Universität Bonn 11.01.2011
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, K. Ballmann, R. Katzer
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_WS10/

Theoretische Physik IV — WS 2010/11

Übungsblatt 12

(Abgabe am 18. Januar, Besprechung vom 18. bis 20. Januar)

12.1 Ising-Modell (18 Punkte)

Der Hamilton-Operator des Ising-Modells mit äußerem Magnetfeld B ist gegeben durch

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu B \sum_i \sigma_i \,.$$

σ_i bezeichnet die z-Komponente des Spins am Gitterplatz i und kann die Werte $\pm\frac{1}{2}$ annehmen. Summiert wird über alle N Gitterplätze i. $\langle i,j \rangle$ im ersten Term bedeutet, dass j nur jeweils über die q nächsten Nachbarn von i summiert wird, wobei q von der Art des Gitters abhängt.

(a) **Molekularfeld-Näherung**
Die Wechselwirkung eines Spins σ_i mit den nächsten Nachbarn wird durch das (noch zu bestimmende) mittlere Feld $\langle\sigma\rangle$ der anderen Spins ersetzt:

$$\hat{H}_{MF} = \sum_i \hat{H}_{i,MF} = -\sum_i \left(Jq\langle\sigma\rangle + \mu B\right)\sigma_i$$

Berechne in dieser Näherung die Zustandssumme Z_C und zeige anschließend, dass der mittlere Spin $\langle\sigma\rangle$ pro Gitterplatz durch die selbstkonsistente Gleichung

$$\langle\sigma\rangle = \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2}\beta(Jq\langle\sigma\rangle + \mu B)\right]$$

bestimmt ist. Diskutiere diese transzendente Gleichung für $B = 0$ graphisch. Was ergibt sich daraus für die kritische Temperatur T_c, bei der ein Phasenübergang vom paramagnetischen ($\langle\sigma\rangle = 0$ für $T > T_c$) zum ferromagnetischen Zustand mit spontaner Magnetisierung ($\langle\sigma\rangle \neq 0$ für $T < T_c$ und $B = 0$) auftritt?

(b) **Bethe-Näherung**
Nun wird die Wechselwirkung zwischen einem beliebigen zentralen Spin σ_0 mit seinen q nächsten Nachbarn exakt behandelt, während die Wechselwirkung zwischen diesen q Nachbarn und den weiteren Spins des Gitters durch ein mittleres Feld B' näherungsweise beschrieben wird:

$$\hat{H}_{Bethe} = -\mu B\sigma_0 - \mu(B + B')\sum_{j=1}^{q}\sigma_j - J\sum_{j=1}^{q}\sigma_0\sigma_j$$

Zeige analog zu Aufgabenteil (a) mit Hilfe der Zustandssumme Z_C, dass

$$\langle\sigma_j\rangle = \left\langle \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\sigma_j \right\rangle = \frac{1}{2\widetilde{Z}_C}\left[e^{\beta\mu B/2}\cosh^{q-1}(\alpha_+)\sinh(\alpha_+) + e^{-\beta\mu B/2}\cosh^{q-1}(\alpha_-)\sinh(\alpha_-)\right]$$

und

$$\langle\sigma_0\rangle = \frac{1}{2\widetilde{Z}_C}\left[e^{\beta\mu B/2}\cosh^q(\alpha_+) - e^{-\beta\mu B/2}\cosh^q(\alpha_-)\right],$$

wobei $Z_C = 2^q\widetilde{Z}_C$ und $\alpha_\pm = \beta\mu(B+B')/2 \pm \beta J/4$. Da kein Gitterplatz vor den anderen ausgezeichnet ist, muss $\langle\sigma_0\rangle = \langle\sigma_j\rangle$ gelten. Durch diese Gleichung erhält man wiederum eine transzendente Gleichung für B'. Bestimme daraus T_c, indem du $B = 0$ setzt, die Gleichung für den Grenzfall $B' \to 0$ betrachtest (Warum?) und zur 1. Ordnung in B' entwickelst. Zeige schließlich, dass man für $q \to \infty$ dasselbe Ergebnis erhält wie in (a).

12.2 Dispersion von Spinwellen (Magnonen) (12 Punkte)

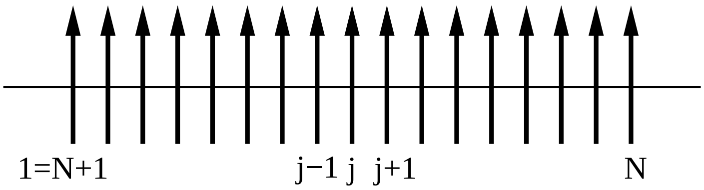

Abbildung 1: Kette von N Spins

Während beim Ising-Modell nur die z-Komponente des Spins betrachtet wird, wollen wir nun den Spin $\mathbf{S}_j$ am Ort j als einen **klassischen** Vektor der Länge S auffassen. Eine Kette von Spins (vgl. Abbildung 1) mit ferromagnetischer Nächster-Nachbar-Wechselwirkung wird dann beschrieben durch die Hamilton-Funktion

$$H = -J\sum_{j=1}^{N}\mathbf{S}_j\cdot\mathbf{S}_{j+1}\,, \quad J > 0\,.$$

Die Gitterkonstante sei a.

(a) Der Spin am Gitterplatz j hat das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}_j = \mu_B\mathbf{S}_j$ und damit die Energie $-\boldsymbol{\mu}_j\cdot\mathbf{B}_j$ im Magnetfeld der beiden benachbarten Spins. Wie sieht folglich das von $\mathbf{S}_{j-1}$ und $\mathbf{S}_{j+1}$ am Ort j erzeugte Magnetfeld aus? Bestimme das Drehmoment $\boldsymbol{\mu}_j\times\mathbf{B}_j$ auf $\mathbf{S}_j$ und stelle die Bewegungsgleichung für $\mathbf{S}_j(t)$ in kartesischen Koordinaten auf.

(b) Im Grundzustand sind offensichtlich alle Spins parallel gerichtet, also $\mathbf{S}_j = (0,0,S)$ für $j = 1,\ldots,N$.
Die elementaren Anregungen sind Spinwellen. Betrachte im Folgenden kleine Auslenkungen aus dem Grundzustand: $\mathbf{S}_j(t) = (S_j^x(t), S_j^y(t), S)$. Die z-Komponente bleibt in linearer Ordnung im Auslenkungswinkel konstant gleich S.
Linearisiere die Bewegungsgleichungen!

(c) Löse die linearisierten Bewegungsgleichungen mit dem Ansatz für laufende Wellen:

$$S_j^x(t) = ue^{i(jka-\omega t)}\,, \quad S_j^y(t) = ve^{i(jka-\omega t)}\,, \quad S_j^z(t) = S$$

Bestimme so die Dispersionsrelation $\omega(k)$ für Spinwellen. Mache dir schließlich klar, dass es sich bei der Lösung um eine Kreispräzession eines jeden Spins um die z-Achse handelt.