Vorlesung Theoretische Physik IV - SS 2005 - Prof. H. Kroha

M.-A. Lawn   http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_SS05/

Übungsblatt 9

Besprechung: 20. Juni - 24. Juni

9.1 Sommerfeld-Entwicklung

In der Vorlesung wurde die Sommerfeld-Entwicklung für tiefe Temperaturen hergeleitet.

1) Zeigen Sie, daß bis zur Ordnung T^4

$$\int_0^\infty d\varepsilon\, f(\varepsilon)g(\varepsilon) = \int_0^\mu d\varepsilon\, g(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6}g'(\mu)(k_\mathrm{B}T)^2 + \frac{7\pi^4}{360}g^{(3)}(\mu)(k_\mathrm{B}T)^4 + \mathcal{O}(T^6)$$

gilt, mit der Fermi-Funktion $f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp((\varepsilon-\mu)/(k_\mathrm{B}T))+1}$ und g einer beliebigen Funktion, für die $g(0) = 0$ gilt.

In dieser Form lassen sich die Erwartungswerte aller nur von den Einteilchenenergien abhängigen Größen schreiben.
Wir betrachten ein System, das die Zustandsdichte $\rho(\varepsilon)$ habe.

2) Geben Sie eine Formel für den Erwartungswert $\langle F\rangle$ einer Größe an, die nur von der Einteilchenenergie abhängt, und zwar in der Form $F(\varepsilon)$. Berechnen Sie dann beispielsweise die Einteilchenenergie ($F(\varepsilon) = \varepsilon$) und die Teilchenzahl ($F(\varepsilon) =?$).

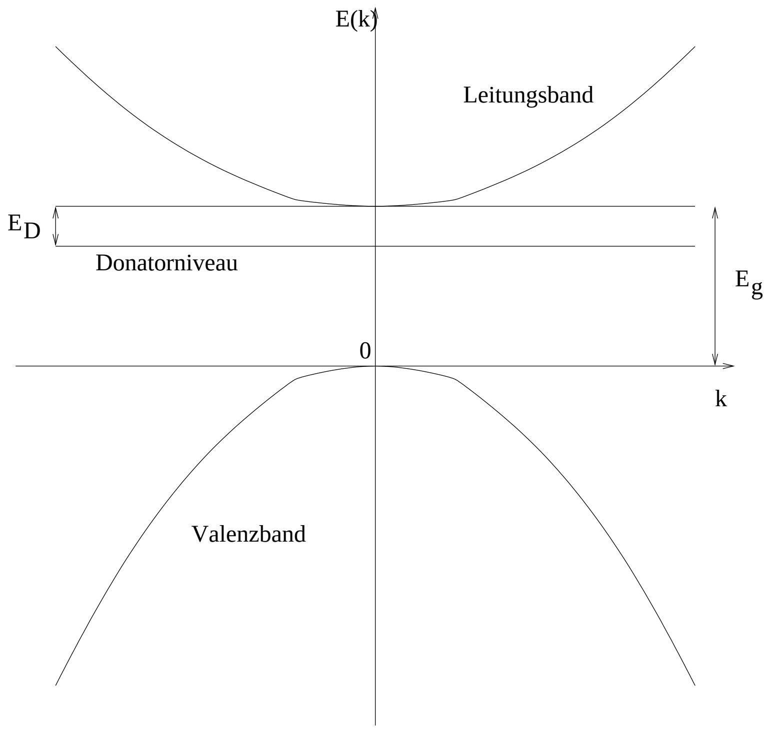
3) Geben Sie eine Definition der Fermi-Energie ε_F durch Betrachtung der Teilchenzahl bei $T = 0$ an.

4) Betrachten Sie wieder die Teilchenzahl, diesmal für niedrige aber endliche Temperaturen, und berechnen Sie daraus die Koeffizienten der Entwicklung $\mu = \epsilon_\mathrm{F} + aT + bT^2 + cT^3 + dT^3 \ldots$ (also bis Ordnung 4) in Termen der Fermi-Energie.
Vorsicht: Achten Sie auf die Integrationsgrenzen!!

5) Berechnen Sie den Pauli-Druck bis zur zweiten Ordnung in Abhängigkeit von der Temperatur und verifizieren Sie, daß man bei $T = 0$ tatsächlich den Fermi-Druck bekommt (vergleichen Sie mit Aufgabe 8.1).

9.2 Halbleiter

Man betrachte zuerst das einfache Modell eines reinen Halbleiters mit zwei Bändern und einer Bandlücke E_g („Gap-Energie") zwischen Valenz- und Leitungsband. Leitungselektronen (Masse m_e) und Löcher (Masse m_L) unterliegen Fermi-Statistik. Sei ε die Energie eines Elektrons im Leitungsband. Um die Maxwell-Boltzmann-Verteilung benutzen zu können, nimmt man ferner an, daß $\varepsilon - \mu \gg k_\mathrm{B}T$ (d.h. $E_\mathrm{g} \gg k_\mathrm{B}T$) und $E_\mathrm{g} - \mu \gg k_\mathrm{B}T$, was für solche Halbleiter sowohl für tiefe Temperaturen wie für Zimmertemperatur wahr ist. Der Energie-Nullpunkt falle mit der Oberkante des bei $T = 0$ gefüllten Valenzband zusammen (siehe Zeichnung).



1) Berechnen Sie die Teilchendichte für die Elektronen und für die Löcher.

2) Berechnen Sie das chemische Potential und zeigen Sie, dass die Fermi-Energie sich genau in der Mitte des Gaps befindet.

3) Berechnen Sie die spezifische Wärmekapazität c_V und zeigen Sie, dass sie „exponentiell verschwindet".

Wir nehmen nun das Beispiel eines mit Fremdatomen (hier mit Donatoren) der Konzentration n_{D} dotierten Halbleiters. Die Fremdatome führen zu diskreten Energieniveaus im Abstand ε_{D} unterhalb der Leitungsbandkante. Es gelte $E_{\mathrm{g}} > \varepsilon_{\mathrm{D}}$. Weiter setzen wir wieder voraus, daß $E_{\mathrm{g}} \gg k_{\mathrm{B}}T$. Außerdem ist diesmal $\mu \simeq E_{\mathrm{g}}$

4) Berechnen Sie die Dichte n_{D}.

5) Berechnen Sie die Dichte n_{e} und das chemische Potential unter der Bedingung

   a) $\exp\left(\frac{\mu - E_{\mathrm{g}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \exp\left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{D}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \gg 1$

   b) $\exp\left(\frac{\mu - E_{\mathrm{g}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \exp\left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{D}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \ll 1$

   Was bedeutet das Ergebnis physikalisch? Was folgt diesmal daraus für die Fermi-Energie?

Viel Spaß!