Universität Bonn 23.11.2010
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, K. Ballmann, R. Katzer
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_WS10/

Theoretische Physik IV — WS 2010/11

Übungsblatt 7

(Abgabe am 30. November, Besprechung vom 30. November bis 2. Dezember)

7.1 Kühlung durch adiabatische Entmagnetisierung (9 Punkte)

In der Vorlesung wurde als Beispiel für ein 2-Niveausystem ein System aus N nicht miteinander wechselwirkenden Spins besprochen, die an ein äußeres Magnetfeld B koppeln,

$$H = -\mu B \sum_{i=1}^{N} s_i \text{ mit } s_i = \pm 1 \ .$$

Dabei ergab sich der Ausdruck

$$S(B,T) = N k_B \left[\ln\left(2\cosh\left(\frac{\mu_0 B}{k_b T}\right)\right) - \frac{\mu_0 B}{k_b T} \tanh\left(\frac{\mu_0 B}{k_b T}\right)\right]$$

für die Entropie S, sowie

$$C_B(T) = N k_B \left(\frac{\mu_0 B}{k_b T}\right)^2 \cosh^{-2}\left(\frac{\mu_0 B}{k_b T}\right)$$

für die Wärmekapazität bei konstantem Magnetfeld C_B.

(a) Das Spinsystem werde nun bei einer Magnetfeldstärke $B_1 > 0$ durch Kopplung an ein Wärmebad auf die Temperatur $T_1 > 0$ gebracht und anschließend wärmeisoliert. Ändert man nun das Magnetfeld auf einen neuen Wert $B_2 > 0$, so verläuft dieser Prozess adiabatisch. Was folgt daraus für die Entropie?

(b) Offensichtlich hängt die Entropie nur vom Verhältnis von Magnetfeld und Temperatur ab, $S(B,T) = S(B/T)$. Zeige, dass S als Funktion von $|B/T|$ injektiv ist. Was gilt also für die Temperatur T_2, die das Spinsystem nach der Magnetfeldänderung besitzt? Nimm dabei an, dass sich die Temperatur stetig mit dem Magnetfeld ändert. Wie muss B_2 gewählt werden, damit das Spinsystem abgekühlt wird, also $T_2 < T_1$ gilt.

(c) Das Spinsystem sei nun über einen Wärmeleiter mit einer Probe mit konstanter Wärmekapazität C_V^P verbunden, welche zuvor ebenfalls durch das Wärmereservoir auf die Temperatur T_1 gebracht wurde. Berechne die Temperatur $T_=$, die Spinsystem und Probe nach dem Temperaturausgleich besitzen. Gehe dabei von $k_B T \gg \mu_0 B_2$ aus und nähere die Wärmekapazität des Spinsystems entsprechend.

7.2 System von unabhängigen harmonischen Oszillatoren (12 Punkte)
Wir betrachten ein System von N identischen, nicht gekoppelten harmonischen Oszillatoren mit Eigenfrequenz ω:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right)$$

(a) Wie sehen die möglichen Energieeigenwerte eines Mikrozustands $|n\rangle = |n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle$ aus? Berechne die kanonische Zustandssumme Z_c.

Im kanonischen Ensemble kann die Summation über alle Mikrozustände leicht ausgeführt werden, da über alle Eigenzustände der einzelnen Oszillatoren unabhängig summiert wird. Im Folgenden werden wir nun sehen, dass alle physikalischen Größen des Systems mit Hilfe von Z_c berechnet werden können.

(b) Berechne die innere Energie U. Drücke dabei den Einteilchenenergieerwartungswert als Ableitung der kanonischen Zustandssumme aus. Berechne nun noch den Erwartungswert für die Quantenzahl n eines einzelnen Oszillators und zeige damit schließlich

$$U = N\hbar\omega \left(\langle n \rangle + \frac{1}{2} \right) .$$

Skizziere das Verhalten der inneren Energie als Funktion von $k_B T/\hbar\omega$.

(c) Die innere Energie U kann auch durch die thermodynamische Relation $U = F + TS$ bestimmt werden. Berechne nun also die freie Energie F und daraus die Entropie S sowie die innere Energie U und vergleiche das Ergebnis mit dem aus (b).

(d) Leite einen Ausdruck für die Wärmekapazität her und betrachte das Verhalten der Wärmekapazität für $k_B T \gg \hbar\omega$ und $k_B T \ll \hbar\omega$.

7.3 Gibbs'sches Paradoxon (9 Punkte)
Ein thermisch abgeschlossener Behälter ist durch eine Trennwand in zwei Kammern unterteilt. Beide Kammern enthalten ideale Gase mit der konstanten Wärmekapazität c_V. Die eine Kammer enthält N_1 Teilchen bei der Temperatur T_1 und dem Druck p_1, die andere N_2 Teilchen bei der Temperatur T_2 und dem Druck p_2.

(a) Die Trennwand werde nun verschiebbar gemacht und ihre thermische Isolierung entfernt. Nach dem Druck- und Temperaturausgleich besitzen beide Kammern den gleichen Druck p und die gleich Temperatur T. Berechne diese mit Hilfe der Zustandsgleichungen für das ideale Gas.

(b) Anschließend wird die Trennwand entfernt. Berechne die Änderung der Gesamtentropie ΔS aufgrund der Mischung, falls die Gase (1) verschieden und (2) identisch sind. Die Entropie eine idealen Gases ist dabei gegeben durch

$$S = N k_B \left[\ln V + \frac{3}{2}\big(1 + \ln(2\pi m k_B T/h^2)\big) \right] .$$

Warum führt der 2. Fall zu einem Widerspruch?