Übung 10 (11.06. - 15.06.2007)

A 1 Anisotropes Medium

Betrachte ein ladungsfreies, anisotropes Medium mit der relativen Permeabilität $\mu_r = 1$ und dem in H 1 motivierten Dielektrizitätstensor ϵ in dem sich eine ebene, monochromatische elektromagnetische Welle $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)]$ ausbreitet (das Medium wird also wieder von einem zeitlich konstanten, homogenen Magnetfeld in x_3-Richtung $\vec{B}_a = (0, 0, B_0)$ durchsetzt). Die Verwendung des Ergebnisses von H 1 ist gerechtfertigt, wenn man den Einfluß der Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes und den des Magnetfeldes der Welle auf den Dielekrizitätstensor vernachlässigt.)

1.1 Wie sind in dieser Welle die Feldstärken $\vec{E}$,$\vec{D}$,$\vec{B}$,$\vec{H}$ sowie der Poyntingvektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ relativ zur Ausbreitungsrichtung $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ orientiert?

1.2 Zeige, dass zwischen den Feldstärken $\vec{E}$,$\vec{D}$ und der Phasengeschwindigkeit v der Welle die Relation

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) + \mu_0 v^2 \vec{D} = 0$$

besteht.

1.3 Bestimme hieraus die Geschwindigkeiten, mit der sich Wellen in Richtung des äußeren Magnetfeldes $\vec{B}_a$ ausbreiten könnnen und untersuche die Polarisation der Welle $\vec{E}(\vec{x}, t)$.

1.4 In Richtung des äußeren Magnetfeldes $\vec{B}_a$ breitet sich eine ebene, monochromatische, linear polarisierte Welle aus, deren elektrischer Feldstärketensor an der Stelle $z = 0$ in x-Richtung zeigt. Nach welcher Strecke hat sich die Polarisation dieser Welle um $\pi/2$ gedreht?

H 1 Dielektrikum

Betrachte ein Dielektrikum der Dichte n (Teilchen pro Volumen), dass sich in einem ortsunabhängigen elekrischen Wechselfeld $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-i\omega t]$ befindet und gleichzeitig von einem zeitlich konstanten, homogenen Magnetfeld in x_3-Richtung $\vec{B}_a = (0, 0, B_0)$ durchsetzt wird.

1.1 Löse die Bewegungsgleichung für die erzwungene Schwingung eines herausgegriffenen gebundenen Elektrons. Benutze ein einfaches Modell, in dem sich das Elektron für $\vec{E} = \vec{B}_a = 0$ in Ruhelage bei $\vec{x} = 0$ befindet. Die Bindung des Elektrons wird durch ein quadratisches Potenzial beschrieben (d.h. das Elektron ist durch eine “Feder” mit $k = m\omega_0^2$ gebunden).
Hinweis: Die Dichte des Mediums sei so klein, dass man hierbei von einer Modifikation des äußeren Felds $\vec{E}$ durch den Einfluß von Nachbarmolekülen absehen kann. Die Bewegung der Ionen, an welche die Elektronen gebunden sind, soll vernachlässigt werden. Ebenso soll von “Reibungskräften” abgesehen werden, die auf die Elektronen wirken. Bei der Lösung der Bewegungsgleichung (Ansatz $\vec{x} = \vec{x}_0 \exp[-i\omega t]$ geht man zweckmäßigerweise zu den zyklischen Koordinaten $x_\pm = x_1 \pm ix_2, x_3$ über. Benutze die Abkürzungen $\beta_{1,2} = -\frac{e}{m}\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 \mp \omega\omega_B}$, $\beta_0 = -\frac{e}{m}\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$, $\omega_B = \frac{e}{m}B_0$) und schreibe die Lösung in der Form $\vec{x} = \gamma\vec{E}$ auf, wobei γ eine 3×3-Matrix ist.

1.2 Bestimme die Polarisierbarkeit $\vec{P} = ne\vec{x}$ und den durch $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon(\omega)\vec{E}$ definierten dielektrischen Tensor $\epsilon(\omega)$ (3×3-Matrix) des Mediums. Benutze hierbei $\vec{x} = \gamma\vec{E}$ mit der Matrix γ aus Teil 1.1