M.-A. Lawn http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_SS05/

Übungsblatt 4

Besprechung: 9. Mai - 13. Mai

4.1 Stirling-Formel

Integrale der Form $I_N = \int_b^a dz f(z) e^{-Ng(z)}$ kommen in der statistischen Physik häufiger vor. Dabei ist N eine große natürliche Zahl. $g(z)$ habe an der Stelle $z = z_s$ ein einziges Minimum in dem Intervall (a, b), und $f(z_s) \neq 0$. Um dieses Integral näherungsweise zu berechnen, benutzt man die sogenannte Sattelpunktsintegration:

- Man entwickelt die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ um $z = z_s$ und führt die Substitution $x = N^{\frac{1}{2}}(z - z_s)$ ein.
- Für $N \gg 1$ berücksichtigt man nur den Term $f(z_s)$ und die zwei ersten Terme der Taylor-Entwicklung von $g(z)$.

Auf diese Weise nimmt das Integral I_N die Form eines Gauß-Integrales an.

a) Finden Sie auf die angegebene Weise eine allgemeine Näherungsformel für I_N.
Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$.

b) Für alle $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) > 0$, ist die Gammafunktion definiert durch $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^z$. Zeigen Sie daß daraus die Gleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ sowie $\Gamma(1) = 1$ folgt. Zeige weiter, daß $\Gamma(N+1) = N!$ für $N = 1, 2, 3...$ gilt.

c) Gewinnen Sie mit Hilfe der Sattelpunktsintegration die Stirling-Formel, wobei $N \gg 1$:

$$N! \sim \sqrt{2\pi N}(\frac{N}{e})^N.$$

4.2 Joule-Thomsom Effekt und Joule-Zyklus

Man geht beim Joule-Thomsom-Effekt von einem aus zwei Kammern zusammengesetzten völlig wärmeisolierten System aus. Der Druck in jedem Kammer sei konstant $p_1 = Const$, $p_2 = Const$, jedoch gelte $p_1 > p_2$. Beide Kammern werden von einer Drossel getrennt, durch die sich das Gas aus dem Volumen V_1 adiabatisch in das Volumen V_2 entspannen kann. Wir gehen hier von einem idealen Gas aus.

a) Zeigen Sie, daß die Enthalpie H konstant bleibt und daß der Prozeß irreversibel verläuft.

b) Der Joule-Thomsom-Koeffizient ist definiert als $\delta = (\frac{\partial T}{\partial p})_H$. Zeigen Sie, daß $\delta = [T(\frac{\partial V}{\partial T}_p) - V]/c_p$, und daß $\delta = 0$ für ein ideales Gas ist.

c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad des Joule-Thomson-Zyklus als Funktion von p_1 und p_2 (siehe Abbildung 1).

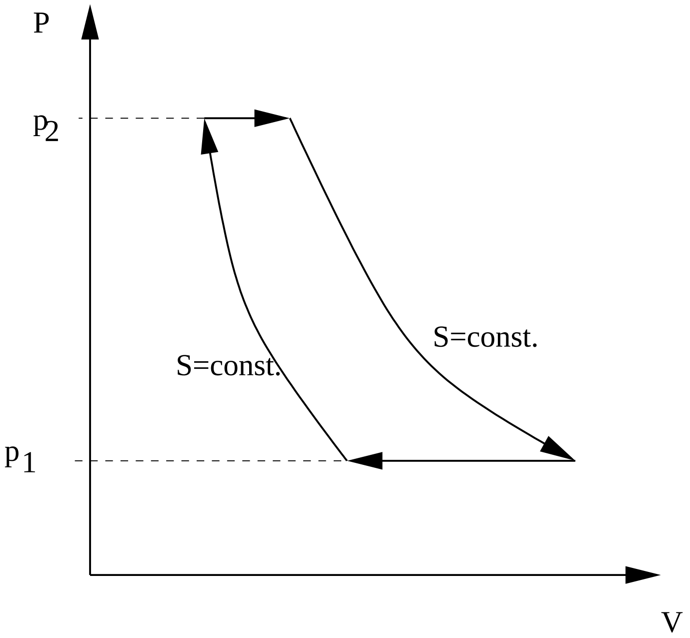

Abbildung 1: Joule-Thomson-Zyklus

4.3 Elastischer Draht

Auf einem elastischen Draht der Länge L wirkt eine Kraft K. Im Hookeschen Bereich gilt die Zustandsgleichung

$$K = k(L - L_0) + A_1(T - T_0),$$

wobei T die Temperatur ist, L_0 und T_0 die Referenzlänge bzw. Temperatur für $K = 0$ und k und A_1 Konstante sind.

a) Gib das Differential der inneren Energie dU in Abhängigkeit von den thermodynamischen Differentialen dS und dL an, wobei S die Entropie ist. Gib eine Formel für die Entropie S an.

b) Konstruiere ein thermodynamisches Potential, für das die Fundamentalvariablen L und T sind. Welche Maxwell-Relationen kann man daraus herleiten?

c) Berechne den T-Ausdehnungskoeffizienten $\frac{1}{L}(\frac{\partial L}{\partial T})_K = \alpha_K$ bei konstanter Kraft und die Dehnbahrkeit $\frac{1}{L}(\frac{\partial L}{\partial K})_T = \kappa_T$.

4.4 Thermodynamische Potentiale und ideales Gas

In Aufgabe 3.3 zeigten wir, daß die Entropie eines idealen Gases bei konstantem Teilchenzahl gegeben ist durch

$$S(T, V) = S_0 + Nk_B[\frac{f}{2}\ln\frac{T}{T_0} + \ln\frac{V}{V_0}].$$

a) Geben Sie mit Hilfe der beiden Zustandsgleichungen die Helmholtzsche freie Energie und die Gibbssche freie Energie an. Berechnen Sie dann das chemische Potential.

b) Leiten Sie aus dem Ausdruck für F wieder die thermische Zustandsgleichung her.

Viel Spaß!