Übung 6 (07.05. - 11.05.2007)

A 1 Koaxialkabel
Betrachte ein Koaxialkabel dessen Innenleiter (Außenleiter) den Radius a (b) hat. Innen und außen fließt der selbe Strom.

1.1 Berechne die Energie zwischen den Zylindern auf einer Länge l.

H 1 Maxwellgleichungen und Ebene Wellen I
Betrachte ein homogenes, isotropes Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ, der Permeabilität μ und der Leitfähigkeit σ. Es gelten die Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

und die Stromdichte ist über $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ gegeben.

1.1 Leite aus den Maxwellgleichungen die Kontinuitätsgleichung und hieraus eine Differentialgleichung für ρ her.

1.2 Leite für ein *ladungsfreies* ($\rho = 0, j \neq 0$) Medium durch Entkoppeln der Maxwellgleichungen eine Differentialgleichung für die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ her.

1.3 Gegeben sei die Ebene Welle

$$\vec{H}(x,z,t) = (0, Ae^{i\alpha x + i\beta z}, 0)e^{-i\omega t}$$

(α,β komplex) mit $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$ (zur Abkürzung $k^2 = \epsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega$). Zeige, dass dies eine Lösung der in Teilaufgabe 1.2 hergeleiteten Differentialgleichung ist.

1.4 Bereche die zur magnetischen Feldstärke aus 1.3 gehörige elektrische Feldstärke $\vec{E}(x,z,t) = \vec{E}_0(x,z)e^{-i\omega t}$.

A 2 Maxwellgleichungen und Ebene Wellen II
Betrachte zwei verschiedene Medien mit den Materialkonstanten ϵ_1, $\mu_1 = \mu_0$, σ_1 (Halbraum $z > 0$) bzw. ϵ_2, $\mu_2 = \mu_0$, σ_2(Halbraum $z < 0$) die durch die Grenzfläche $z = 0$ (also die (x,y)-Ebene) voneinander getrennt sind. In jedem der beiden Medien läuft eine Welle der Gestalt wie in 1.3 in der (x,z)-Ebene

$$\begin{aligned} H_y^{(1)} &= A_1 e^{i(\alpha_1 x + \beta_1 z - \omega t)}; z > 0, \\ H_y^{(2)} &= A_2 e^{i(\alpha_2 x + \beta_2 z - \omega t)}; z < 0. \end{aligned}$$

2.1 Welche Bedingungen müssen die Real- und Imaginärteile der komplexen Wellenzahlen β_1 und β_2 erfüllen, damit die Welle im Medium 1 auf die Grenzfläche z=0 zuläuft, in Medium 2 von ihr wegläuft und jeweils mit wachsenden Abstand von der Grenzfläche exponentiel gedämpft ist.

2.2 Wie lauten die Anschlußbedingungen für die Komponenten H_y und E_x an der Grenzfläche der beiden Medien? Zeige, dass die Anschlußbedingungen für die Wellenzahlen α_1 und α_2 in x-Richtung die Beziehungen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ und $\alpha^{-2} = k_1^{-2} + k_2^{-2}$ liefern ($k_1^2 = \epsilon_1\mu_0\omega^2 + i\sigma_1\mu_0\omega, k_2^2 = \epsilon_2\mu_0\omega^2 + i\sigma_2\mu_0\omega$).

2.3 Drücke mittels der in Teilaufgabe 1.3 und 2.2 gewonnen Beziehungen β_1^2 und β_2^2 durch k_1^2 und k_2^2 aus und berchne die Eindringtiefe der Felder in beiden Medien für den Fall, dass Medium 1 Luft ($\epsilon_1 = \epsilon_0, \mu_1 = \mu_0, \sigma_1 = 0$) und Medium 2 ein guter Leiter ($\epsilon_2 = \epsilon = 0, \mu_2 = \mu_0, \sigma_2 = \sigma$ mit $\sigma/\epsilon\omega >> 1$) ist.

2.4 Bestimme die Richtung des Poyntingvektors $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ innerhalb und außerhalb des Leiters und skizziere seine Richtung in der Nähe der Grenzfläche.