Universität Bonn 23.07.2003
Physikalisches Institut
Prof. Dr. H. Kroha, A. Lubatsch
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/Groups/kroha

Übungen zur Festkörpertheorie II — SS03

4. Übungsblatt
Diffusion und schwache Lokalisierung

1. Mikroskopische Berechnung der Diffusionskonstanten

   Betrachten Sie ein ungeordnetes Elektronensystem im kontinuierlichen Raum mit dem Zufallspotential $V(\vec{r}) = V\sum_i = 1^N \delta^3(\vec{r} - \vec{R}_i)$, wobei R_i der zufällige Ort der i-ten Störstelle, $i = 1, \ldots, N$, ist.

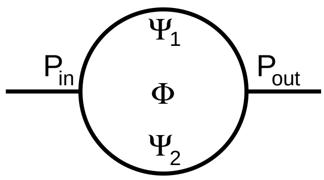
   a) Berechnen Sie den retardiert-avancierten Teil der Dichte-Korrelationsfunktion $\Phi^{RA}(\omega, \vec{q}) \sum_{\vec{p}\vec{p}'} \langle\langle G^R_{\vec{r},\vec{r}'}(E+\omega) G^A_{\vec{r}',\vec{r}}(E)\rangle\rangle|_{\vec{q}}$ in Bornscher Näherung (irreduzible Teile in $O(V^2)$) im hydrodynamischen Limes, $\omega, q \to 0$. Dabei wird die Notation aus der Vorlesung benutzt, und $\langle\langle \ldots \rangle\rangle$ bedeutet Störstellenmittelung. Verwenden Sie die Entwicklung

   $$\begin{aligned} G^R_{\vec{p}_+}(E+\omega) G^A_{\vec{p}_-}(E) &= \frac{G^A_{\vec{p}}(E) - G^R_{\vec{p}}(E)}{\Sigma^A(E) - \Sigma^R(E)} \Big[1 - \frac{\omega}{\Sigma^A(E) - \Sigma^R(E)} \\ &- \frac{1}{2}\left(G^A_{\vec{p}}(E) - G^R_{\vec{p}}(E)\right)(\vec{v}_p \cdot \hat{q}) q - \frac{1}{2}\frac{G^A_{\vec{p}}(E) - G^R_{\vec{p}}(E)}{\Sigma^A(E) - \Sigma^R(E)} (\vec{v}_p \cdot \hat{q})^2 q^2 \Big] + O(\omega^2, q^3) \end{aligned}$$

   b) Bestimmen Sie aus der hydrodynamischen Form von $\Phi^{RA}(\omega, \vec{q})$ die Diffusionskonstante D_0 und zeigen Sie, dass im Limes kleiner Unordnung $D_0 = \frac{1}{d} v_F^2 \tau$ (d = Dimension, v_F = Fermigeschwindigkeit, τ = Lebensdauer).

2. Oszillatorische Magnetoleitfähigkeit von mesoskopischen Ringen: Aharonov-Bohm-Effekt

   Ein äußeres Magnetfeld beeinflusst die Phase der Elektronen-Wellenfunktionen und damit die (schwache) Lokalisierung. Wir berechnen die Magnetfeld-Abhängigkeit der Leitfähigkeit eines ungeordneten, mesoskopischen Rings, dessen Umfang L so klein ist, dass alle Wellenfunktionen kohärent sind, aber viel größer ist als die elastische mittlere freie Weglänge, $L \gg \ell$. Die Dicke d des Rings sei $d < \ell$, so dass die Diffusionsmoden eindimensional sind (siehe Abb.).



a) Betrachten Sie die Schrödinger-Gleichung eines einzelnen Elektrons in einem beliebigen Potential $V(\vec{r})$. Es wird ein statisches Magnetfeld $\vec{B}$ angelegt, das den Ring senkrecht durchdringt. Wie hängt die Wellenfunktion $\Psi(\vec{r})$ vom Vektorpotential $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}$ ab? Beachten Sie hierzu, dass der kinetische Impuls $\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ lautet, und machen Sie den Ansatz, dass $\vec{A}$ nur die Phase Θ beeinflusst. Wie hängt der Phasenunterschied der Wellenfunktionen Ψ_1, Ψ_2, im Punkt P_{out} vom magnetischen Fluss Φ durch den Ring ab, wenn sie und im Punkt P_{in} gleichphasig sind? (Flussquantum $\Phi_0 = hc/e$.

b) Wir vernachlässigen zunächst Lokalisierungseffekte. Dann kann die Leitfähigkeit in einem einfachen Bild nach der Drude-Leitfähigkeit $\sigma = ne^2\tau/m$ berechnet werden, wobei die n die gesamte Dichte der Elektronen ist, die bei P_{out} aus dem Ring austreten. Zeigen Sie, dass

$$\sigma = \frac{n_0 2^2 \tau}{2m} \left[1 + \cos(2\pi\Phi/\Phi_0)\right] \ ,$$

wobei n_0 die bei P_{in} injizierte Dichte ist. Was geschieht mit den Elektronen, die nicht transmittiert werden?

c) Berechnen Sie nun den schwachen Lokalisierungsbeitrag zur Leitfähigkeit in Analogie zur Vorlesung. Beachten Sie dabei, dass der kinetische Impuls der Elektronen wie in a) angegeben ist, und berücksichtigen Sie die periodischen Randbedingungen an die Wellenfunktionen im Ring, die zu einer Quantisierung desImpulses führen. (Letzteres ist wesentlich für das Ergebnis!). Zeigen Sie damit

$$\delta\sigma(\Phi) = -\frac{e^2 L}{8\pi^4} \sum_{n=-L/\ell}^{L/\ell} \frac{1}{(n - 2\Phi/\Phi_0)^2} \ .$$

d) Wir haben für geeignetes Magnetfeld $\Phi/\Phi_0 \gg 1$ und $L/\ell \gg 1$. Zeigen Sie, dass unter diesen Bedingungen $\delta\sigma(\Phi)$ eine periodische Funktion ist. Was ist die Periode? Benutzen Sie die Periodizität, um $\delta\sigma(\Phi)$ als Fourierreihe darzustellen und geben Sie die Fourierkomponenten an.

e) Wie kann man die Periode der schwachen Lokalisierungskorrektur physikalisch verstehen? Die Ergebnisse von b) und d) sind in mesoskopischen Ringen relativ leicht experimentell beobachtbar.