Vorlesung Theoretische Physik IV - SS 2005 - Prof. H. Kroha

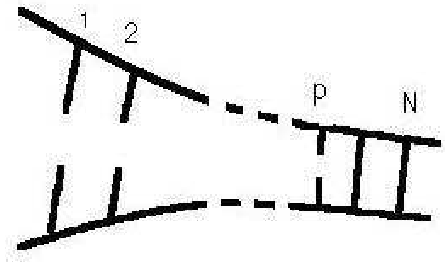
M.-A. Lawn   http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_SS05/

Übungsblatt 7

Besprechung: 6. Juni - 10. Juni

7.1 Reißverschlußmodell für DNS-Moleküle

Die Mikrozustände eines doppelstrangigen Polymers (DNS) werden in einem einfachen Modell wie folgt festgelegt:
-Die beiden Stränge können an den Stellen $1, 2, \ldots, N$ Bindungen miteinander eingehen. Eine geschlossene Bindung hat die Energie $\varepsilon_0 = 0$, eine geöffnete die Energie $\varepsilon \neq 0$.
-Die $p-$te Bindung kann nur geöffnet werden, wenn alle Bindungen $1, 2, \ldots, p-1$ offen sind. Die $N-$te Bindung kann nicht geöffnet werden.



1) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_C(T)$.

2) Berechnen Sie die mittlere Zahl $\langle n \rangle$ der offenen Bindungen als Funktion von $x = e^{-\beta\varepsilon}$.

3) Bestimmen Sie daraus den Anteil $\langle n \rangle / N$ der offenen Bindungen im Limes $N \to \infty$ für $x < 1$ und für $x > 1$ und zeichnen Sie $\langle n \rangle / N$, $N \to \infty$ als Funktion von x.

7.2 Zweiatomiges Molekül

Ein zweiatomiges Molekül besitzt Translations-, Schwingungs- und Rotationsfreiheitsgrade. Es soll die spezifische Wärme eines idealen Gases von N derartigen Molekülen berechnet werden. Der Beitrag der Translationsbewegung ist $C_V^{transl} = 3Nk_B/2$

1) Die Energieniveaus der Schwingungszustände des Moleküls sind

$$E_n^{osz} = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2}),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Berechnen Sie die Zustandssumme Z_C^{osz}, die innere Energie U^{osz} und die spezifische Wärme C_V^{osz} für den Schwingungsfreiheitsgrad. Was ergibt sich für hohe bzw. tiefe Temperaturen (Skizze)?

2) Die Rotationsenergieniveaus des Moleküls sind gegeben durch

$$E_l^{rot} = \frac{J^2}{2I}, \; J^2 = \hbar l(l+1), \; l = 0, 1, 2, \ldots$$

mit dem Trägheitsmoment I. Geben Sie die Zustandssumme Z_C^{rot} für den Rotationsanteil an. Beachten Sie die Entartung der Drehimpulszustände l. Für hohe Temperaturen kann die Näherungsformel $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \simeq \int_0^\infty dx\, f(x) + \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12} f'(0) + \frac{1}{720} f^{(3)}(0)$ (Euler-MacLaurin) verwendet werden. Für tiefe Temperaturen werden nur die ersten beiden Terme der Summe ausgewertet. Berechnen Sie den Rotationsanteil der spezifischen Wärme C_V^{rot} in den beiden Grenzfällen.

3) Zeigen Sie qualitativ, daß $E^{rot} \ll E^{osz}$ und skizzieren Sie detailliert die spezifische Wärme $C_V = C_V^{transl} + C_V^{osz} + C_V^{rot}$ eines derartigen Gases als Funktion der Temperatur.

7.3 Barometrische Höhenformel

Ein ideales Gas mit N Teilchen befinde sich in einem Zylinder der Grundfläche A und der Höhe h bei Temperatur T. Die Zylinderachse verlaufe parallel zum homogenen Schwerefeld der Erde.

1) Wie sieht die Hamilton-Funktion des i-ten Teilchens aus?

2) Berechnen Sie den Druck im Gravitationsfeld in Abhängigkeit von der Höhe.

Tipp:

(a) Drücken Sie die Teilchendichte $\rho(r_1, \ldots, r_N, p_1, \ldots, p_n)$ des Systems zuerst mittels der Einteilchendichten $\rho_i(r_i, p_i)$ und dann mittels der Einteilchenszustandssumme $Z_C(T, V, 1)$ aus.

(b) Berechnen Sie $Z_C(T, V, 1)$.

(c) Drücken Sie $\rho_i(r)$ mittels Integration von $\rho(r_1, \ldots, r_N, p_1, \ldots, p_n)$ aus und ersetzen Sie $\rho(r_1, \ldots, r_N, p_1, \ldots, p_n)$ durch den Ausdruck aus (a).

(d) Berechnen Sie aus $\rho(r) = N\rho_i(r)$ den Druck des idealen Gases.

Viel Spaß!