Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, K. Ballmann, R. Katzer
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_WS10/

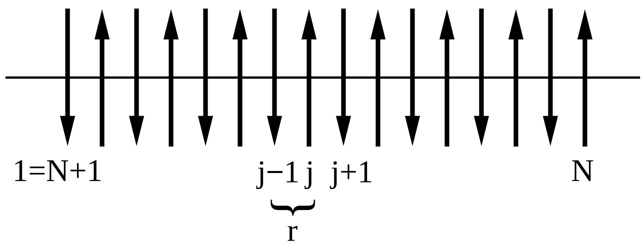
18.01.2011

Theoretische Physik IV — WS 2010/11

Übungsblatt 13

(Abgabe am 25. Januar, Besprechung vom 25. bis 27. Januar)

13.1 Antiferromagnetische Spinwellen (Magnonen) (15 Punkte)



Analog zu Aufgabe 12.2 betrachten wir eine Kette von klassischen Spinvektoren $\mathbf{S}_i$ der Länge S, die nun jedoch über eine antiferromagnetische Nächste-Nachbar-Wechselwirkung $J < 0$ miteinander gekoppelt sind,

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1} \ .$$

Die Gitterkonstante sei a. Im Grundzustand zeigen die Spins auf benachbarten Plätzen in entgegengesetzte Richtungen (siehe Abbildung). Nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass im Grundzustand der Spin auf geraden Plätzen in die positive z-Richtung zeigt. Da die Gesamtmagnetisierung des Grundzustandes Null ist, fasst man jeweils zwei benachbarte Spins zu einer Gitterzelle zusammen und wählt als Ordnungsparameter die sogenannte gestaffelte Magnetisierung (*staggered magnetization*), d.h. die Differenz der Spinvektoren auf benachbarten Plätzen $\mathbf{L}_r = \mathbf{S}_j - \mathbf{S}_{j-1}$, wobei $j = 2, 4, 6, ...$ und $r = j/2$. Der Gesamtspin einer Zelle ist $\mathbf{M}_r = \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_{j-1}$. Das Auftreten des neuen Ordnungsparamters führt gegenüber dem ferromagnetischen Fall zu einer grundlegend anderen Dispersionsrelation, die wir nun berechnen wollen.

(a) Schreibe wie in Aufgabe 12.2 die Bewegungsgleichung eines Spinvektors am Ort j bzw. $j-1$ in kartesischen Koordinaten auf und linearisiere diese.

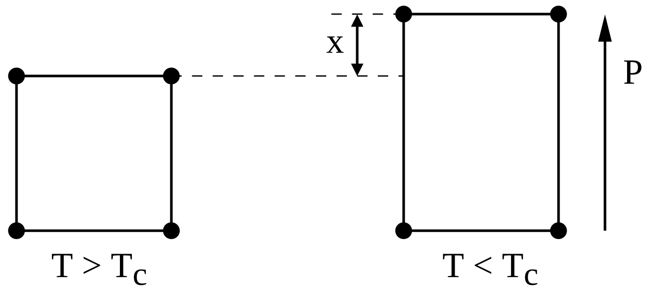
(b) Transformiere dieses Gleichungssystem auf die neuen Variablen $\mathbf{M}_r$ und $\mathbf{L}_r$.

(c) Löse die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{M}_r$ und $\mathbf{L}_r$ mit dem Ansatz für laufende Wellen

$$\begin{aligned} M_r^x(t) &= u_M e^{i(rka'-\omega t)} \,, \quad & M_r^y(t) &= v_M e^{i(rka'-\omega t)} \,, \quad & M_r^z(t) &= 0 \,, \\ L_r^x(t) &= u_L e^{i(rka'-\omega t)} \,, \quad & L_r^y(t) &= v_L e^{i(rka'-\omega t)} \,, \quad & L_r^z(t) &= 0 \,, \end{aligned}$$

wobei a' die Gitterkonstante des gestaffelten Gitters ist. Bestimme anschließend die Dispersionsrelation $\omega(k)$ und vergleiche mit dem Ergebnis für den ferromagnetischen Fall.

13.2 Ginzburg-Landau-Modell des ferroelektrischen Phasenübergangs (15 Punkte)



In Bariumtitanat bildet sich unterhalb einer Temperatur $T_c^{(0)}$ spontan eine elektrische Polarisation P. Dies wird phänomenologisch beschrieben durch die folgende Ginzburg-Landau-Entwicklung der freien Energie F:

$$F_0(T,P) = (T - T_c^{(0)})AP^2 + BP^4 + CP^6 \ , \quad \text{wobei } A, B, C > 0 \, .$$

Die Polarisation ist so stark, dass sie eine Verzerrung x des Gitters bewirkt (siehe Abbildung). Der Beitrag der Gitterverzerrung zur freien Energie ist gegeben durch

$$F_1(P,x) = DxP^2 + \frac{1}{2}Ex^2 \ ,$$

so dass $F(T,P,x) = F_0(T,P) + F_1(P,x)$. Der erste Term in F_1 beschreibt die (nichtlineare) Kopplung von P an die Gitterverzerrung x, der zweite ein harmonisches Rückstellpotential, dass die Stabilität des Gitters gewährleistet (P darf nur in geraden Potenzen auftreten, damit die gesamte freie Energie invariant unter Raumspiegelung ist). Um den Gleichgewichtszustand zu finden, muss F als Funktion von P und x minimiert werden.

(a) Wie lauten die Bedingungsgleichungen für die Extrema von $F(T,P,x)$ für ein vorgegebenes T? Eleminiere damit x und zeige so, dass sich die effektive freie Energie $\widetilde{F}$ schreiben lässt als

$$\widetilde{F}(T,P) = (T - T_c^{(0)})AP^2 + \widetilde{B}P^4 + CP^6 \, .$$

Zeige, dass $\widetilde{F}$ invariant unter Raumspiegelung ist. Wie groß muss die Kopplung D im Vergleich zur elastischen Konstante E sein, damit $\widetilde{B} < 0$ gilt?

(b) Bestimme für $\widetilde{B} < 0$ die Minima von $\widetilde{F}$ als Funktion von P. Zeige, dass unterhalb einer kritischen Temperatur $T_c^{(1)}$ Lösungen existieren, die nicht kontinuierlich aus $P = 0$ hervorgehen, und bestimme diese Temperatur. Skizziere schließlich $\widetilde{F}$ als Funktion von P für die Temperaturen

(i) $T > T_c^{(1)}$

(ii) $T_c^{(1)} > T > T_c^{(0)}$

(iii) $T_c^{(0)} > T$.

Die Polarisierung P springt also diskontinuierlich von 0 auf einen endlichen Wert, d.h. die Kopplung von P an das Gitter bewirkt einen Phasenübergang erster Ordnung.