Universität Bonn 30.04.2003
Physikalisches Institut
Prof. Dr. H. Kroha, A. Lubatsch
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/Groups/kroha/FRAMES/frameteaching.htm

Übungen zur Festkörpertheorie II — SS03

1. Übungsblatt

Zur Technik der Greenschen Funktionen

1. Ein– und Zweiteilchen–Operatoren in zweiter Quantisierung

   Ein Elektronengas mit N Teilchen wird durch den Hamiltonoperator

$$H = H_{kin} + H_{e-e} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{k}_i^2}{2m} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

   beschrieben, wobei $\mathbf{r}_i$ und $\hbar\mathbf{k}_i = -\hbar\nabla_{r_i}$ den Orts– bzw. Impulsoperator des i–ten Teilchens angeben. Geben Sie mit Hilfe der Vernichtungs– und Erzeugungsoperatoren für Teilchen mit Impuls $\hbar\mathbf{k}$ und Spin σ

$$c_{\mathbf{k}\sigma} = \int d^3r \; \mathrm{e}^{-i\mathbf{kr}} \; \Psi_\sigma(\mathbf{r})$$
$$c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} = \int d^3r \; \mathrm{e}^{+i\mathbf{kr}} \; \Psi^\dagger_\sigma(\mathbf{r})$$

   die Operatoren für die kinetische Energie H_{kin} und die Coulomb–Wechselwirkungsenergie H_{e-e} in zweiter Quantisierung an.

2. Wick'sches Theorem für Greensfunktionen des nichtwechselwirkenden Systems

   Ein nichtwechselwirkendes Fermigas werde durch den Hamiltonoperator $H^{(0)}$ beschrieben.

   a) Zeigen Sie, daß für die Zweiteilchen-Greensfunktion gilt

$$G_2^0(1,2|1',2') \;\; = \;\; G^0(1,1')G^0(2,2') - G^0(1,2')G^0(2,1')$$

   Hinweis: Benutzen Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichungen der Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren $\Psi^\dagger(1)$, $\Psi(2)$ und berechnen Sie $(i\partial/\partial t_1 - H^{(0)})G_2^0(1,2|1',2')$.

   b) Zeigen Sie nun mit Hilfe vollständiger Induktion das Wicksche Theorem für die n-Teilchen-Greensfunktion

$$G_n^0(1,2,\ldots,n|1',2',\ldots,n') \;\; = \;\; \sum_P (-1)^P \; G^0(1,P(1')) \; G^0(2,P(2')) \; \ldots \; G^0(n,P(n')),$$

   wobei P alle Permutationen der $\{1',2',\ldots,n'\}$ bedeutet.

— Bitte wenden —

3. Zweiteilchen-Korrelationsfunktionen

Berechnen Sie für ein nichtwechselwirkendes Elektronengas bei Temperatur $T = 0$ (Einteilchen–Energie $\varepsilon_p = p^2/2m$)

a) die retardierte Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion

$$\chi_{\sigma\sigma'}(\vec{q},\omega) = -i\Theta(t_1 - t_2)\langle\Phi_o|\Psi^\dagger_\sigma(1)\Psi_\sigma(1)\Psi^\dagger_{\sigma'}(2)\Psi_{\sigma'}(2)|\Phi_o\rangle_{\vec{q},\omega}$$

und

b) die retardierte Paar-Korrelationsfunktion

$$\Pi_{\sigma\sigma'}(\vec{q},\omega) = -i\Theta(t_1 - t_2)\langle\Phi_o|\Psi_{\sigma'}(1)\Psi_\sigma(1)\Psi^\dagger_\sigma(2)\Psi^\dagger_{\sigma'}(2)|\Phi_o\rangle_{\vec{q},\omega}$$

jeweils im Grenzfall $q \to 0$.

Berechnen Sie jeweils zunächst die entsprechenden zeitgeordneten Greensfunktionen unter Ausnutzung des Wickschen Theorems und gehen Sie dann zu den retardierten Größen über.