Vorlesung Theoretische Physik IV - SS 2005 - Prof. H. Kroha

M.-A. Lawn   http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_SS05/

Übungsblatt 10

Besprechung: 27. Juni - 1. Juli

10.1 Beitrag der Gitterschwingungen zur spezifischen Wärme von Festkörpern

Die elementaren Anregungen eines Kristallgitters sind Gitterschwingungen (Phononen). Sie stellen die Schwingungsquanten von harmonischen Oszillatoren mit den Frequenzen $\omega_{\boldsymbol{k}}$ dar und sind daher Bosonen. Die Gesamtenergie des Gitters ist also $E = \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}(n_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2})$.

1) Welche Werte kann der Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ in einem kubischen Kristall mit Gitterkonstante a und je $N^{\frac{1}{3}}$ Gitterpunkte in jeder Raumrichtung annehmen? Wie groß ist die Gesamtzahl der Schwingungsmoden? Beachten Sie, daß es für jedes $\boldsymbol{k}$ eine longitudinale und zwei transversale Moden gibt.

2) **Einstein-Modell:** Einstein nahm an, daß die Frequenzen aller Moden gleich sind: $\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_0$ für alle $\boldsymbol{k}$. Berechnen Sie die spezifische Wärme in Abhängigkeit von der Temperatur T. Das Einstein-Modell ist eine gute Näherung, wenn die Phononen-Dispersion näherungsweise $\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_0 = \text{const}$ ist, z. B. bei optischen Phononen.

3) **Debye-Modell:** Die Dispersion $\omega_{\boldsymbol{k}}$ kann in realen Kristallen sehr kompliziert sein. Für akustische Phononen ist sie für kleine Frequenzen aber immer linear. Debye nahm deshalb eine für alle Frequenzen lineare Dispersion an: $\omega_{\boldsymbol{k}} = c \cdot \boldsymbol{k}$, um das richtige Tieftemperaturverhalten zu bekommen. Das Debye-Modell ist eine gute Näherung z. B. für akustische Phononen, deren Dispersion näherungsweise linear ist.

   Was ergibt sich in dieser Näherung für die maximale Phononenfrequenz ω_D (Debye-Frequenz) aus der Bedingung, daß die Gesamtzahl der Schwingungsmoden wie unter 1) sein muß?
   Hinweis: Berechnen Sie mit der Debye-Näherung die Zustandsdichte pro Polarisationsrichtung: $N(\hbar\omega) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{(\hbar c)^3}(\hbar\omega)^2$.

   Berechnen Sie die innere Energie U und die spezifische Wärme C_V des Gitters in Debye-Näherung.
   Anmerkung: Es genügt, das auftretende Frequenzintegral dimensionslos zu machen und durch die Debye-Funktion $\Delta(x) = \frac{3}{x^3}\int_0^x dy \frac{y^3}{e^y - 1}$ *auszudrücken.*

4) Bestimmen Sie jeweils für das Einstein- und das Debye-Modell die Grenzfälle hoher und niedriger Temperaturen und skizzieren Sie $C_V(T)$.

10.2 Bose-Einstein-Kondensation

Wir betrachten ein zweidimensionales ideales Bose-Gas aus N nichtwechselwirkenden Bosonen mit Einteilchen-Energie $\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ im Volumen $V = L^2$.

1) Zeigen Sie, daß in dieser Dimension keine Bose-Einstein-Kondensation bei $T = 0$ stattfinden kann, indem Sie die Besetzungszahlen in angeregten Zuständen berechnen.

Nun sei das Bose-Gas in einer magnetischen Falle gefangen. In guter Näherung kann angenommen werden, daß sich die Atome in einem harmonischen Oszillator-Potential mit Eigenfrequenz ω_{Falle} befinden.

2) Geben Sie die Energiewerte an und zeigen Sie, daß die Entartung zum Energiewert E linear in E ist.

3) Wir nehmen an, daß das Potential flach ist, so daß die Energie $\hbar\omega_{\text{Falle}}$ sehr klein ist und wir damit die Verteilung der Energieeigenwerte als kontinuierlich annehmen können. Berechnen Sie in diesem Limes (Krümmung des Potentials $\to 0$, d. h. Volumen $V \to \infty$) die Zustandsdichte. Ist jetzt eine Bose-Einstein-Kondensation möglich? Berechnen Sie die Kondensationstemperatur T_0.

Viel Spaß!