Übung 2 (09.04. - 13.04.2007)

A 1 Kraft zwischen zwei geschlossenen Strömen
Betrachte zwei geschlossene stromdurchflossende Leiterkreise deren Stromelemente $I_1 d\vec{l_1}$ und $I_2 d\vec{l_2}$ den Abstandsvektor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ haben.

1.1 Zeige, dass die Kraft $\vec{F}_{12}$ zwischen den beiden Leitern, benutze hierbei die von einem äußeren $\vec{B}$-Feld auf einen stromdurchflossenen Leiter ausgeübte Kraft $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$, gegeben ist durch:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l_1} \times (d\vec{l_2} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad . \tag{1}$$

1.2 Zeige, dass (1) auch geschrieben werden kann als:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (d\vec{l_1} \cdot d\vec{l_2}) \quad . \tag{2}$$

A 2 Vektorfelder
Zeige die folgende Relation:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) = \vec{A}(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) + \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \vec{A}(\vec{r}) - \vec{B}(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \vec{B}(\vec{r}) \quad . \tag{3}$$

H 1 Unendlich dünner Leiter
Betrachte einen unendlich langen geraden Leiter der in z-Richtung orientiert ist.

1.1 Berechne $d\vec{B}$ eines infinitesimal kurzen Leiterstücks, dass sich im Punkt $(0, 0, z')$ befindet:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{x\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dz' \quad . \tag{4}$$

1.2 Zeige nun, dass die zu (4) gehörige Feldverteilung

$$\vec{B}' \sim \frac{x\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \tag{5}$$

nicht durch ein kurzes Stromelement der Länge dz' mit dem Strom I verursacht wird. Berechne hierfür die Stromverteilung $\vec{j}' = rot\vec{B}'/\mu_0$ und interpretiere das Ergebnis.

1.3 Zeige abschließend, dass für $\vec{j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{j}' dz'$ gilt: $\vec{j} = 0$ für $x^2 + y^2 \neq 0$.
Was besagt dies anschaulich für die Stromverteilung bzw. was folgt für die Stromanteile, die außerhalb des Leiters liegen?

Hinweis:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2 + A^2)^{5/2}} &= \frac{A^2 x + \frac{2}{3} x^3}{A^4 (x^2 + A^2)^{3/2}} + C \\
\int \frac{x\,dx}{(x^2 + A^2)^{5/2}} &= -\frac{1}{3(x^2 + A^2)^{3/2}} + C \\
\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + A^2)^{5/2}} &= \frac{x^3}{3A^2 (x^2 + A^2)^{3/2}} + C
\end{aligned}$$