Universität Bonn 07.12.2010
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, K. Ballmann, R. Katzer
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_WS10/

Theoretische Physik IV — WS 2010/11

Übungsblatt 9

(Abgabe am 14. Dezember, Besprechung vom 14. bis 16. Dezember)

9.1 Sommerfeld-Entwicklung (12 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Sommerfeld-Entwicklung für Fermi-Integrale bei tiefen Temperaturen eingeführt. Bis zur vierten Ordnung in T lautet sie

$$\int_0^\infty d\epsilon\, f(\epsilon)g(\epsilon) \approx \int_0^\mu d\epsilon\, g(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2 g'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360}(k_BT)^4 g'''(\mu) + \mathcal{O}(T^6)\,,$$

mit der Fermi-Verteilung $f(\epsilon) = 1/(\exp\frac{\epsilon-\mu}{k_BT} + 1)$. Mit Hilfe dieser Entwicklung können die Erwartungswerte vieler Größen eines Fermi-Systems berechnet werden. Im Folgenden betrachten wir ein solches Fermi-System mit der Zustandsdichte $\rho(\epsilon)$.

(a) Gib eine Formel für den Erwartungswert einer Größe $F(\epsilon)$ an, die nur von den Einteilchenenergien abhängt. Wie sieht diese Formel dann konkret für die innere Energie bzw. die Teilchenzahl aus?

(b) Wie ist die Teilchenzahl bei $T = 0$ mit der Fermi-Energie verknüpft?

(c) Betrachte wieder die Teilchenzahl, diesmal für sehr kleine, aber endliche Temperaturen, und berechne daraus die Koeffizienten der Entwicklung

$$\mu(T) = \epsilon_F + \delta + \gamma T + \alpha T^2 + \xi T^3 + \eta T^4 + \dots$$

bis zur vierten Ordnung in T in Termen der Fermi-Energie.

Hinweis: Entwickle die Zustandsdichte um ϵ_F und behalte anschließend alle Terme bis zur Ordnung T^4 bei.

(d) Gib nun analog die Entwicklung des Erwartungswertes $\langle F\rangle$ an. Beschränke dich nun der Einfachheit halber auf Terme bis zur Ordnung T^2. Betrachte als Spezialfall die innere Energie $\langle E\rangle$ und berechne daraus die Wärmekapazität.

9.2 Halbleiter (12 Punkte)

Wir betrachten zunächst das einfache Modell eines reinen Halbleiters mit zwei Bändern und einer Bandlücke E_g zwischen Valenz- und Leitungsband (siehe Abbildung 1). Bei $T = 0$ ist jeder Zustand im Valenzband besetzt und das Leitungsband leer. Bei endlichen Temperaturen $T > 0$ können Elektronen (Masse m_e) in das Leitungsband angeregt werden und hinterlassen im Valenzband unbesetzte Zustände, sogenannte Löcher, die wie positiv geladene Teilchen mit Masse m_L behandelt werden können. Die Zustandsdichte im Leitungsband sei gegeben durch

$$\rho_e(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon - E_g}$$

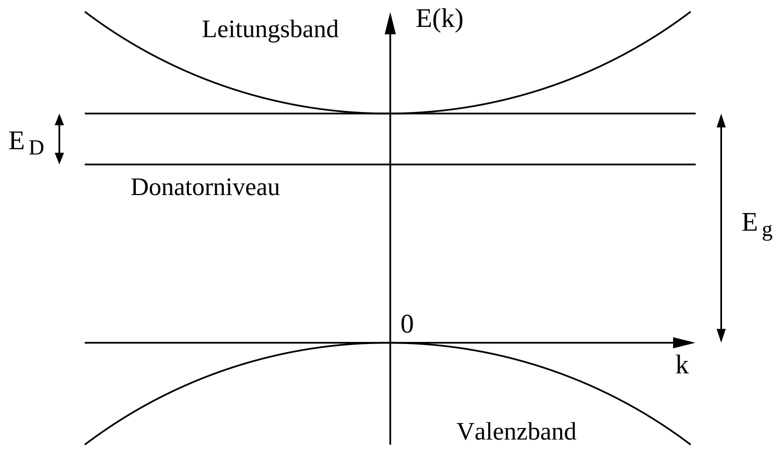

Abbildung 1: Bandstruktur des Halbleiters

und im Valenzband durch

$$\rho_L(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_L}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{-\varepsilon}\ .$$

Im Folgenden können wir von $E_g - \mu \gg k_B T$ sowie $\mu \gg k_B T$ ausgehen, es gilt also die Boltzmann-Statistik.

(a) Zeige, dass die Teilchendichte durch $n_e = 2(m_e k_B T/2\pi\hbar^2)^{3/2} e^{-\beta(E_g-\mu)}$ für die Leitungselektronen und $n_L = 2(m_L k_B T/2\pi\hbar^2)^{3/2} e^{-\beta\mu}$ für die Valenzbandlöcher gegeben ist.
Hinweis: $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \int_0^\infty dx x^{n-1/2} e^{-x} = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$

(b) Bestimme aus n_e und n_L das chemische Potential μ und zeige, dass die Fermi-Energie genau in der Mitte der Bandlücke liegt, $\varepsilon_F = \mu(T \to 0) = E_g/2$.

(c) Berechne die Wärmekapazität C_V und zeige, dass sie für $T \to 0$ verschwindet.

Der Halbleiter sei nun mit Fremdatomen (hier Donatoren) der Konzentration n_D dotiert. Die Fremdatome führen zu diskreten Energieniveaus im Abstand E_D unterhalb der Leitungsbandkannte, wobei $E_D < E_g$ gelte.

(d) Wie ist für den Fall $\mu \approx E_g$ die Donatordichte n_D mit n_e verknüpft? Zeige dann, dass $n_D = 2\left(e^{\beta(\mu-E_g-E_D)}+1\right)(m_e k_B T/2\pi\hbar^2)^{3/2} e^{-\beta(E_g-\mu)}$ gilt.

(e) Bestimme die Elektronendichte n_e und das chemische Potential μ für die beiden Fälle

(i) $e^{\beta(\mu-E_g+E_D)} \gg 1$

(ii) $e^{\beta(\mu-E_g+E_D)} \ll 1$

Welchem Temperaturbereich entsprechen sie? Was ergibt sich damit für die Fermi-Energie?

9.3 Die spezifische Wärme eines idealen Fermi-Gases (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass im Grenzfall hoher Temperaturen, $k_B T \gg \varepsilon_F$, die Entropie eines idealen Fermi-Gases durch

$$S = N k_B\left[\frac{d+2}{2} - \frac{\mu}{k_B T}\right] = \frac{d}{2} N k_B\left[\ln\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right) + const.\right]\ ,$$

und seine innere Energie durch $U = \frac{d}{2} N k_B T$ gegeben ist. Leite daraus die Wärmekapazität C_V für den kanonischen sowie den großkanonischen Fall her. Welche Zustandsgröße muss dabei im kanonischen, welche im großkanonischen Fall neben V konstant gehalten werden?