Universität Bonn 30.11.2010
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, K. Ballmann, R. Katzer
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_WS10/

Theoretische Physik IV — WS 2010/11

Übungsblatt 8

(Abgabe am 7. Dezember, Besprechung vom 7. bis 9. Dezember)

8.1 Barometrische Höhenformel (6 Punkte)

Gegeben sei eine Luftsäule mit der Grundfläche A im homogenen Schwerefeld der Erde. Wir wollen nun eine Formel für den Druck p in Abhängigkeit der Höhe z herleiten. Dabei nehmen wir für die Luft ein aus N *klassischen* Teilchen bestehendes ideales Gas an. Überlege zuerst, wie sich über das ideale Gasgesetz der Druck $p(\mathbf{r})$ auf die Teilchendichte

$$n(\mathbf{r}) = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_i}) \right\rangle$$

zurückführen lässt, und bestimme anschließend $n(\mathbf{r})$, indem du den Erwartungswert im kanonischen Ensemble ausrechnest. Nutze dabei aus, dass es sich um ein System von nicht wechselwirkenden Teilchen handelt. Zeige somit, dass der Druck nur von z abhängt, $p = p(z)$.

8.2 Modell für weiße Zwerge (12 Punkte)

Als weißen Zwerg bezeichnet man einen sehr alten Stern in einer der möglichen Endphasen eines Sternlebens. In einem einfachen Modell besteht er aus einem nicht wechselwirkenden Elektronengas und einem Ionenhintergrund, der nur für die Ladungsneutralität und den Zusammenhalt des Sterns durch Gravitation sorgt. Die Elektronendichte beträgt typischerweise $n = 10^{30}/cm^3$ und die Masse $M = 10^{30}kg$. Wegen der hohen Dichte bewegt sich ein großer Anteil der Elektronen relativistisch, d.h. es gilt die Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon(p) = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$.

(a) Berechne den Fermi-Impuls p_F des Elektronengases in Abhängigkeit der Elektronendichte n. Schätze ungefähr ab, oberhalb welcher Dichte n sich die Elektronen an der Fermikante relativistisch bewegen, d.h. $p_F > mc$.

(b) Die Temperatur eines weißen Zwergs beträgt etwa 10^7 Kelvin. Berechne die Fermi-Energie ϵ_F des Elektronensystems für die oben angegebene Dichte des Elektronengases und zeige, dass $\epsilon_F \gg k_BT$. Es kann deshalb im Folgenden bei $T = 0$ gerechnet werden.

(c) Berechne die innere Energie U in Abhängigkeit vom Radius R des weißen Zwergs, zuerst für den nichtrelativistischen ($p_F \ll mc$) und dann für den ultrarelativistischen Fall ($p_F \gg mc$). Verwende dabei die folgenden Energie-Impuls-Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{nichtrelativistisch:} \quad & \epsilon(p) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \\ \text{ultrarelativistisch:} \quad & \epsilon(p) = cp \end{aligned}$$

(d) Gib den Druck $P = -(\partial U/\partial V)_N$ des Elektronensystems an. Dieser Druck wird auch Pauli-Druck genannt.

(e) Betrachte nun die Gesamtenergie $E(R) = U + E_{Gravitation}$ des Sterns, mit $E_{Gravitation} = -GM^2/R$. Skizziere in einem Diagramm $E(R)$ für kleine (ultrarelativistisch) und für große (nichtrelativistisch) Sternradien.
Was ist (qualitativ) die Bedingung an $E(R)$, dass ein Radius existiert, bei dem der Stern stabil ist? Zeige, dass der weiße Zwerg für Massen größer als eine kritische Masse M_c nicht stabil sein kann. Der Stern stürzt dann in sich zusammen. Bestimme M_c, die sogenannte Chandrasekhar-Masse.

Hinweis:

Plancksches Wirkungsquantum:	$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}\, kg\, m^2/s$
Boltzmann-Konstante:	$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\, J/K$
Elektronenmasse:	$m = 9.11 \cdot 10^{-31}\, kg$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8\, m/s$

8.3 Landau-Diamagnetismus (12 Punkte)

(a) Wir betrachten zunächst ein System von N spinlosen Teilchen mit Ladung $-e$, die der *klassischen* Mechanik und der *klassischen* Statistik gehorchen. Die kinetische Energie eines Teilchens in einem angelegten äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ist dann gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 .$$

Zeige, dass die Zustandssumme des Systems unabhängig von $\mathbf{B}$ ist, d.h., dass die magnetische Suszeptibilität exakt gleich Null ist (Bohr-van-Leeuwen-Theorem). Dies bedeutet, dass es klassisch keinen Magnetismus geben kann.

Als Landau-Diamagnetismus bezeichnet man den Magnetismus, der sich aus der Quantisierung der Bahnbewegung der Elektronen in einem magnetischen Feld ergibt. Wir betrachten nun quantenmechanisch ein System von Elektronen in einem Kasten mit den Seitenlängen L_x, L_y, L_z in einem homogenen Magnetfeld B entlang der z-Achse. Der Elektronenspin würde zum Pauli-Paramagnetismus führen und soll hier nicht berücksichtigt werden. Wir wählen die Eichung $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$ mit $B > 0$ und gehen im Folgenden vom thermodynamischen Grenzfall $L_i \gg 1$, $i = x, y, z$, aus.

(b) Zeige, dass die Bewegung eines Elektrons in der x-y-Ebene einem eindimensionalen harmonischen Oszillator entspricht. Gib die Einteilchen-Energieniveaus an, die sich aus der Oszillatorenergie und der kinetischen Energie der freien Bewegung in z-Richtung zusammensetzen. Die Oszillatorniveaus im Magnetfeld heißen Landau-Niveaus. Bestimme den Entartungsgrad eines Landau-Niveaus mit Hilfe der Tatsache, dass der Impuls p_y in dem Kasten quantisiert ist.

(c) Zeige, dass sich für Fermionen das großkanonische Potential für hohe Temperaturen $k_BT \gg \varepsilon_F$ allgemein schreiben lässt als $\Omega = -k_BT\sum_i e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha_i}-\mu)}$ und leite daraus für das Elektronensystem den Ausdruck

$$\Omega = -\frac{V}{\beta\lambda_T^3}\frac{x}{\sinh x}e^{\beta\mu}$$

mit $\lambda_T = 2\pi\hbar/\sqrt{2\pi m k_B T}$ und $x = \beta\mu_B B$, wobei $\mu_B = \hbar e/2mc$. Bestimme daraus die mittlere Teilchenzahl N und die Magnetisierung M. Was ergibt sich für M im Grenzfall eines schwachen Magnetfeldes, $x \ll 1$?