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ sowie $|S_z, -\frac{1}{2}\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(b) Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Spin i zur Zeit $t \leq 0$ parallel oder antiparallel zur x-Richtung ausgerichtet ist, und bestimme daraus die Dichtematrix $\hat{W}^i(t = 0)$ für Spin i.

(c) Zeige, dass für $t \geq 0$ die Dichtematrix gegeben ist durch
$$\hat{W}^i(t) = \frac{1}{2}\left[\mathbb{1} + \tanh(\beta\mu B_x)\left(\sigma_x \cos(2\mu B_z^i t/\hbar) - \sigma_y \sin(2\mu B_z^i t/\hbar)\right)\right] \ .$$

Hinweis: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ und $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

(d) Bestimme die mittlere Magnetisierung des Gesamtsystems in x-Richtung $\langle M_x(t)\rangle$ für $N \gg 1$. Zeige, dass es sich dabei um eine abklingende Schwebung handelt und skizziere ihren zeitlichen Verlauf.