Universität Bonn 19.10.2010
Physikalisches Institut
Prof. Dr. J. Kroha, K. Ballmann, R. Katzer
http://www.th.physik.uni-bonn.de/th/groups/kroha/teaching/StatMech_WS10/

Theoretische Physik IV — WS 2010/11

Übungsblatt 2

(Abgabe am 26. Oktober, Besprechung vom 26. bis 28. Oktober)

2.1 Legendre-Transformation (10 Punkte)

Sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion von n Variablen x_i, $i = 1, \ldots, n$.
Die **Legendre-Transformierte** von f ist dann gegeben durch

$$f - y_i x_i \,,$$

mit $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Die Variable x_i wird dabei durch die Variable y_i ersetzt.

(a) Berechne die Legendre-Transformierte von

(i) $f(x) = a + bx^2$

(ii) $g(x) = -\frac{1}{x}$, $x > 0$.

Zeige, dass die Legendre-Transformation involutiv ist, d.h. zweifache Anwendung der Legendre-Transformation ergibt wieder die Ausgangsfunktion.

(b) Sei $U(S, V, N)$ die innere Energie eines Systems. Die thermodynamischen Potentiale Enthalpie $H(S, p, N)$, freie Energie $F(T, V, N)$ und freie Enthalpie $G(T, p, N)$ lassen sich als Legendre-Transformierte von U bzgl. S, V bzw. S und V ausdrücken.
Berechne diese Legendre-Transformierten und gebe auch jeweils die differentielle Form an.

(c) Die innere Energie U ist eine extensive Größe. Trifft dies auch für die anderen thermodynamischen Potentiale zu?

2.2 Ideales Gas (10 Punkte)

Ist die Entropie eines Systems als Funktion der extensiven Zustandsgrößen auf Grund einer mikroskopischen Theorie bekannt, so können mit Hilfe der themodynamischen Fundamentalbeziehung die Zustandsgleichungen explizit angegeben werden. Wir wollen hier nun den umgekehrten Weg betrachten:
Für ein ideales Gas seien die beiden Zustandsgleichungen

$$U = \frac{f}{2} N k_B T \quad \text{und} \quad pV = N k_B T$$

experimentell gegeben, wobei k_B die Boltzmann-Konstante und f die Zahl der Freiheitsgrade pro Molekül bezeichnet (z.B. $f = 3$ für ein einatomiges Gas).

(a) Zeige, ausgehend von der differentiellen Form der Fundamentalbeziehung $dS = 1/T\, dU + p/T\, dV - \mu/T\, dN$, dass bei einer adiabatischen Zustandsänderung, d.h. $dS = \frac{\delta Q}{T} = 0$, mit konstanter Teilchenzahl N gilt:

$$pV^{(f+2)/f} = const. \quad \text{und} \quad VT^{f/2} = const.$$

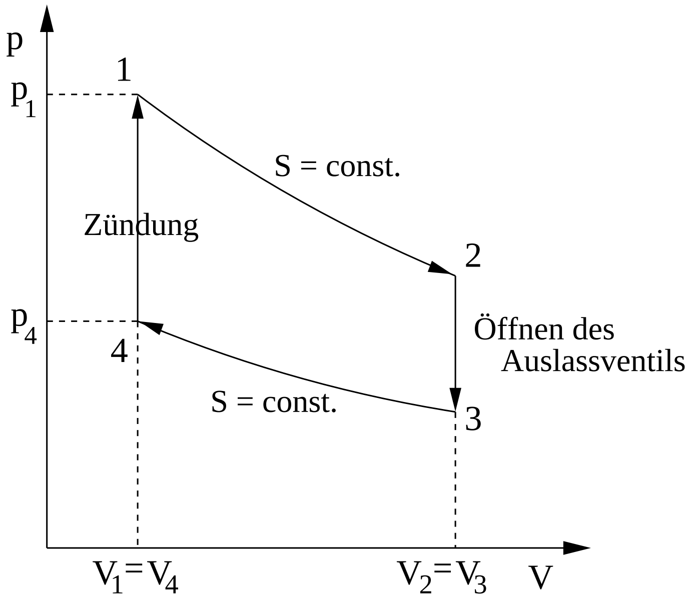
(b) Zeige, dass die Entropie des idealen Gases gegeben ist durch

$$S(U,V,N) = S_0 \frac{N}{N_0} + N k_B \left[\frac{f}{2} \ln \frac{U}{U_0} + \ln \frac{V}{V_0} - \frac{f+2}{2} \ln \frac{N}{N_0} \right] ,$$

wobei S_0, U_0, V_0 und N_0 Integrationskonstanten sind.

Hinweis: Integriere die Gleichung $ds = 1/T\, du + p/T\, dv$ mit $s = S/N$, $u = U/N$ und $v = V/N$. Wie ergibt sich diese Gleichung aus der thermodynamischen Fundamentalbeziehung?

2.3 Otto-Motor (10 Punkte)



Ein Otto-Verbrennungsmotor wird idealisiert durch den hier gezeigten Kreisprozess beschrieben. Die Füllung des Zylinders mit einem Benzin-Luft-Gemisch erfolgt bei Punkt 3. Als Arbeitssubstanz soll ein ideales Gas angenommen werden.
Berechne den Wirkungsgrad $\eta = \Delta W / \Delta Q_{41}$ in Abhängigkeit vom Verdichtungsverhältnis $\epsilon = V_1/V_2$.

Hinweis: Verwende die Ergebnisse aus Aufgabe 2.2.