Übertragung der Supersymmetrie–Brechung durch ein fünfdimensionales Hypermultiplett

von
Gabriele Honecker

Diplomarbeit in Physik
angefertigt im
Physikalischen Institut

vorgelegt der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität
Bonn

im Januar 1999

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. Hans–Peter Nilles
Koreferent: Prof. Günter von Gehlen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik werden die starke, elektromagnetische und schwache Wechselwirkung durch Quantenfeldtheorien beschrieben. In diesem Bild werden die Kräfte zwischen den Teilchen (Quarks, Leptonen) durch Austausch von Eichbosonen (Photonen, Gluonen, $W^{\pm}$- und Z-Bosonen) vermittelt. Die vierte fundamentale Wechselwirkung, die Gravitation, hingegen wird klassisch durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben; das heißt, die Anziehung zwischen massiven Teilchen entsteht durch eine Krümmung des Raumes. Es erscheint natürlich, im Rahmen einer quantisierten Theorie diese Art der Wechselwirkung als Austausch eines Spin 2-Bosons (Graviton) zwischen den Massen zu deuten.

Eines der großen Hindernisse bei der Quantisierung der Gravitation ist die fehlende Renormierbarkeit. Ein vielversprechender Ansatz für die Lösung dieses Problems ist die Betrachtung räumlich ausgedehnter Objekte anstelle von Punkt-Teilchen. In den letzten fünfzehn Jahren wird daher Superstring-Theorie als mögliche Vereinigungstheorie aller Wechselwirkungen betrachtet. Ein String ist dabei ein eindimensionales Objekt, das u.a. ein masseloses Spin 2-Teilchen als Anregungszustand enthält.

Allerdings existiert nicht eine einzige, sondern fünf verschiedene Superstring-Theorien, die alle in zehn Dimensionenen definiert sind. Während die sogenannte Typ I-Theorie sowohl offene als auch geschlossene Strings enthält, beschreiben die anderen vier Theorien nur geschlossene Strings. Die Typ IIA-Theorie ist im Gegensatz zu den anderen Theorien nichtchiral. Desweiteren unterscheiden sich die einzelnen Superstring-Theorien in der Anzahl der Superladungen und in der Wahl der Eichgruppe. Die beiden heterotischen sowie die Typ I-Theorie sind $N = 1$ supersymmetrisch, während Typ IIA und IIB $N = 2$ Supersymmetrie besitzen.

Phänomenologisch ist der heterotische Superstring mit Eichgruppe $E_8 \times E_8$ den anderen Theorien vorzuziehen. Bei geeigneter Wahl der Komaktifizierung auf vier Dimensionen erhält man ein Teilchenspektrum, das einer supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells ähnlich ist. Desweiteren stimmt die Vorhersage der Vereinigung der Niederenergie-Eichkopplungen gut mit denen aus Super-GUT-Theorien überein. Aus diesen Gründen könnte man annehmen, daß der heterotische $E_8 \times E_8$-String die gesuchte Vereinigungstheorie ist, obwohl die anderen vier Superstrings als perturbative Theorien der Quantengravitation gleichermaßen akzeptabel sind. Es stellt sich jedoch heraus, daß die fünf verschiedenen Superstring-Theorien nicht unabhängig voneinander sind. Zwischen ihnen existieren sogenannte „Dualitäten", die das gesamte (auch nichtperturbative) Spektrum einer Theorie auf das einer anderen Theorie abbilden. So sind die Typ IIA- und die Typ IIB-Theorie äquivalent, wenn man eine Theorie auf einem Kreis mit Radius R und die andere auf einem Kreis mit Radius $1/R$ kompaktifiziert. Eine ebensolche Beziehung existiert zwischen den beiden heterotischen Theorien. Man sagt, daß die beiden Typ II-Theorien sowie die beiden heterotischen Theorien jeweils „T-dual“ zueinander sind. Von den verbleibenden drei unterschiedlichen Superstring-Theorien sind vermutlich zwei (Typ I und die heterotische $SO(32)$-Theorie) durch die „S-Dualität“ miteinander verbunden, unter der eine Theorie mit starker Stringkopplung in die andere Theorie mit schwacher Kopplung übergeht. Gestützt wird diese Vermutung u.a. dadurch, daß sowohl der Typ I als auch der heterotische $SO(32)$-String $D = 10, N = 1$ Supergravitation/Super-Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe $SO(32)$ als Niederenergie-Feldtheorie besitzen.

Die Entdeckung der unterschiedlichen Dualitäten zwischen den einzelnen Superstring-Theorien führte zu der Vermutung, daß eine übergeordnete Theorie existiert, welche die fünf Superstrings als Entwicklungen um spezielle Vakua beinhaltet. Als möglicher Niederenerige-Limes einer solchen Vereinigungstheorie wurde die bereits 1978 konstruierte elfdimensionale Supergravitation [2] kurzzeitig diskutiert. Fordert man, daß in einer physikalischen Theorie keine Teilchen mit Spin größer als zwei auftreten sollen, so ist dies die höchstdimensionale erlaubte Supergravitation [17]. $D = 11$ Supergravitation wurde jedoch bald wieder als Niederenergie-Limes einer vereinigenden Theorie verworfen, da man durch Kompaktifizieren auf (randlosen) Mannigfaltigkeiten keine chirale, also paritätsverletzende Feldtheorie in vier Dimensionen erhalten kann.

Erst 1995 gewann die elfdimensionale Supergravitation wieder an Bedeutung [31, 36], da man seitdem vermutet, daß der Limes starker Kopplung des Typ IIA-Strings im Niederenergie-Bereich durch $D = 11$ Supergravitation beschrieben wird, wobei dem Dilaton der Stringtheorie, das mit der Stärke der Stringkopplung assoziiert ist, die Rolle der elften Koordinate zufällt. Zur gleichen Zeit wurde von E. Witten [36] erstmals vermutet, daß der Niederenergie-Limes des stark gekoppelten heterotischen $E_8 \times E_8$ Strings durch die Kompaktifizierung von $D = 11$ Supergravitation auf einer verallgemeinerten Mannigfaltikeit mit Rand, einer „Orbifold“, gegeben ist.

Seit der Entdeckung des Zusammenhangs zwischen den Niederenergie-Limites des stark gekoppelten Typ IIA- sowie des heterotischen $E_8 \times E_8$-Strings und elfdimensionaler Supergravitation erwartet man nun, daß eine fundamentale Vereinigungstheorie neben den fünf Superstrings auch $D = 11$ Supergravitation als spezielles Vakuum besitzt. Diese bis heute unbekannte Theorie wurde von E. Witten erstmals mit dem Namen „M-Theorie“ bezeichnet [25].

Unter den Stringtheorien spielt die heterotische $E_8 \times E_8$-Theorie bei starker Kopplung eine phänomenologisch herausragende Rolle. Ein einfaches Modell der Stringtheorie-Phänomenologie erhält man, wenn man die heterotische $E_8 \times E_8$ M-Theorie auf $\mathbb{R}^4 \times CY^6 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ mit einer isotropen sechsdimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit CY^6 betrachtet [37]. In diesem Modell können aus der elfdimensionalen Gravitationskonstante, dem Abstand der Ränder und dem Volumen der Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit die vierdimensionale reduzierte Planck-Masse, die GUT-Skala und die GUT-Kopplungskonstante bestimmt werden. Insbesondere stellt man fest, daß die Vorhersage für die vierdimensionale Planck-Masse im Fall des stark gekoppelten heterotischen $E_8 \times E_8$-Strings besser ist als für den schwach gekoppelten Fall, und daß der Abstand der Ränder um etwa eine Größenordnung größer ist als die Längenskala der Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit [19, 20].

Da die Orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ größer als der mittlere Radius der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit CY^6 ist, erscheint die heterotische $E_8 \times E_8$ M-Theorie in einem mittleren Energie-Bereich zwischen der schwachen und der Planck-Skala fünfdimensional mit vierdimensionalen Rändern

(Wänden). In diesem Zwischenstadium existieren in fünf Dimensionen Supergravitation und ein universelles Hypermultiplett. Abhängig von der gewählten Kompaktifizierung können im Inneren Vektormultipletts und zusätzliche Hypermultipletts auftreten [1]. An den Rändern existieren Yang-Mills-Felder und chirale Felder, wobei der genaue Feldinhalt wiederum von der speziellen Kompaktifizierung abhängt.

Durch Kompaktifizierung der heterotischen $E_8 \times E_8$ M-Theorie auf $\mathbb{R}^4 \times CY^6 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ erhält man eine effektive vierdimensionale Niederenergie-Feldtheorie mit $N = 1$ Supersymmetrie. Da die Generatoren der Supersymmetrie-Transformationen mit dem Quadrat des Impulsoperators vertauschen, besitzen alle Teilchen eines Multipletts die gleiche Masse. In einer phänomenologisch relevanten Theorie muß daher die Supersymmetrie an der schwachen Energie-Skala gebrochen sein, wobei spontane Supersymmetrie-Brechung wiederum problematisch ist, weil hier Bosonen und Fermionen im Mittel weiterhin die gleiche Masse besitzen.

Ein mögliches Szenarium stellt die Supersymmetrie-Brechung durch ein Gaugino-Kondensat in einem verborgenen Sektor dar, der nur durch Gravitation an den beobachtbaren Sektor koppelt. In einer Theorie mit Wänden erhält der verborgene Sektor eine geometrische Bedeutung: Die Supersymmetrie wird an einer Wand spontan gebrochen; der beobachtbare Sektor befindet sich an der anderen Wand und koppelt nur über die inneren Felder an die gebrochene Supersymmetrie.

Die Analyse der fünfdimensionalen heterotischen $E_8 \times E_8$ M-Theorie stellt sich als sehr kompliziert heraus [5, 6, 13, 14], u.a. weil der genaue Feldinhalt in $D = 5$ von der gewählten Kompaktifizierung der sechs transversalen Dimensionen abhängt. Einige wichtige Erkenntnisse aus der elfdimensionalen Theorie kann man aber bereits durch Modelle simulieren, in denen Gravitation als Vermittler der Supersymmetrie-Brechung durch ein global supersymmetrisches Multiplett ersetzt wird. Das ist das Thema dieser Arbeit.

So tritt in der elfdimensionalen Theorie ein Term in der Lagrange-Dichte auf, der für die Anomalie-Auslöschung an den Rändern notwendig ist und das Quadrat einer Delta-Funktion enthält (zu den Bezeichnungen vgl. [12]):

$$-\frac{1}{12\kappa^2}\int d^{11}x\sqrt{g}\left(G_{ABC11} - \frac{\sqrt{2}}{16\pi}\left(\frac{\kappa}{4\pi}\right)^{2/3}\delta(x^{11})\bar{\chi}^a\Gamma_{ABC}\chi^a\right)^2 . \tag{1.1}$$

Damit die Beschreibung durch eine Niederenergie-Feldtheorie sinnvoll ist, muß die Vierform-Feldstärke G_{IJKL} eine formale Unendlichkeit enthalten, die den zweiten Summanden auslöscht. In einer global supersymmetrischen Theorie auf $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ tritt eine analoge Situation auf: Wird die Theorie zunächst off-shell formuliert und anschließend die Hilfsfelder aufgrund ihrer algebraischen Bewegungsgleichungen eliminiert, so erhält die Wirkung formal $\delta(0)$-Singularitäten, die aber in der ursprünglichen Formulierung nicht auftraten. In den in dieser Arbeit betrachteten Beispielen kann durch Lösen der Bewegungsgleichungen für das Vakuum explizit gezeigt werden, daß die $\delta(0)$-Terme unphysikalisch sind, da ein fünfdimensionaler Skalar einen geeigneten Hintergrundwert erhält.

Desweiteren ist es im Rahmen global supersymmetrischer Modelle möglich, weiche Massen für Skalare an der beobachtbaren Wand zu berechnen, in denen sich die Supersymmetrie-Brechung an der verborgenen Wand manifestiert. Der derzeitig favorisierte Kandidat für Supersymmetrie-Brechung an einer Wand in heterotischer $E_8 \times E_8$ M-Theorie ist ein Gaugino-Kondensat. In [19, 20] wurde festgestellt, daß diesem Kondensat in der fünfdimensionalen Theorie vermutlich der VEV des Hilfsfeldes entspricht, das zum chiralen Multiplett des Modulus-Feldes gehört. Eine wichtige Frage ist nun, wie die Supersymmetrie-Brechung von einer Wand zur anderen transportiert wird. In allgemeinen Modellen mit Gravitation ist eine explizite Berechnung schwierig. In den hier betrachteten vereinfachenden Modellen mit globaler Supersymmetrie ist es jedoch möglich, induzierte weiche Massen an der beobachtbaren Wand störungstheoretisch zu berechnen. In niedrigster Ordnung koppeln die Felder der beobachtbaren Wand an die inneren Felder und diese durch einen zweiten loop an die massenaufgespaltenen Felder der verborgenen Wand. Mit zunehmendem Abstand der Wände wird die Kopplung zwischen den Wänden schwächer und die induzierte Masse verschwindet.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 werden zunächst einige grundsätzliche Eigenschaften globaler Supersymmetrie in vier und fünf Dimensionen zusammengefaßt.

In Kapitel 3 wird ein bereits bekanntes Modell [16] vorgestellt, in dem ein fünfdimensionales Yang-Mills-Multiplett an chirale Randfelder koppelt.

Den wesentlichen Teil dieser Arbeit bilden Kapitel 4 und 5. In Kapitel 4 wird zunächst der nötige Formalismus hergeleitet, um ein fünfdimensionales Hypermultiplett an chirale Randfelder zu koppeln. Insbesondere wird der Mechanismus erklärt, durch den die (in einem Zwischenstadium) auftretende $\delta(0)$-Singularität ausgelöscht wird. In Kapitel 5 wird dann mittels eines konkreten O'Raifeartaigh-Modells die Supersymmetrie an der verborgenen Wand spontan gebrochen und die weiche Masse eines Skalars der beobachtbaren Wand in niedrigster Ordnung berechnet.

Kapitel 2

$N = 1$ Supersymmetrie in vier und fünf Dimensionen

2.1 Supersymmetrie-Algebra und $N = 1$ Multipletts

Supersymmetrie ist eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen. Diese Symmetrie wird durch Generatoren Q erzeugt, die als Spin-1/2-Zustände unter der Lorentz-Gruppe transformieren. Die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe kann nicht erweitert werden, ohne die physikalische Vorhersagekraft der Theorie zu stören. Da die Generatoren der Supersymmetrie fermionisch sind, kann man stattdessen den Begriff der Lie-Algebra verallgemeinern und Antikommutatoren hinzufügen. Dadurch erhält man die Super-Poincaré-Algebra, die eine „graduierte Lie-Algebra" ist. Sie enthält neben den Kommutatoren der Poincaré- (Generatoren: P, J) und der Automorphismen-Algebra Kommutatoren und Antikommutatoren folgender Struktur:

$$\begin{aligned} \{Q, Q\} &= P + Z \\ [Q, P] &= 0 \\ [Q, J] &= Q. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Z ist dabei eine zentrale Ladung. Die vollständige Struktur befindet sich in Anhang (C). Die Generatoren Q transformieren einen bosonischen Zustand in einen fermionischen und umgekehrt. Dadurch enthält eine supersymmetrische Theorie immer gleich viele bosonische und fermionische Freiheitsgrade. Da die Q mit dem Impulsoperator kommutieren, also auch $[Q, P^2] = 0$, haben alle Teilchen, die durch Supersymmetrie-Transformationen ineinander übergehen, die gleiche Masse. Eine Theorie, die die kleinstmögliche Anzahl an fermionischen Generatoren zuläßt, wird als $N = 1$ supersymmetrisch bezeichnet, die mit der nächsthöheren Anzahl als $N = 2$ supersymmetisch usw. Da jedes Q Spin-1/2 besitzt, erhöht jede Supersymmetrie-Transformation den Teilchenspin um diese Einheit. Die Existenz von Teilchen mit Spin > 2 führt zu Inkonsistenzen in lokalen Feldtheorien. Deshalb ist die Anzahl der Susy-Generatoren nach oben beschränkt. In vier Dimensionen ist $N = 1, \ldots 8$ erlaubt, in fünf $N = 1, \ldots 4$ und in höheren Dimensionen entsprechend kleinere Werte. In global supersymmetrischen Theorien verkleinert sich die Anzahl dadurch, daß nur Teilchen mit Spin $\leqslant 1$ auftreten dürfen. In dieser Arbeit werden nur $N = 1$ supersymmetrische Theorien betrachtet, da sie im Gegensatz zu $N \geqslant 2$ chirale Fermionen enthalten.

Die Supersymmetrie-Algebra in vier Dimensionen lautet [29]

$$\left\{Q_i, \bar{Q}_j\right\} = 2\left(\delta_{ij}\gamma^m P_m + i\mathrm{Im}(Z_{ij}) + i\gamma_5 \mathrm{Re}(Z_{ij})\right). \tag{2.2}$$

Hierbei wurden die chiralen durch Majorana-Fermionen ersetzt. Die Indizes i, j nehmen die Werte $1 \ldots N$ an. $m = 0 \ldots 3$ ist der Raumzeit-Index, und $\mathrm{Re}(Z_{ij})$, $\mathrm{Im}(Z_{ij})$ bezeichnet Real- und Imaginärteil der Zentralen Ladung. Wegen $Z_{ij} = -Z_{ji}$ treten Zentrale Ladungstransformationen nur für erweiterte Supersymmetrien auf. In fünf Dimensionen gibt es keine Majorana-Fermionen (vgl. Tabelle (B.1)). Stattdessen gibt es Spinoren, die „symplektisch reell" sind. Sie erfüllen die Bedingung

$$\lambda_i = \Omega_{ij} C \bar{\lambda}_j^T, \tag{2.3}$$

wobei $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ eine symplektisch invariante Metrik ist. Mit diesen pseudoreellen Spinoren lautet der Antikommutator in fünf Dimensionen [30]

$$\left\{Q_i, Q_j^T\right\} = \gamma^M C P_M \Omega_{ij} + C Z_{ij}. \tag{2.4}$$

Z_{ij} ist wieder antisymmetrisch in den Indizes. i, j nimmt hier die Werte $1 \ldots 2N$ an, und $M = 0 \ldots 3, 5$ ist der Raumzeit-Index.

In vier Dimensionen kann ein Multiplett im Superraum-Formalismus in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} V\left(x^m, \theta, \theta^*\right) = {} & C - i\theta^T c\chi - i\chi'^\dagger c\theta^* \\ & - \frac{1}{2} i\theta^T c\theta \left(M - iN\right) - \frac{1}{2} i\theta^\dagger c\theta^* \left(M + iN\right) + \theta^\dagger \bar{\sigma}^m \theta A_m \\ & - i\left(\theta^\dagger c\theta^*\right)\theta^T \left[c\lambda - \frac{1}{2} i\left(\bar{\sigma}^m\right)^T \partial_m \chi'^*\right] \\ & + i\left(\theta^T c\theta\right)\theta^\dagger \left[c\lambda'^* + \frac{1}{2} i\bar{\sigma}^m \partial_m \chi\right] \\ & + \frac{1}{2}\left(\theta^T c\theta\right)\left(\theta^\dagger c\theta^*\right)\left(D + \frac{1}{2}\partial_m \partial^m C\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Diese Entwicklung beinhaltet die bosonischen Felder C, D, M, N und A_m sowie die fermionischen Felder χ, χ', λ und λ', die alle von x^m abhängen. Der Superraum wird durch die Raumzeit-Koordinaten x^m und die Weyl-Fermionen θ, θ^* aufgespannt. Das allgemeine Superfeld ist reduzibel. Irreduzible Multipletts erhält man durch eine zusätzliche Bedingung. Ein chirales Superfeld ϕ erfüllt $D_{\theta^*}\phi = 0$. Es enthält ein komplexes skalares Feld φ, ein Weyl-Fermion ψ und ein komplexes Hilfsfeld F. Die Transformationen der Komponenten-Felder sind in (C.16) aufgelistet. Ein Vektor-Superfeld V erfüllt die Realitätsbedingung $V = V^\dagger$. In der Wess-Zumino-Eichung sind seine Komponenten ein Vektor A^m, ein Weyl-Fermion λ und ein reelles Hilfsfeld D. Das Vektormultiplett transformiert sich in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe. Die Eichindizes sind in allen Formeln unterdrückt ($A^m = A^{mA} t^A$, wobei t^A die Generatoren der Eichgruppe sind). Die Transformationen sind in (C.15) aufgelistet.

Abgesehen vom Gravitationsmultiplett bilden das chirale und das Vektormultiplett die einzigen masselosen $N = 1$ Multipletts in vier Dimensionen [30].

In fünf Dimensionen gibt es vier verschiedene masselose $N = 1$ Multipletts [30]. In der Wess-Zumino-Eichung enthält das Yang-Mills-Multiplett ein reeller Skalar Φ, ein Paar symplektischer Majorana-Spinoren λ^i $(i = 1, 2)$, einen Vektor A^M und drei reelle Hilfsfelder X^a, die sich in der adjungierten Darstellung der $USp(2)$ transformieren. Der Supersymmetrie-Transformationsparameter ξ^i ist ebenfalls ein symplektischer Majorana-Spinor. Die Supersymmetrie-Transformationen der Komponentenfelder befinden sich im Anhang in (C.2). Die Algebra schließt in der Wess-Zumino-Eichung nur bis auf Eichtransformationen (siehe C.3). Dieses Phänomen tritt für das vierdimensionale $N = 1$ Yang-Mills-Multiplett ebenfalls auf. Die Zusatzterme sind notwendig, damit die gewählte Eichung unter Supersymmetrie-Transformationen erhalten bleibt [32].

Das Hypermultiplett besteht aus zwei reellen Skalaren A^i $(i = 1, 2)$, einem Dirac-Fermion χ und zwei komplexen Hilfsfeldern F^i, die sich gemäß (C.6) unter Supersymmetrie transformieren. Der Abschluß der Algebra enthält Zentrale Ladungstransformationen (vgl. C.7)

$$\begin{aligned} \delta_z A^i &= -ic^{ij} F^j \\ \delta_z \chi &= \gamma^M \partial_M \chi \\ \delta_z F^i &= -ic^{ij} \partial_M \partial^M A^j . \end{aligned} \tag{2.6}$$

c^{ij} ist dabei antisymmetrisch in den Indizes, und es ist $c^{12} = -1$. Die Zentrale Ladung ist Poincaré- und Supertranslations-invariant:

$$[\delta_\xi, \delta_z] = 0. \tag{2.7}$$

Ihr Quadrat ergibt den d'Alembert-Operator:

$$\delta_z^2 = \partial_M \partial^M . \tag{2.8}$$

Für masselose Felder beinhalten die Transformationen (2.6) die Bewegungsgleichungen der Felder. Im on-shell-Formalismus, in dem die Hilfsfelder ausintegriert werden und die Algebra nur unter Benutzung der Feldgleichungen schließt, treten also keine Zentralen Ladungen auf. Die Identität (2.8) ist notwendig, damit das Multiplett keine physikalischen Zustände mit Spin$\geqslant 1$ enthält [23, 28, 38].

Außer dem Hyper- und dem Yang-Mills-Multiplett existieren in $D = 5$ mit $N = 1$ ein masseloses Gravitationsmultiplett und ein weiteres Yang-Mills-Multiplett mit einer anderen inneren Symmetrie-Gruppe. Es gibt verschiedene massive $N = 1$ Multipletts, unter ihnen auch das Hypermultiplett.

2.2 Spontane Symmetrie-Brechung

Der Hamilton-Operator einer supersymmetrischen Theorie kann durch die Superladungen Q ausgedrückt werden, indem die Supersymmetrie-Algebra (2.2) bzw. (2.4) nach P^M aufgelöst wird: $P^M \sim Q^\dagger \gamma^0 \gamma^M Q$. Der Hamilton-Operator hat also die Form

$$H = \alpha\, Q^\dagger Q. \tag{2.9}$$

Die Proportionalitätskonstante α ist positiv.

Aus dieser Darstellung folgt sofort, daß die Energie eines physikalischen Zustands $|\psi\rangle$ nicht negativ sein kann:

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \alpha\ \langle\psi|Q^\dagger Q|\psi\rangle = \alpha \parallel Q|\psi\rangle \parallel^2 \geq 0. \tag{2.10}$$

Deshalb sind folgende Aussagen äquivalent:

- Die minimale Energie ist null ($E_{min} = 0$).
- Das Vakuum ist supersymmetrisch ($Q|0\rangle = 0$).

Das Vakuum ist nur dann Lorentz-invariant, wenn der Vakuum-Erwartungswert (VEV) jedes Spinors verschwindet. Die Lagrange-Dichte kann zerlegt werden in

$$L = L_{kin} - V_{skalar} + \text{fermionische Terme}. \tag{2.11}$$

Die Vakuum-Energie ist daher $\langle V_{skalar}\rangle$, das Minimum des skalaren Potentials ist die minimale Energie des Modells. In der off-shell-Formulierung der Lagrange-Dichte treten im skalaren Potential Terme auf, die quadratisch in den Hilfsfeldern sind. Wenn eines der Hilfsfelder einen nichtverschwindenden VEV besitzt, ist die Supersymmetrie also spontan gebrochen. Im Fayet-Iliopoulos-Modell [9] erhält das Hilfsfeld des vierdimensionalen Vektormultipletts einen VEV, im O'Raifeartaigh-Modell [21] das Hilfsfeld eines chiralen Multipletts. Das Fermion in dem jeweiligen Multiplett transformiert sich inhomogen (vgl. Anhang C.1 zu den Transformationsgesetzen). Das Fermion der gebrochenen Supersymmetrie heißt „Goldstino“ und bleibt masselos. Es gehört zu demselben Multiplett wie das Hilfsfeld, das einen VEV erhält.

Beide Modelle können auf $N = 1$ Theorien auf einer Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ übertragen werden. Dabei gibt es jedoch einen entscheidenden Unterschied: In der vierdimensionalen Theorie propagiert das Goldstino überall, die Supersymmetrie ist also klassisch im ganzen Raum gebrochen. Auf der Orbifold ist das Goldstino entweder ein inneres Feld, wodurch die Supersymmetrie ebenfalls im ganzen Raum klassisch gebrochen ist, oder es ist ein Wandfeld. Im zweiten Fall ist die Symmetrie klassisch nur auf dieser Wand gebrochen. Strahlungskorrekturen bewirken aber auch hier die Brechung auf der gesamten Orbifold.

Spontane Supersymmetrie-Brechung manifestiert sich in der Aufspaltung skalarer Massen, wobei jedoch die Massen der jeweiligen Superpartner im Mittel gleich bleiben. Dies kann zusammengefaßt werden in der am tree-level gültigen Summenregel [10]:

$$\mathrm{STr}M^2 \equiv \sum_J (-1)^{2J}(2J+1)m_J^2 = 0, \tag{2.12}$$

wobei J der Spin und m_J die Masse des jeweiligen Feldes sind. Wenn das Hilfsfeld D des Vektormultipletts einen VEV erhält, wird diese Beziehung modifiziert (Q ist die Ladungsmatrix der chiralen Superfelder) [18]:

$$\mathrm{STr}M^2 = 2\mathrm{Tr}Q\langle D\rangle. \tag{2.13}$$

Diese Beziehung ist klassisch gültig und kann bei gebrochener Supersymmetrie Strahlungskorrekturen erhalten.

Kapitel 3

Das fünfdimensionale Yang-Mills-Multiplett

3.1 Kompaktifizierung auf der Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$

Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt wurde, besteht das fünfdimensionale Yang-Mills-Multiplett aus einem reellen Skalar Φ, einem Paar symplektischer Majorana-Spinoren $\lambda^{1,2}$, einem Vektor A^M und drei reellen Hilfsfeldern $X^{1,2,3}$ mit den Supersymmetrie-Transformationen (C.2). Die supersymmetrische Lagrange-Dichte dieser Felder lautet

$$\begin{aligned} L_{YM} = \frac{1}{g_5^2}\Big(&-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_{MN})^2 + \mathrm{tr}(D_M\Phi)^2 \\ &+ \ \mathrm{tr}\left(\bar{\lambda} i\gamma^M D_M \lambda\right) + \mathrm{tr}(X^a)^2 - \mathrm{tr}(\bar{\lambda}[\Phi,\lambda])\Big). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die Kopplungskonstante g_5^2 hat die Dimension einer Länge.

Eine vierdimensionale Theorie erhält man dadurch, daß man eine Dimension, die hier x^5 genannt wird, auf einem Kreis S^1 mit Radius ρ kompaktifiziert. Dadurch entsteht eine $N = 2$ supersymmetrische Theorie in vier Dimensionen. Dies bedeutet unabhängig von dem gewählten Multiplett, daß es keine chiralen Fermionen gibt. Wenn man stattdessen die Theorie auf einer Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ betrachtet, erhält man eine $N = 1$ supersymmetrische Theorie, die chirale Fermionen zuläßt. Eine Orbifold erhält man, indem man eine Mannigfaltigkeit durch eine diskrete Symmetrie-Gruppe teilt, die die Metrik erhält [4]. Dadurch bleibt die Struktur der Bewegungsgleichungen der Felder erhalten. Im Fall der $\mathbb{Z}_2$ bedeutet die diskrete Symmetrie, daß die Punkte x^5 und $-x^5$ identifiziert werden, wobei den Feldern eine Parität $P = \pm 1$ unter der Spiegelung zugeordnet wird:

$$a(x^m, x^5) = Pa(x^m, -x^5). \tag{3.2}$$

Die vierdimensionale Theorie enthält dann nur noch die Felder mit gerader Parität. Durch die Identifizierung der Punkte $\pm x^5$ beinhaltet der Halbkreis $0 \leqslant x^5 \leqslant \pi\rho$ die volle physikalische Theorie. Anstatt den vollständigen Kreis zu betrachten (das sogenannte „upstairs" Bild), kann man also im „downstairs" Bild arbeiten, indem man ein Intervall der Länge $l \equiv \pi\rho$ verwendet. In dem Zwischenstadium, in dem die Länge des Intervalls groß ist, verschwindet ein ungerades Feld a an den Wänden $x^5 = 0, l$. Seine Ableitung $\partial_5 a$ besitzt jedoch gerade Parität und ist im allgemeinen von null verschieden. Aus der Forderung, daß die Orbifold Strukturen wie kovariante Ableitung, Supersymmetrie-Transformationen und Lagrange-Dichte erhalten soll, können die Paritäten der Felder festgelegt werden. Der fünfdimensionale Supersymmetrie-Parameter ξ^1 kann in zwei vierdimensionale Weyl-Spinoren (ξ_L^1, ξ_R^1) zerlegt werden. Die Einzelheiten der Zerlegung können Anhang B.2 entnommen werden. Diese beiden Komponenten besitzen unterschiedliche Paritäten unter der Orbifold-Projektion. Wählt man ξ_L^1 als Parameter der $N = 1$ Supersymmetrie-Transformationen an den Wänden, dann besitzen die Felder folgende Paritäten:

Paritäten der Bulk-Felder

	$P = +1$	$P = -1$
ξ	ξ_L^1	ξ_R^1
A^M	A^m	A^5
Φ	$-$	Φ
λ^i	λ_L^1	λ_R^1
X^a	X^3	$X^{1,2}$

(3.3)

Die Paritäten der Komponenten von λ^2 und ξ^2 sind nicht extra in der Tabelle aufgeführt, weil sie durch die symplektische Majorana-Bedingung der Spinoren festgelegt sind. Aus der Komponenten-Schreibweise (B.12) kann man ablesen, daß λ_L^2 ungerade und λ_R^2 gerade Parität hat. Für ξ^2 gilt eine analoge Überlegung.

Bei dieser Wahl der Paritäten verschwindet also der zweite Supersymmetrie-Transformationsparameter $(\xi_R^1 \equiv 0)$ und die Supersymmetrie-Transformationen der geraden Felder lauten

$$\begin{aligned} \delta_\xi A^m &= i\left(\xi_L^{1\dagger}\bar{\sigma}^m\lambda_L^1 - \lambda_L^{1\dagger}\bar{\sigma}^m\xi_L^1\right) \\ \delta_\xi \lambda_L^1 &= \left(s^{mn}F_{mn} - i\left(X^3 - D_5\Phi\right)\right)\xi_L^1 \\ \delta_\xi\left(X^3 - D_5\Phi\right) &= \left(\xi_L^{1\dagger}\bar{\sigma}^m D_m\lambda_L^1 + D_m\lambda_L^{1\dagger}\bar{\sigma}^m\xi_L^1\right) + 2i\left[\Phi, \xi_L^{1\dagger}\lambda_R^1 + \lambda_R^{1\dagger}\xi_L^1\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit $s^{mn} = \frac{1}{4}\left(\sigma^m\bar{\sigma}^n - \sigma^n\bar{\sigma}^m\right)$. Hierbei wurde die symplektische Majorana-Bedingung (B.12) ausgenutzt, um die Transformationen nur durch die linkshändigen Weyl-Spinoren λ_L^1 und ξ_L^1 auszudrücken. Wenn der Kommutator in der letzten Transformation verschwindet, stimmen die Formeln mit den Transformationen (C.15) überein. Da Φ und λ_R^1 ungerade Felder sind, tritt der Kommutator an den Wänden nicht auf. A^5 hat ebenfalls $P = -1$, weshalb an den Wänden kovariante und partielle Ableitung in x^5-Richtung übereinstimmen. Also bilden $\left(A^m, \lambda_L^1, (X^3 - \partial_5\Phi)\right)$ bei $x^5 = 0, l$ ein vierdimensionales Yang-Mills-Multiplett.

Auffällig ist, daß das vierdimensionale Hilfsfeld D nicht identisch ist mit dem einzigen geraden fünfdimensionalen Hilfsfeld X^3, sondern zusätzlich eine Ableitung des dynamischen inneren Feldes Φ enthält. Im Scherk-Schwarz-Mechanismus wird die Supersymmetrie durch Dimensionale Reduktion gebrochen [24], weil genau diese Ableitung $\partial_5\Phi$ einen Vakuumerwartungswert (VEV) erhält. Daher ist es sinnvoll, daß $\partial_5\Phi$ im Hilfsfeld auftritt, dessen VEV die Skala der Supersymmetrie-Brechung ist. Wenn die Supersymmetrie an einer Wand gebrochen wird, trägt das innere Feld Φ zu der Vermittlung der Brechung auf die andere Wand bei, weil es im vierdimensionalen Hilfsfeld an die Randfelder koppelt.

3.2 Ankopplung an Randfelder

In der vierdimensionalen Theorie wird die Kopplung eines Vektormultipletts (A^m, λ_L, D) an chirale Multipletts (φ, ψ, F) beschrieben durch die Lagrange-Dichte

$$L_4 = L_{eich} + L_{chiral} \tag{3.5}$$

mit

$$L_{eich} = \frac{1}{g_4^2}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(F_{mn}F^{mn}\big) + 2\,\mathrm{tr}\big(\lambda_L^\dagger i\bar{\sigma}^m D_m \lambda_L\big) + \mathrm{tr}D^2\right) \tag{3.6}$$

$$L_{chiral} = (D_m\varphi)^\dagger D^m\varphi + \psi^\dagger i\bar{\sigma}^m D_m\psi + F^\dagger F - \sqrt{2}i\left(\varphi^\dagger\lambda_L^T c\psi + \psi^\dagger c\lambda_L^*\varphi\right) + \varphi^\dagger D\varphi. \tag{3.7}$$

Der erste Summand L_{eich} enthält die kinetischen Terme und Selbstkopplungen des Vektormultipletts. Im zweiten Summanden befinden sich die kinetischen Terme der chiralen Felder sowie deren Kopplungen an das Vektorfeld. Die kinetischen Terme des Vektormultipletts und die gesamte Lagrange-Dichte sind supersymmetrisch. Deshalb transformiert auch L_{chiral} unter Supersymmetrie in eine totale Ableitung.

In einer Theorie mit fünfdimensionalem Yang-Mills-Multiplett wird der Anteil L_{eich} durch die Lagrange-Dichte L_{YM} aus (3.1) ersetzt. Die Kopplung an die Randfelder ist gegeben durch (3.7), wobei für das Vektormultiplett die Randwerte der fünfdimensionalen Theorie $(A^m, \lambda_L, D) \equiv (A^m, \lambda_L^1, (X^3 - \partial_5\Phi))$ eingesetzt werden müssen. Die vollständige Wirkung lautet dann

$$S = \int d^5x \Big\{ L_{YM} + \sum_{i=1}^{2} \delta(x^5 - x_i^5) L_{chiral}^i \Big\}. \tag{3.8}$$

Hierbei sind $x_{1,2}^5 = 0, l$ die Positionen der Wände.

Das Hilfsfeld X^3 kann ausintegriert werden. Dazu wird zunächst nur die Kopplung an eine Wand betrachtet. Der relevante Teil der Wirkung ist

$$S = \int d^5x \Big\{ \frac{1}{g_5^2}\mathrm{tr}(X^3)^2 + \delta(x^5)\varphi^\dagger(X^3 - \partial_5\Phi)\varphi \Big\}. \tag{3.9}$$

Nach Einsetzen der Bewegungsgleichung für X^3 enthält die Rand-Lagrangedichte die Terme

$$\int d^4x \Big\{ -\varphi^\dagger(\partial_5\Phi)\varphi - \frac{1}{2}(\varphi^\dagger t^A\varphi)^2\delta(0) \Big\}. \tag{3.10}$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Generatoren der Eichgruppe t^A folgendermaßen normiert sind: $\mathrm{tr}(t^A t^B) = \delta^{AB}/2$. Die Theorie scheint einen singulären Term zu enthalten, der proportional zu $\delta(0)$ ist. Wie sich später in der Rechnung zeigt, wird dieser Term kompensiert, wenn die Randbedingungen an die ungeraden inneren Felder gelockert werden. Das Feld Φ besitzt Sprungstellen an den Rändern, $\partial_5\Phi$ ist dann proportional zu $\delta(x^5)$, und eine reine feldtheoretische Beschreibung ist gerechtfertigt.

3.3 1-loop-Korrekturen der skalaren Massen der Randfelder

Die Aufhebung der $\delta(0)$-Singularität kann man sehr gut an den 1-loop-Korrekturen der skalaren Massen sehen. Die Feynman-Diagramme, die in erster Ordnung zu der Korrektur beitragen, sind in Bild 3.1 dargestellt. Die ersten vier Diagramme enthalten jeweils ein inneres Feld, während das letzte Diagramm nur das Randfeld φ beinhaltet. Der Vertexfaktor des letzten Diagramms ist proportional zu $\delta(0)$, da die Kopplung durch den zweiten Term in (3.10) gegeben ist.

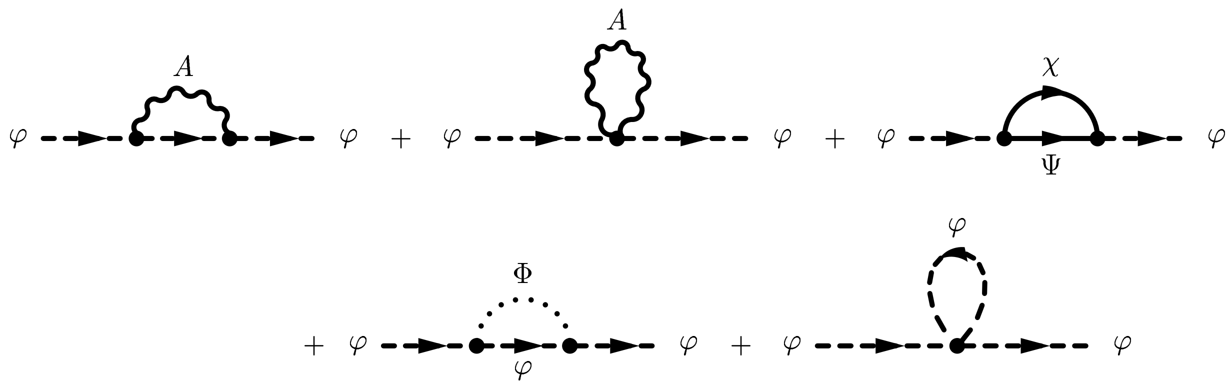


Abbildung 3.1: 1-loop-Korrekturen der Masse eines Skalars an der Wand $x^5 = 0$ durch Wechselwirkungen mit einem fünfdimensionalen Yang-mills-Feld

Wenn p der äußere Viererimpuls des Skalars φ ist, haben alle Diagramme die Struktur

$$-iM^2(p) = g_5^2 t^A t^A \int_{k5} \frac{1}{(p-k)^2(k^2-(k^5)^2)} N(k,k^5,p), \tag{3.11}$$

wie in Anhängen D, E erläutert wird. Dabei ist N ein Polynom in den Impulsen. Die fünf Diagramme tragen

$$\begin{aligned} N(k,k^5,p) &= -(2p-k)^2 + 4(p-k)^2 - 4k\cdot(k-p) + (k^5)^2 + (k^2-(k^5)^2) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

zu der 1-loop-Massenkorrektur bei. Der $\delta(0)$-Term wird also vollständig von den anderen Diagrammen ausgelöscht, insbesondere von dem singulären Verhalten des Φ-Austausch-Diagramms.

3.4 Supersymmetrie-Brechung an einer Wand

3.4.1 Fayet-Iliopoulos-Mechanismus

In vier Dimensionen

Das D-Hilfsfeld des Vektormultipletts ist invariant unter Eichtransformationen, wenn die Eichgruppe $U(1)$ ist. Da D ein reelles Feld ist und unter Supersymmetrie in eine totale Ableitung transformiert, kann für eine $U(1)$ ein Fayet-Iliopoulos-Term mit der reellen Konstanten κ zu der Lagrange-Dichte hinzugefügt werden:

$$L^4_{F.I.} = \kappa D. \tag{3.13}$$

Die Lagrange-Dichte eines vierdimensionalen Modells enthält dann die Terme

$$L_4 = \frac{1}{2g_4^2} D^2 + D q_i \varphi_i^\dagger \varphi_i + \kappa D + \dots , \tag{3.14}$$

wobei q_i die $U(1)$-Ladungen der chiralen Felder sind. Die algebraische Bewegungsgleichung des D-Hilfsfeldes lautet

$$D = -g_4^2 \left(q_i \varphi_i^\dagger \varphi_i + \kappa \right) . \tag{3.15}$$

Abhängig von den Vorzeichen der Ladungen q_i ist im Vakuum Eich- oder Supersymmetrie gebrochen. Wenn $D = 0$ eine Lösung besitzt, erhält mindestens ein Skalar φ_i einen VEV und Eichsymmetrie ist gebrochen, während Supersymmetrie erhalten ist. Dies ist die supersymmetrische Version des Higgs-Modells [8]. Wenn hingegen $D = 0$ keine Lösung besitzt, ist Supersymmetrie wegen $\langle V_{skalar} \rangle = \frac{1}{2g_4^2} \langle D \rangle^2$ spontan gebrochen und die Skalare erhalten durch die Kopplungsterme $D q_i \varphi_i^\dagger \varphi_i$ Massen, die die Summenregel (2.13) erfüllen. Dies ist der „Fayet-Iliopoulos-Mechanismus“ [9].

Das einfachste Beispiel für diese Art der Supersymmetrie-Brechung beinhaltet ein chirales Multiplett mit $U(1)$-Ladung q und $\kappa q > 0$. Die Energie ist minimal für $\langle D \rangle = -g_4^2 \kappa$, und der Skalar φ erhält durch die Kopplung an das Goldstino λ_L die Masse

$$m_\varphi^2 = q \, g_4^2 \kappa, \tag{3.16}$$

während das Fermion ψ masselos bleibt.

Auf der Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$

An den Wänden bildet $(X^3 - \partial_5 \Phi)$ den D-Term. Wenn die Eichgruppe $U(1)$ ist, kann also wie im vierdimensionalen Fall an einer Wand ein Fayet-Iliopoulos-Term zu der supersymmetrischen Lagrange-Dichte hinzugefügt werden:

$$L_4 = \kappa (X^3 - \partial_5 \Phi). \tag{3.17}$$

Das einfachste Beispiel der Supersymmetrie-Brechung enthält an der Wand $x^5 = l$ keine Materie-Felder, sondern nur diesen einen Term. Die Hilfsfelder können sofort ausintegriert werden: $X^1 = X^2 = 0$, $X^3 = -g_5^2 \delta(x^5 - l)\kappa$. Die scheinbare Singularität, die das Hilfsfeld X^3 beiträgt, wird - wie in der folgenden Rechnung zu sehen ist - von einer gleichartigen Singularität des dynamischen Feldes Φ aufgehoben. Die relevanten Terme der Wirkung

$$S = \int d^5 x \left\{ \frac{1}{2g_5^2} \left(\partial_M \Phi \right)^2 - \delta(x^5 - l) \partial_5 \Phi \right\} \tag{3.18}$$

führen zu einer Bewegungsgleichung, die nicht exakt gelöst werden kann. Der Erwartungswert $\langle \Phi \rangle$ hängt jedoch nur von x^5 ab und erfüllt die Gleichung

$$\partial_5 \left(\frac{1}{g_5^2} \partial_5 \langle \Phi \rangle + \kappa \delta \left(x^5 - l \right) \right) = 0, \tag{3.19}$$

die aufgrund der Kreis-Kompaktifizierung exakt lösbar ist. Die Integrationskonstante ist dadurch festgelegt, daß $\Phi(x^5)$ periodisch in x^5 ist:

$$\int_0^{2l} dx^5 \partial_5 \Phi = \Phi(x^5 = 2l) - \Phi(x^5 = 0) = 0. \tag{3.20}$$

Also lautet der Erwartungswert

$$\partial_5 \langle \Phi \rangle = -g_5^2 \kappa \left(\delta \left(x^5 - l \right) - \frac{1}{2l} \right) \tag{3.21}$$

und damit

$$X^3 - \partial_5 \langle \Phi \rangle = -\frac{g_5^2}{2l} \kappa. \tag{3.22}$$

An dieser Stelle ist offensichtlich, daß das Modell keine $\delta(0)$-artigen Singularitäten besitzt. Die Delta-Funktion des Hilfsfeldes hebt sich gegen die des dynamischen Feldes Φ weg, und der konstante Term in $\partial_5 \langle \Phi \rangle$ erzeugt die Supersymmetrie-Brechung.

Nun soll angenommen werden, daß das Vektormultiplett an der Wand $x^5 = 0$ an ein chirales Multiplett mit $U(1)$-Ladung q koppelt. Dann erhält das skalare Feld φ durch den Erwartungswert (3.22), der in der D-Termkopplung in (3.7) eingesetzt wird, eine weich brechende Masse

$$m_\varphi^2 = q \, \frac{g_5^2}{2l} \kappa. \tag{3.23}$$

Der fermionische Superpartner ψ bleibt masselos. Wenn man die effektive vierdimensionale Kopplungskonstante $g_5^2/(2l)$ durch g_4^2 ersetzt, stimmt dieses Ergebnis mit der weich brechenden Masse (3.16) des rein vierdimensionalen Modells überein.

Der Fayet-Iliopoulos-Mechanismus kann auf mehrere chirale Multipletts an beiden Wänden verallgemeinert werden. Analog zum vierdimensionalen Fall kann dann statt der Supersymmetrie die Eichsymmetrie gebrochen sein, wenn geeignete skalare Felder einen VEV erhalten. In [16] ist diese Analogie ausführlicher beschrieben.

3.4.2 Übertragung der Supersymmetrie-Brechung von Wand zu Wand

In vierdimensionalen Modellen ist die Supersymmetrie entweder im ganzen Raum oder nirgendwo gebrochen, denn alle Felder sind auf dem ganzen $\mathbb{R}^4$ definiert. Eine häufig verwendete Konstruktion beinhaltet einen verborgenen Sektor und einen beobachtbaren Sektor, die nur durch Eichfelder oder Gravitation aneinander koppeln. Die Supersymmetrie wird im verborgenen Sektor spontan gebrochen, woraufhin im beobachtbaren Sektor weich brechende Massenterme durch Strahlungskorrekturen induziert werden.

Auf der Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ kann im Gegensatz zum $\mathbb{R}^4$ die Supersymmetrie klassisch nur auf einer Wand gebrochen sein. Es bietet sich an, den beobachtbaren und verborgenen Sektor räumlich zu trennen, indem man einer Wand jeweils einen Sektor zuordnet. Es gibt dann Modelle, in denen die Supersymmetrie klassisch nur auf der verborgenen Wand gebrochen ist.

Im letzten Abschnitt wurde ein Mechanismus vorgestellt, in dem das innere Hilfsfeld X^3 und die Ableitung $\partial_5 \Phi$ einen VEV erhalten. Folglich ist das Goldstino ein inneres Feld - nämlich das Gaugino λ^i - und die Supersymmetrie ist klassisch auf der ganzen Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ gebrochen. Der VEV von $(X^3 - \partial_5 \Phi)$ induziert bereits klassisch eine weich brechende Masse für die Skalare der beobachtbaren Wand.

Wenn Supersymmetrie auf einer Orbifold durch den VEV eines F-Hilfsfeldes gebrochen wird, ist das Goldstino das zugehörige chirale Fermion, das nur auf einer Wand propagiert. Also ist die Supersymmetrie klassisch nur auf dieser Wand gebrochen. Da das Goldstino jedoch an die inneren Felder koppelt, bewirken Strahlungskorrekturen eine Brechung der Supersymmetrie auf der gesamten Orbifold. Weich brechende skalare Massen an der beobachtbaren Wand werden erst durch höhere loop-Korrekturen induziert, indem die Skalare in einem loop an die inneren Felder koppeln und die inneren Felder in einem zweiten loop an den verborgenen Sektor, der ein nicht-supersymmetrisches Massenspektrum besitzt. Für eine vollständige Diskussion der Supersymmetrie-Brechung auf der Orbifold wäre die Angabe eines Superpotentials notwendig, durch welches das Massenspektrum der verborgenen Wand entsteht. Für das Hypermultiplett wird in Kapitel 4.3 ein solches konkretes Modell angegeben.

In diesem Abschnitt wird die Wand-zu-Wand-Übertragung der Supersymmetrie-Brechung demonstriert, indem ein möglichst einfaches nicht-supersymmetrisches Massenspektrum an der verborgenen Wand angesetzt wird, ohne jedoch dessen Entstehung durch ein Superpotential zu erklären:

Das für die loop-Korrekturen verwendete Teilchen-Spektrum enthält an der Wand $x^5 = l$ zwei chirale Superfelder $(\phi', \bar{\phi}')$, die sich unter der Eichgruppe in einer vektorartigen Darstellung $(R' + \bar{R}')$ transformieren. Das Multiplett soll eine supersymmetrische Masse m besitzen, und es wird angenommen, daß ein F-Term eine Aufspaltung der skalaren Massen induziert. Die Masseneigenzustände seien φ'_+, φ'_- in der Darstellung R' der Eichgruppe. Dann liegt folgendes Massenspektrum vor:

$$m^2(\varphi'_\pm) = m_\pm^2 = m^2(1 \pm x), \qquad m^2(\Psi') = m^2. \tag{3.24}$$

Dieses Spektrum erfüllt die Gleichung $\mathrm{STr} M^2 = 0$. Die Berechnung der weich brechenden Masse kann auf Modelle mit nichtverschwindender Superspur verallgemeinert werden [22].

Bereits in Abschnitt 3.3 wurde explizit gezeigt, daß es keine 1-loop-Korrekturen der skalaren Masse gibt. Da verborgener und beobachtbarer Sektor nur über Eichfelder aneinander koppeln, ist es klar, daß Strahlungskorrekturen höherer Ordnung betrachtet werden müssen.

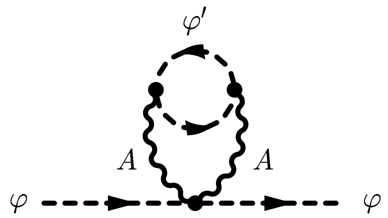


Abbildung 3.2: Basis-Diagramm, das in den 2-loop-Korrekturen der skalaren Masse auftritt

Die Berechnung der 2-loop-Beiträge zur skalaren Masse kann in Analogie zu vierdimensionalen Modellen mit eichvermittelter Supersymmetrie-Brechung [15] durchgeführt werden. Zu der Massenkorrektur tragen die Feynman-Diagramme in Bild 3.2 bei. Jedes einzelne Diagramm liefert einen Beitrag der Form

$$-iM^2 = ig_5^4 C_2(R) C(R') \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int_{k55} \frac{N(k, k^5, \hat{k}^5, q)}{k^2[k^2 - (k^5)^2][k^2 - (\hat{k}^5)^2]]q^2 - m_1^2][(q-k)^2 - m_2^2]}, \tag{3.25}$$

wobei die Konstanten $C(R')$, $C_2(R)$ die Eichquantenzahlen der Multipletts an den Wänden $x^5 = l, 0$ enthalten und

$$\int_{k55} \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2l} \sum_n \frac{1}{2l} \sum_{\hat{n}} 4 \cdot (-1)^{n+\hat{n}} \tag{3.26}$$

die spezielle Form (D.3) der Propagatoren auf der Orbifold berücksichtigt. Nach diversen Umformungen erhalten Mirabelli und Peskin [16] folgende Formel für die 2-loop-korrigierte skalare Masse des beobachtbaren Sektors:

$$m_\varphi^2 = 2\left(\frac{g_5^2}{(4\pi)^2}\right)^2 C_2(R)C(R') \int_0^\infty dk\, k \frac{1}{\sinh^2(kl)} \mathcal{P}(k^2) \tag{3.27}$$

mit

$$\mathcal{P}(k^2) = k^2 \mathcal{R}(k^2) + 4\mathcal{S}(k^2) \tag{3.28}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(k^2) =& b(k^2, m_+^2, m_+^2) + b(k^2, m_-^2, m_-^2) + 2b(k^2, m_+^2, m_-^2) + 4b(k^2, m^2, m^2) \\ &- 4b(k^2, m_+^2, m^2) - 4b(k^2, m_-^2, m^2) \\ \mathcal{S}(k^2) =& m_+^2\{b(k^2, m_+^2, m_+^2) - b(k^2, m_+^2, m^2)\} - m^2\{b(k^2, m^2, m^2) - b(k^2, m_+^2, m^2)\} \\ &+ m_-^2\{b(k^2, m_-^2, m_-^2) - b(k^2, m_-^2, m^2)\} - m^2\{b(k^2, m^2, m^2) - b(k^2, m_-^2, m^2)\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Das Selbstenergie-Integral $b(k^2, m_1^2, m_2^2)$ ist in Anhang G definiert. Anhand der Formeln (G.12) und (G.13) erhält man das asymptotische Verhalten

$$\mathcal{P}(k^2) \sim k^2 \qquad \text{für } k^2 \to 0, \tag{3.30}$$

$$\mathcal{P}(k^2) \sim \frac{1}{k^2} \log\left(\frac{k^2}{m^2}\right) \qquad \text{für } k^2 \to \infty. \tag{3.31}$$

Gleichung (3.30) bedeutet, daß $\mathcal{P}(k^2)$ eine Wellenfunktions-Renormierung ist [11].

Mit der Kenntnis des asymptotischen Verhaltens von $\mathcal{P}(k^2)$ für kleine und große Impulse kann die Abhängigkeit der skalaren Masse vom Abstand l der Wände bestimmt werden: Für $l \to 0$ erhält man die vierdimensionale Form [15, 3]

$$m_\varphi^2 = 2C_2(R)C(R') \left(\frac{g_5^2}{(4\pi)^2}\right)^2 \cdot \frac{m^2}{l^2} \{2x^2 f(x)\} \tag{3.32}$$

und für $l \to \infty$

$$m_\varphi^2 = 2C_2(R)C(R') \left(\frac{g_5^2}{(4\pi)^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{l^4} \cdot \zeta(3) \tilde{f}(x). \tag{3.33}$$

Die genaue Form der Funktion $f(x)$ kann in [15, 3] nachgelesen werden, und $\tilde{f}(x)$ kann aus [16] entnommen werden. Interessant ist an dieser Stelle nur, daß $\{2x^2 f(x)\} \sim x^2$ und $\tilde{f}(x) \sim x^2$ für $x^2 \to 0$.

Der Vergleich von (3.32) mit der vierdimensionalen Form ist zunächst nicht offensichtlich. Wenn man jedoch bedenkt, daß g_5^2 die Dimension einer Länge hat, erhält man durch einfache Dimensionale Reduktion

$$g_4^2 \equiv \frac{g_5^2}{l} \tag{3.34}$$

als effektive vierdimensionale Kopplungskonstante.

Der induzierte weich brechende Massenterm stimmt also für sehr kleine Abstände l der Wände mit dem vierdimensionalen Modell überein, nimmt dann mit zunehmendem Abstand ab und wird für große Abstände gemäß einem Potenzgesetz unterdrückt.

Kapitel 4

Kopplung eines fünfdimensionalen Hypermultipletts an vierdimensionale Felder

4.1 Kompaktifizierung auf der Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$

Das Hypermultiplett in fünf Dimensionen besteht aus zwei komplexen Skalaren A^i ($i = 1,2$), einem Dirac-Spinor χ und zwei komplexen Hilfsfeldern F^i mit den Supersymmetrie-Transformationen (C.6). Dieses Multiplett besitzt die supersymmetrische Lagrange-Dichte

$$L_{hyper} = \frac{1}{g_5^2} \left(\left(\partial_M A^i\right)^\dagger \left(\partial^M A^i\right) + \bar{\chi} i \gamma^M \partial_M \chi + \left(F^i\right)^\dagger F^i \right). \tag{4.1}$$

In der fünfdimensionalen Theorie gibt es einen weiteren supersymmetrischen Summanden:

$$L_m = \frac{1}{g_5^2} \left(m \left(\bar{\chi}\chi + A^i \, c^{ij} \, \left(F^j\right)^\dagger + \left(A^i\right)^\dagger \, c^{ij} \, F^j \right) \right). \tag{4.2}$$

Die allgemeine Lagrange-Dichte

$$L = L_{hyper} + L_m \tag{4.3}$$

beschreibt dann ein massives Hypermultiplett mit Masse m. Die Kopplungskonstante g_5^2 hat wie in Kapitel 3 die Dimension einer Länge.

Durch Kompaktifizierung auf einem Kreis erhält man eine vierdimensionale Theorie, die das $N = 2$ Hypermultiplett beschreibt. Dieses besteht aus einem chiralen Anteil (A^1, χ_L, F^1) und einem antichiralen Anteil (A^2, χ_R, F^2). Die $N = 2$ Theorie enthält also keine chiralen Fermionen. Wie man an der Strukur von (4.1) ablesen kann, besitzt das Hypermultiplett weder in vier noch in fünf Dimensionen Selbstwechselwirkungen.

Wenn man auf einer Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ kompaktifiziert, wird die Hälfte der Supersymmetrien gebrochen, und das übrigbleibende $N = 1$ supersymmetrische Multiplett besitzt eine definierte Chiralität. Die Kompaktifizierung der Theorie auf der Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ erhält man wie in Abschnitt 3.1, indem man den einzelnen Feldern Paritäten $P = \pm 1$ unter Spiegelung an $x^5 = 0$ zuordnet:

$$a(x^m, x^5) = Pa(x^m, -x^5). \tag{4.4}$$

Diese Paritäten müssen so gewählt sein, daß die Struktur der kinetischen Terme und der Supersymmetrie-Transformationen erhalten bleibt. Man erhält vier verschiedene Kombinationsmöglichkeiten:

Paritäten im Hypermultiplett							
χ_L	χ_R	ξ_L^1	ξ_R^1	A^1	A^2	F^1	F^2
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	1	-1	1	-1

(4.5)

Die Paritäten der Spinoren ξ_L^2 und ξ_R^2 ergeben sich aus der symplektischen Majorana-Bedingung (B.12), die die beiden Supersymmetrie-Parameter $\xi^{1,2}$ erfüllen.

Bei jeder dieser Kombinationen haben die Massenterme L_m negative Parität, weshalb ein Hypermultiplett auf $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ masselos sein muß. An den Wänden der Orbifold propagiert nur der chirale (oder antichirale) Anteil. Da ein einzelnes chirales Multiplett i.a. masselos ist — ein Massenterm durch ein Superpotential ist zwar möglich, muß aber explizit hinzugefügt werden —, ist auch aus diesem Grund zu erwarten, daß das Hypermultiplett keine Masse besitzt.

Für die folgenden Rechnungen wird die erste Kombination der Paritäten in Tabelle (4.5) gewählt. Dann verschwindet der zweite Anteil des Supersymmetrie-Parameters $\xi_R^1 \equiv 0$ und die Transformationsgesetze der Felder mit gerader Parität an den Wänden lauten

$$\begin{aligned} \delta_\xi A^1 &= \sqrt{2}\xi_L^{1T} c\chi_L \\ \delta_\xi \chi_L &= i\sqrt{2}\sigma^m c\xi_L^{1*}\partial_m A^1 - \sqrt{2}\xi_L^1 \left(F^1 + \partial_5 A^2\right) \\ \delta_\xi \left(F^1 + \partial_5 A^2\right) &= i\sqrt{2}\xi_L^{1\dagger}\bar{\sigma}^m \partial_m \chi_L. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Bei der Umformung der Transformationsgesetze wurde verwendet, daß die Weyl-Spinoren ξ_R^2 und ξ_L^1 über (B.12) zusammenhängen.

Die Transformationen der Randfelder (4.6) haben genau die Form (C.16) eines chiralen Multipletts, wobei A^1 der skalare Anteil ist, χ_L das chirale Fermion und $(F^1 + \partial_5 A^2)$ das Hilfsfeld. Das Feld A^2 besitzt zwar ungerade Parität, aber seine Ableitung $\partial_5 A^2$ ist symmetrisch unter Spiegelung an $x^5 = 0$ und trägt zu dem vierdimensionalen Wand-Hilfsfeld bei. Dies ist für die folgenden Rechnungen bedeutend, denn das Feld F^1 ist aufgrund von Kopplungen an die Wände singulär. Diese Singularität wird von einem VEV des ungeraden Skalars A^2 ausgelöscht. Ohne diese Auslöschung wäre die Konsistenz einer feldtheoretischen Beschreibung des in diesem Kapitel beschriebenen Modells zweifelhaft.

4.2 Kopplung an chirale Wandfelder

Kopplung vierdimensionaler chiraler Felder durch ein Superpotential

Wenn eine vierdimensionale Theorie nur chirale Felder beinhaltet, dann kann die allgemeinste supersymmetrische Lagrange-Dichte zusammengesetzt werden aus kinetischen Termen und einem Superpotential, das ein Polynom in den Superfeldern ist. Die kinetischen Terme eines chiralen Multipletts (φ, ψ, F) lauten

$$L_{chiral} = (\partial_m \varphi)^\dagger \, \partial^m \varphi + \psi^\dagger i \bar{\sigma}^m \partial_m \psi + F^\dagger F. \tag{4.7}$$

Für das Verständnis des Superpotentials ist der „Superraum“-Formalismus hilfreich: In vier Dimensionen mit $N = 1$ Supersymmetrie kann ein „Superraum“ aufgespannt werden durch die bosonischen Raumzeit-Koordinaten x^m $(m = 0 \ldots 3)$ und die Weyl-Fermionen θ, θ^*. Jedes Multiplett kann dann durch eine Taylor-Entwicklung in den fermionischen Koordinaten beschrieben werden, wobei die Koeffizienten die Komponentenfelder des Multipletts sind. Diese Entwicklung bricht ab, da die Komponenten von θ und θ^* Grassmann-Variablen sind. Das allgemeinste Superfeld hat dann die Taylor-Entwicklung (F.4).

Ein chirales Superfeld erfüllt die Einschränkung, daß es nur von einer fermionischen Koordinate θ, nicht jedoch von θ^* abhängt. Seine Taylor-Entwicklung ist gegeben durch (F.5). Die Taylor-Entwicklung eines beliebigen Produkts chiraler Superfelder hat die gleiche Struktur wie ein chirales Superfeld. Jedes Produkt chiraler Superfelder ist also selbst wieder ein chirales Superfeld. Diese Tatsache kann man nun ausnutzen, um supersymmetrische Wechselwirkungsterme zwischen chiralen Multipletts zu finden:

Der Koeffizient des $(\theta^T c\, \theta)$-Terms ist das Hilfsfeld F, das unter Supersymmetrie in eine totale Ableitung transformiert. Da jedes Produkt chiraler Superfelder wieder ein chirales Superfeld ist, transformiert der Koeffizient von $(\theta^T c\, \theta)$ unter Supersymmetrie ebenfalls in eine totale Ableitung. Wenn man fordert, daß die jeweilige Theorie renormierbar sein soll, darf die zugehörige Lagrange-Dichte höchstens Wechselwirkungen zwischen zwei Fermionen und einem Skalar oder zwischen vier Skalaren enthalten. Das allgemeinste zulässige Superpotential ist dann

$$W = b^a \phi_a + \frac{1}{2} m^{ab} \phi_a \phi_b + \frac{1}{3} g^{abc} \phi_a \phi_b \phi_c, \tag{4.8}$$

wobei ϕ_a die chiralen Superfelder sind. Die Koeffizienten m^{ab} und g^{abc} können ohne Einschränkung als total symmetrisch in ihren Indizes angenommen werden.

Die allgemeinste renormierbare Lagrange-Dichte vierdimensionaler chiraler Felder setzt sich zusammen aus den kinetischen Termen und der höchsten Komponente des Superpotentials:

$$L_4 = (\partial_m \varphi)^\dagger \, \partial^m \varphi + \psi^\dagger i \bar{\sigma}^m \partial_m \psi + F^\dagger F + \left(W|_{\theta^T c \theta} + h.c. \right), \tag{4.9}$$

wobei in den kinetischen Termen implizit über alle chiralen Multipletts summiert wird. Mit der expliziten Darstellung (F.6) der Produkte lautet die Lagrange-Dichte in Komponentenfeldern:

$$\begin{aligned} L_4 = &(\partial_m \varphi)^\dagger \, \partial^m \varphi + \psi^\dagger i \bar{\sigma}^m \partial_m \psi + F^\dagger F \\ &- \left(b^a F_a + m^{ab} \big(F_a \varphi_b + \frac{1}{2} \psi_a^T c \psi_b \big) + g^{abc} \left(\varphi_a \varphi_b F_c + \psi_a^T c \psi_b \varphi_c \right) + h.c. \right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Kopplung des fünfdimensionalen Hypermultipletts an vierdimensionale chirale Felder

An den Wänden $x^5 = 0, l$ bilden die Felder mit gerader Parität ein chirales Multiplett: $(\varphi_H, \psi_H, F_H) \equiv (A^1, \chi_L, (F^1 + \partial_5 A^2)$. Dieses chirale Multiplett kann über ein Superpotential an die Wandfelder koppeln.

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet: H indiziert die Randwerte des Hypermultipletts, Buchstaben aus der Mitte des Alphabets $(k, l \ldots)$ die chiralen Wandfelder, und Buchstaben vom Anfang des Alphabets bezeichnen alle Multipletts einschließlich des Hypermultipletts: $(a, b \ldots) = (H, k, l \ldots)$. Die Felder an der Wand $x^5 = 0$ werden mit (φ_k, ψ_k, F_k) bezeichnet, diejenigen an der Wand $x^5 = l$ mit $(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\psi}_k, \tilde{F}_k)$.

Die allgemeine Wechselwirkung vierdimensionaler chiraler Felder mit einem fünfdimensionalen Hypermultiplett wird dann beschrieben durch:

$$S = \int d^5x \Big\{ L_{hyper} + \sum_{i=1}^{2} \delta(x^5 - x_i^5) \left[L^i_{chiral} + (W^i|_{\theta^T c\theta} + h.c.) \right] \Big\}, \tag{4.11}$$

wobei

$$L^1_{chiral} = (\partial_m \varphi_k)^\dagger \, \partial^m \varphi_k + \psi_k^\dagger i \bar{\sigma}^m \partial_m \psi_k + F_k^\dagger F_k \tag{4.12}$$

die kinetischen Terme der chiralen Felder an der Wand $x_1^5 = 0$ enthält und

$$W^1|_{\theta^T c\theta} = -\Big(b^a F_a + m^{ab} \big(F_a \varphi_b + \frac{1}{2} \psi_a^T c \psi_b \big) + g^{abc} \left(\varphi_a \varphi_b F_c + \psi_a^T c \psi_b \varphi_c \right) \Big) \tag{4.13}$$

die Wechselwirkungen zwischen Hypermulitplett und chiralen Feldern sowie chiraler Felder untereinander - ebenfalls an der Wand $x_1^5 = 0$ - beschreibt. Für L^2_{chiral} und $W^2|_{\theta^T c\theta}$ gelten entsprechende Formeln.

4.3 Ausintegration der Hilfsfelder und Supersymmetrie-Brechung an einer Wand

4.3.1 In vier Dimensionen

Im O'Raifeartaigh-Modell [21, 7] wird Supersymmetrie durch den VEV eines chiralen Hilfsfeldes spontan gebrochen.

In vier Dimensionen können die F-Hilfsfelder aus der Lagrange-Dichte mit Superpotential (4.10) aufgrund ihrer algebraischen Bewegungsgleichungen ausintegriert werden, und man erhält

$$L_4 = (\partial_m \varphi)^\dagger \, \partial^m \varphi + \psi^\dagger i \bar{\sigma}^m \partial_m \psi - \left(\frac{1}{2} m^{ab} \psi_a^T c \psi_b + g^{abc} \psi_a^T c \psi_b \varphi_c + h.c. \right) - V_{skalar} \tag{4.14}$$

mit $V_{skalar} = F_a^\dagger F_a$ und $F_a^\dagger = b^a + m^{ab} \varphi_b + g^{abc} \varphi_b \varphi_c$. Supersymmetrie ist genau dann erhalten, wenn alle Hilfsfelder einen trivialen VEV besitzen. Bei geeigneter Wahl der Parameter b^a, m^{ab}, g^{abc} können nicht alle Hilfsfelder gleichzeitig verschwinden, und Supersymmetrie ist spontan gebrochen. Prinzipiell ist ein Superpotential $W = b\Phi$ mit einem einzigen Superfeld Φ ausreichend, um Supersymmetrie zu brechen. Die Vakuumenergie $E_{min} = b^2$ ist von null verschieden, aber die Supersymmetrie-Brechung wird nicht auf den beobachtbaren Bereich übertragen. Es sind mindestens drei chirale Superfelder notwendig, damit die Entartung der Massen aufgehoben wird. Zwei chirale Felder bilden ein massives Multiplett mit unterschiedlichen skalaren Massen, wobei die Summenregel (2.12) erfüllt sein muß. Das dritte Multiplett enthält das Goldstino und bleibt masselos.

4.3.2 Bei Kopplung des Hypermultipletts an eine Wand der Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$

In diesem Abschnitt werden zunächst nur Kopplungen des Hypermultipletts an eine Wand $x^5 = 0$ betrachtet. Die Wirkung für die Kopplung an eine Wand lautet

$$S = \int d^5x \Big\{ L_{hyper} + \delta(x^5) L_4 \Big\} \tag{4.15}$$

mit L_{hyper} aus (4.1), $L_4 = L^1_{chiral} + (W^1|_{\theta^T c\theta} + h.c.)$ und den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.2. Die Wandhilfsfelder F_k und das innere Hilfsfeld F^2 können sofort ausintegriert werden:

$$F^2 = 0, \tag{4.16}$$

$$F_k^\dagger = b^k + m^{ka}\varphi_a + g^{kab}\varphi_a\varphi_b. \tag{4.17}$$

Die Struktur von (4.17) ist die gleiche wie im rein vierdimensionalen Fall, allerdings kann $\varphi_{a,b}$ auch der Skalar A^1 des Hypermultipletts sein. Wenn man (4.16) und (4.17) in (4.15) einsetzt, erhält man:

$$\begin{aligned} L_{hyper} + \delta(x^5) L_4 =& \frac{1}{g_5^2}\Big[\left(\partial_M A^i\right)^\dagger \left(\partial^M A^i\right) + \left(F^1\right)^\dagger F^1 \Big] \\ &+ \delta(x^5) \Big[(\partial_m \varphi)^\dagger \partial^m \varphi - F_k^\dagger F_k \\ &\qquad - \big(b^H F_H + m^{Ha} F_H \varphi_a + g^{Hab} F_H \varphi_a \varphi_b + h.c. \big) \Big] \\ &+ \text{fermionische Terme.} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Diese Gleichung enthält noch das Hilfsfeld F^1 und Ableitungen des Feldes A^2 wegen $F_H \equiv F^1 + \partial_5 A^2$. Als nächstes wird F^1 ausintegriert:

$$\left(F^1\right)^\dagger = g_5^2 \delta(x^5) \mathcal{F}^\dagger \tag{4.19}$$

mit $\mathcal{F}^\dagger \equiv b^H + m^{Ha}\varphi_a + g^{Hab}\varphi_a\varphi_b$. Dann lautet die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} L_{hyper} + \delta(x^5) L_4 =& \frac{1}{g_5^2}\Big[\left(\partial_M A^i\right)^\dagger \left(\partial^M A^i\right) - \left(F^1\right)^\dagger F^1 - \big((\partial_5 A^2)(F^1)^\dagger + h.c. \big) \Big] \\ &+ \text{Randfelder} + \text{fermionische Terme} \\ =& \frac{1}{g_5^2}\left(\partial_M A^i\right)^\dagger \left(\partial^M A^i\right) - g_5^2 \delta^2(x^5) \mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} - \delta(x^5) \left[(\partial_5 A^2) \mathcal{F}^\dagger + h.c. \right] \\ &+ \ldots . \end{aligned} \tag{4.20}$$

An dieser Stelle tritt das gleiche Problem wie beim Yang-Mills-Multiplett in Abschnitt 3.4.1 auf: Die Bewegungsgleichung des inneren Hilfsfeldes mit gerader Parität enthält eine δ-Funktion und erzeugt damit einen singulären Term in der Wirkung. Doch genau wie in dem anderen Modell trägt ein inneres dynamisches Feld ungerader Parität zu dem Rand-Hilfsfeld bei. In Abschnitt 3.4.1 wurde gezeigt, daß der VEV des dynamischen Feldes Φ die Singularität des Hilfsfeldes X^3 kompensiert. In diesem Abschnitt wird analog zu Abschnitt 3.4.1 vorgegangen:

Die Bewegungsgleichung für A^2 kann nicht exakt gelöst werden. Deshalb wird nur eine vakuumartige Konfiguration betrachtet, in der das Feld nicht von den ersten vier Koordinaten abhängt: $\partial_m A^2 = 0$. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\partial_5 \left(\partial_5 \langle A^2 \rangle + F^1 \right) = 0. \tag{4.21}$$

Aufgrund der gewählten Kompaktifizierung auf einem Kreis ist A^2 periodisch in x^5,

$$\int_0^{2l} dx^5 \partial_5 A^2 = A^2 \Big|_0^{2l} = 0, \tag{4.22}$$

und die Integrationskonstante kann bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \partial_5 \langle A^2 \rangle &= - F^1 + \frac{g_5^2}{2l} \mathcal{F} \\ &= - g_5^2 \Big(\delta(x^5) - \frac{1}{2l} \Big) \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Die Lösung der Gleichung (4.21) kann noch auf eine andere Weise beschrieben werden:

Die allgemeine Lösung ist

$$\partial_5 \langle A^2 \rangle + F^1 = \alpha \tag{4.24}$$

mit einer unbekannten Konstanten α. Führt man nun die Sprungfunktion

$$\varepsilon(x^5) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x^5 > 0 \\ -\frac{1}{2} & x^5 < 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

ein, so kann Gleichung (4.24) unter Benutzung von (4.19) auf folgende Form gebracht werden:

$$\partial_5 \left(\langle A^2 \rangle + g_5^2 \varepsilon(x^5) \mathcal{F} \right) = \alpha. \tag{4.26}$$

Diese Gleichung wird gelöst durch

$$\langle A^2 \rangle + g_5^2 \varepsilon(x^5) \mathcal{F} = \alpha x^5, \tag{4.27}$$

wobei aufgrund der ungeraden Parität von A^2 unter der Orbifold-Projektion keine weitere Integrationskonstante auftritt. An dieser Stelle kann die Konstante α aufgrund der Periodizität von A^2 bestimmt werden: Aus

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle (x^5 \nearrow 0) &= - g_5^2 \varepsilon(x^5 \nearrow 0) \mathcal{F} = \frac{1}{2} g_5^2 \mathcal{F} \\ &= \alpha 2l - \frac{1}{2} g_5^2 \mathcal{F} = \alpha 2l - g_5^2 \varepsilon(x^5 \nearrow 2l) \mathcal{F} \\ &= \langle A^2 \rangle (x^5 \nearrow 2l) \end{aligned} \tag{4.28}$$

erhält man

$$\alpha = \frac{1}{2l} g_5^2 \mathcal{F}. \tag{4.29}$$

Dieses Ergenis ist offensichtlich identisch mit der bereits gefundenen Gleichung (4.23).

Die Singularität von F^1 wird also durch diejenige von $\partial_5 A^2$ aufgehoben,

$$F^1 + \partial_5 \langle A^2 \rangle = \frac{g_5^2}{2l} \mathcal{F}, \tag{4.30}$$

und die Lagrange-Dichte lautet schließlich

$$\begin{aligned} L_{hyper} + \delta(x^5) L_4 = &\frac{1}{g_5^2} \left(\partial_M A^1\right)^\dagger \left(\partial^M A^1\right) + \delta(x^5)(\partial_m \varphi)^\dagger \partial^m \varphi - V_{skalar} \\ &+ \text{fermionische Terme}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

wobei das skalare Potential aus inneren und Wand-Anteilen besteht:

$$\begin{aligned} V_{skalar} &= V_{innen} + \delta(x^5) V_{Wand} \\ &= \frac{1}{g_5^2} \left(\frac{g_5^2}{2l}\right)^2 \mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} + \delta(x^5) F_k^\dagger F_k. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Dadurch ergeben sich zwei verschiedene Möglichkeiten der spontanen Supersymmetrie-Brechung durch ein Superpotential:

1. Das innere Hilfsfeld gerader Parität erhält einen VEV: $\langle \mathcal{F} \rangle \neq 0$
2. Ein Wand-Hilfsfeld erhält einen VEV: $\langle F_k \rangle \neq 0$ für ein k.

Im ersten Fall ist die Supersymmetrie klassisch auf der ganzen Orbifold gebrochen. Im zweiten Fall ist die Supersymmetrie klassisch nur an der Wand $x^5 = 0$ gebrochen. Um die Symmetrie-Brechung auf der Wand $x^5 = l$ zu sehen, müssen höhere Ordnungen Störungstheorie betrachtet werden.

Im Minimum des gesamten skalaren Potentials müssen V_{innen} und V_{Wand} einzeln minimal sein, da $\mathcal{F}$ nach Konstruktion keine δ-Funktion enthalten kann. Im Gegensatz zum vierdimensionalen Fall müssen dementsprechend zwei Minimierungsbedingungen gleichzeitig erfüllt sein.

4.3.3 Bei Kopplung des Hypermultipletts an beide Wände der Orbifold $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$

Bisher wurden nur Kopplungen an eine Wand betrachtet. Bei Kopplungen an beide Wände werden die Bewegungsgleichungen für F^1 und A^2 in folgender Weise modifiziert:

$$(F^1)^\dagger = g_5^2 \left[\delta(x^5)\mathcal{F}^\dagger + \delta(x^5 - l)\tilde{\mathcal{F}}^\dagger\right], \tag{4.33}$$

$$F^1 + \partial_5 \langle A^2 \rangle = \frac{g_5^2}{2l} \left(\mathcal{F} + \tilde{\mathcal{F}}\right), \tag{4.34}$$

wobei wie bisher $\mathcal{F}^\dagger \equiv b^H + m^{Ha}\varphi_a + g^{Hab}\varphi_a\varphi_b$ die Felder an der Wand $x^5 = 0$ enthält. Für $\tilde{\mathcal{F}}$ gilt die entsprechende Formel mit Wandfeldern bei $x^5 = l$. Das effektive skalare Potential enthält nun Beiträge von beiden Wänden:

$$\begin{aligned} V_{skalar} &= V_{innen} + \delta\left(x^5\right) V_{Wand} + \delta\left(x^5 - l\right) \tilde{V}_{Wand} \\ &= \frac{1}{g_5^2} \left(\frac{g_5^2}{2l}\right)^2 \left(\mathcal{F} + \tilde{\mathcal{F}}\right)^\dagger \left(\mathcal{F} + \tilde{\mathcal{F}}\right) + \delta\left(x^5\right) F_k^\dagger F_k + \delta\left(x^5 - l\right) \tilde{F}_l^\dagger \tilde{F}_l. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Wie im Fall mit nur einer Wand können $\mathcal{F}$ und $\tilde{\mathcal{F}}$ keine δ-Funktionen enthalten, so daß im Vakuum V_{innen}, V_{Wand} und $\tilde{V}_{Wand}$ einzeln minimal sein müssen. Dementsprechend gibt es drei verschiedene Szenarien der spontanen Supersymmetrie-Brechung:

1. Die Supersymmetrie ist klassisch überall gebrochen: $\langle V_{innen} \rangle \neq 0$
2. Die Supersymmetrie ist klassisch nur an einer Wand gebrochen: $\langle V_{Wand} \rangle \neq 0$. Eine Symmetrie-Brechung im Inneren und an der anderen Wand ist in höheren Ordnungen Störungstheorie möglich.
3. Klassisch ist die Supersymmetrie an beiden Wänden gebrochen: $\langle V_{Wand} \rangle \neq 0$ und $\langle \tilde{V}_{Wand} \rangle \neq 0$. Durch Quantenkorrekturen wird die Symmetrie auch im Inneren gebrochen.

Die Auslöschung der δ-artigen Singularität ändert sich durch diese Modifikationen gegenüber einer Wand nicht.

Kapitel 5

Übertragung der Supersymmetrie-Brechung an einer Wand durch ein Hypermultiplett

In Abschnitt 4.2 wurde gezeigt, wie ein fünfdimensionales Hypermultiplett durch ein Superpotential an chirale Wandfelder koppeln kann. Außerdem wurde in 4.3 gezeigt, daß bei geeigneter Wahl des Superpotentials die Supersymmetrie klassisch an einer Wand gebrochen, im Inneren und an der anderen Wand jedoch ungebrochen ist. Durch loop-Korrekturen kann die Supersymmetrie-Brechung auf den ganzen Bereich $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ übertragen werden.

In diesem Kapitel wird die Übertragung der Supersymmetrie-Brechung anhand eines konkreten Beispiels gezeigt. Zunächst werden an den Wänden Superpotentiale so gewählt, daß das Hypermultiplett an beide Wände koppelt und die Supersymmetrie spontan an der Wand $x^5 = 0$ gebrochen ist. Daraufhin werden 2-loop-Korrekturen der Masse eines Skalars an der Wand $x^5 = l$ berechnet. In der Rechnung zeigt sich, daß die Masse mit zunehmendem Abstand l der Wände abnimmt.

5.1 O'Raifeartaigh-Modell in vier Dimensionen

In Abschnitt 4.3.1 wurde bereits der Mechanismus einer F-Term-Brechung in vier Dimensionen beschrieben. An dieser Stelle wird nun ein konkretes Modell vorgestellt, das im folgenden Abschnitt auf eine Theorie mit Wänden verallgemeinert wird.

Ein Beispiel [18] für das O'Raifeartaigh-Modell enthält drei chirale Superfelder $X = (x, \psi_x, F_x)$, $Y = (y, \psi_y, F_y)$, $Z = (z, \psi_z, F_z)$ und das Superpotential

$$W = \lambda X \left(Z^2 - M^2\right) + gYZ, \tag{5.1}$$

für das $F_x = 0$ und $F_y = 0$ nicht gleichzeitig erfüllt werden kann. Supersymmetrie ist also spontan gebrochen, und für $M^2 \leqslant g^2/(2\lambda^2)$ liegt das Minimum des Potentials bei $y = z = 0$ mit $\langle F_x \rangle = -\lambda M^2$. Die minimale Energie ist $V_{min} = \lambda^2 M^4$ und ψ_x ist das Goldstino der gebrochenen Supersymmetrie. Das Potential besitzt eine flache Richtung, da der Wert von x vollkommen unbestimmt ist.

Das Multiplett X bleibt masselos, während Y und Z zu einem massiven Multiplett kombinieren: Es gibt einen massiven Dirac-Spinor $\Psi_D = (\psi_z, c\psi_y^*)$ mit Massenquadrat $m_\chi^2 = g^2$, ein komplexer Skalar y mit $m_y^2 = g^2$ und zwei reelle Skalare $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ mit $m^2_{\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)} = g^2 \mp 2\lambda^2 M^2$. Der VEV des Hilfsfelds $\langle F_x \rangle$ wird mit dem Quadrat der Supersymmetrie-Brechungsskala M_S^2 identifiziert und geht ein in die Massenaufspaltung der Skalare, die außerdem von der Größe λ abhängt, mit welcher der Skalar z an das Goldstino koppelt.

5.2 O'Raifeartaigh-Modell an einer Wand

Im folgenden Modell wird an der Wand $x^5 = 0$ durch eine Erweiterung des Superpotentials (5.1) die Supersymmetrie gebrochen. Das erweiterte Superpotential lautet

$$W = \lambda X \left(Z^2 - M^2\right) + gYZ + \nu Z^2 H, \tag{5.2}$$

wobei X, Y und Z chirale Felder auf der Wand sind und $H = (A^1, \chi_L, (F^1 + \partial_5 A^2))$ der Randwert des Hypermultipletts. Wie im vorhergehenden Abschnitt 5.1 soll angenommen werden, daß $M^2 \leqslant g^2/(2\lambda^2)$. An der anderen Wand $x^5 = l$ existiert ein chirales Multiplett $\Phi = (\varphi, \psi_\varphi, F_\varphi)$, das über das Superpotential

$$\tilde{W} = \mu H \Phi^2 \tag{5.3}$$

an das Hypermultiplett koppelt.

Im Minimum des skalaren Potentials ist dann wie im rein vierdimensionalen Modell $y = z = \varphi = 0$ mit $\langle F_x \rangle = -\lambda M^2$ und $\langle F_y \rangle = \langle F_z \rangle = 0$, zusätzlich erhält man die Bedingungen $\langle \mathcal{F} \rangle = \langle \tilde{\mathcal{F}} \rangle = 0$ und $\langle F_\varphi \rangle = 0$. Das Potential besitzt zwei flache Richtungen, denn x und A^1 sind vollkommen unbestimmt, und Supersymmetrie ist an einer Wand spontan gebrochen

$$V_{min} = \delta\left(x^5\right) \lambda^2 M^4, \tag{5.4}$$

wobei ψ_x das Goldstino ist. Ebenso wie im rein vierdimensionalen Fall bleibt das Multiplett X masselos, der komplexe Skalar y erhält die Masse $m_y^2 = g^2$ und die reellen Skalare $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ besitzen eine Massenaufspaltung: $m^2_{\mathrm{Im}(z),\mathrm{Re}(z)} = g^2 \pm 2\lambda^2 M^2 \equiv g_\pm^2$. Die beiden Weyl-Spinoren ψ_y, ψ_z kombinieren zu einem massiven Dirac-Spinor Ψ_D mit Masse g^2. Damit die Lorentz-Symmetrie in jedem Kopplungsterm manifest ist, wird dieser Dirac-Spinor durch zwei symplektische Majorana-Spinoren $\Psi_D^{1,2}$ gemäß Gleichung (B.17) ersetzt. Außerdem werden alle Weyl-Spinoren durch Majorana-Spinoren ausgedrückt. Die Einzelheiten der Umformungen befinden sich in Anhang B.3.

Die vollständige Wirkung lautet

$$S = \int d^5x L_5 + \int_{x^5=0} d^4x L_4 + \int_{x^5=l} d^4x \tilde{L}_4 \tag{5.5}$$

mit

$$L_5 = \frac{1}{g_5^2}\left(\left(\partial_M A^i\right)^\dagger\left(\partial^M A^i\right) + \bar{\chi} i\gamma^M \partial_M \chi\right) \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}\tilde{L}_4 =& (\partial_m\varphi)^\dagger(\partial^m\varphi) + \bar{\Psi}_\varphi i\gamma^m\partial_m\Psi_\varphi \\ &- \delta(0) g_5^2\mu^2(\varphi^\dagger\varphi)^2 - 4\mu^2 A^{1\dagger}A^1\varphi^\dagger\varphi - 2\sqrt{2}\mu(\bar{\Psi}_\varphi P_+\chi)\varphi - 2\sqrt{2}\mu(\bar{\chi}P_-\Psi_\varphi)\varphi^\dagger \\ &- 2\mu(\bar{\Psi}_\varphi P_+\Psi_\varphi)A^1 - 2\mu(\bar{\Psi}_\varphi P_-\Psi_\varphi)A^{1\dagger} - \mu\varphi^2\partial_5 A^2 - \mu(\varphi^\dagger)^2\partial_5 A^{2\dagger}\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}L_4 =& (\partial_m x)^\dagger(\partial^m x) + (\partial_m y)^\dagger(\partial^m y) + (\partial_m z)^\dagger(\partial^m z) \\ &+ \bar{\Psi}_x i\gamma^m\partial_m\Psi_x + \bar{\Psi}_D^i i\gamma^m\partial_m\Psi_D^i \\ &- \delta(0) g_5^2\nu^2(z^\dagger z)^2 - \lambda^2 M^4 \\ &- g_-^2(\mathrm{Re}(z))^2 - g_+^2(\mathrm{Im}(z))^2 - g^2 y^\dagger y \\ &- 2g\lambda(y^\dagger xz + h.c.) - 2g\nu(y^\dagger zA^1 + h.c.) - \nu\left(z^2\partial_5 A^2 + h.c.\right) \\ &- z^\dagger z\left(\lambda^2 z^\dagger z + 4\lambda^2 x^\dagger x + 4\nu^2 A^{1\dagger}A^1 + (4\lambda\nu x^\dagger A^1 + h.c.)\right) \\ &+ g\left(\bar{\Psi}_D^1\Psi_D^1 - \bar{\Psi}_D^2\Psi_D^2\right) \\ &+ 2\lambda\bar{\Psi}_D^2 P_+\Psi_x z + 2\lambda\bar{\Psi}_x P_-\Psi_D^2 z^\dagger + 2\lambda\bar{\Psi}_x P_+\Psi_D^1 + 2\lambda\bar{\Psi}_D^1 P_-\Psi_x z^\dagger \\ &+ 2\lambda\bar{\Psi}_D^2 P_+\Psi_D^1 x + 2\lambda\bar{\Psi}_D^1 P_-\Psi_D^2 x^\dagger \\ &+ 2\sqrt{2}\nu\bar{\Psi}_D^2 P_+\chi z + 2\sqrt{2}\nu\bar{\chi}P_-\Psi_D^2 z^\dagger \\ &+ 2\nu\bar{\Psi}_D^2 P_+\Psi_D^1 A^1 + 2\nu\bar{\Psi}_D^1 P_-\Psi_D^2 A^{1\dagger}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

5.2.1 1-loop-Korrektur der skalaren Masse m_φ

Aus der Lagrange-Dichte (5.7) können die 1-loop-Korrekturen für den Skalar φ abgelesen werden. Es tragen vier Integrale bei: Ein Selbstwechselwirkungs-Anteil, der proportional zu $\delta(0)$ ist, und drei Integrale, die ein fünfdimensionales Feld enthalten. Das Auftreten eines Terms, der $\delta(0)$ enthält, wurde bereits in Abschnitt 4.3.2 diskutiert. Bei der Berechnung der 1-loop-Korrektur zeigt sich, daß sich der singuläre Term $\delta(0)$ teilweise gegen den ebenfalls singulären Term $(\varphi^2\partial_5 A^2 + h.c.)$ weghebt, was dem in Abschnitt 4.3.2 besprochenen Phänomen entspricht.

Die Propagatoren der inneren Felder enthalten einen kontinuierlich veränderlichen vierdimensionalen Implus k und einen quantisierten Impuls $k^5 = m\pi/l$ ($m \in \mathbb{Z}$) in x^5-Richtung. Der Propagator für ein unter der Orbifold-Projektion gerades Feld ist dann im Ortsraum gegeben durch

$$\langle a(x,0)a(y,0)\rangle = 2\int_{k5}\frac{i}{k^2-(k^5)^2}e^{-ik\cdot(x-y)}, \tag{5.9}$$

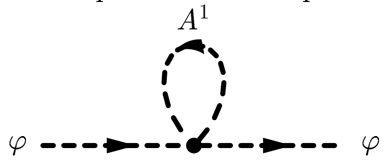
wobei die Abkürzung

$$\int_{k5} = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2l}\sum_{k^5\in\frac{\pi}{l}\mathbb{Z}} \tag{5.10}$$

verwendet wurde. Da das Feld A^2, das unter der Orbifold-Projektion ungerade ist, durch Ableitungen an die Wand koppelt, muß hier für A^2 der Propagator

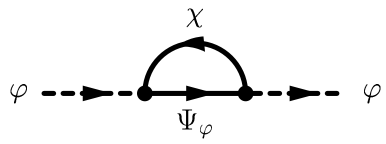
$$\frac{\partial}{\partial x^5}\frac{\partial}{\partial y^5}\langle a(x,x^5)a(y,y^5)\rangle|_{x^5=y^5=0} = 2\int_{k5}\frac{i(k^5)^2}{k^2-(k^5)^2}e^{-ik\cdot(x-y)} \tag{5.11}$$

eingesetzt werden. Mit p wird der äußere Impuls des Skalars φ bezeichnet, mit (k,k^5) der Implus im loop. Die drei 1-loop-Beiträge durch Kopplungen an innere Felder lauten dann



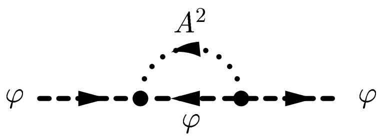
$$=4g_5^2\mu^2\int_{k5}\frac{1}{k^2-(k^5)^2}$$

$$=g_5^2\mu^2\int_{k5}\frac{1}{(p-k)^2(k^2-(k^5)^2)}4(p-k)^2,$$



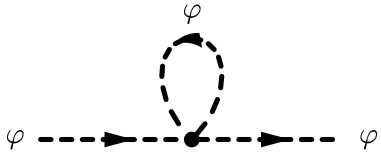
$$=4g_5^2\mu^2\int_{k5}\frac{1}{(p-k)^2(k^2-(k^5)^2)}\mathrm{tr}\,(P_-\gamma^m k_m P_+\gamma^n(p-k)_n)$$

$$=g_5^2\mu^2\int_{k5}\frac{1}{(p-k)^2(k^2-(k^5)^2)}8k\cdot(p-k),$$



$$=g_5^2\mu^2\int_{k5}\frac{1}{(p-k)^2(k^2-(k^5)^2)}4(k^5)^2.$$

Der Selbstenergie-Beitrag kann mit Hilfe der Darstellung (E.3) der Delta-Funktion auf die gleiche Form gebracht werden:



$$=g_5^2\mu^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4\delta(0)}{k^2}$$

$$=g_5^2\mu^2\int_{k5}\frac{1}{(p-k)^2(k^2-(k^5)^2)}4(k^2-(k^5)^2).$$

Die Summe dieser 1-loop-Beiträge führt zu einer Renormierung der Wellenfunktion, die mit Supersymmetrie verträglich ist:

$$-iM^2_{1-loop} = \sum_{Diagramme} = 4p^2 g_5^2 \mu^2 \int_{k5} \frac{1}{(p-k)^2(k^2-(k^5)^2)}. \tag{5.12}$$

5.2.2 2-loop-Korrektur der skalaren Masse m_φ

Im vorhergehenden Abschnitt wurde am 1-loop-Niveau explizit gezeigt, daß der Skalar φ der beobachtbaren Wand durch Selbst-Wechselwirkungen und Kopplungen an ein Hypermultiplett keine Masse erhält.

Am 2-loop-Niveau koppelt der Skalar über das Hypermultiplett an die verborgene Wand $x^5 = l$, an der Supersymmetrie gebrochen ist und erhält durch diese Kopplung eine weich brechende Masse. Die Diagramme, die zu dieser Brechung beitragen, sind gegeben durch 5.1, wobei im Fall gebrochener Supersymmmetrie die Diagramme für Re(z) und Im(z) getrennt berechnet werden müssen.

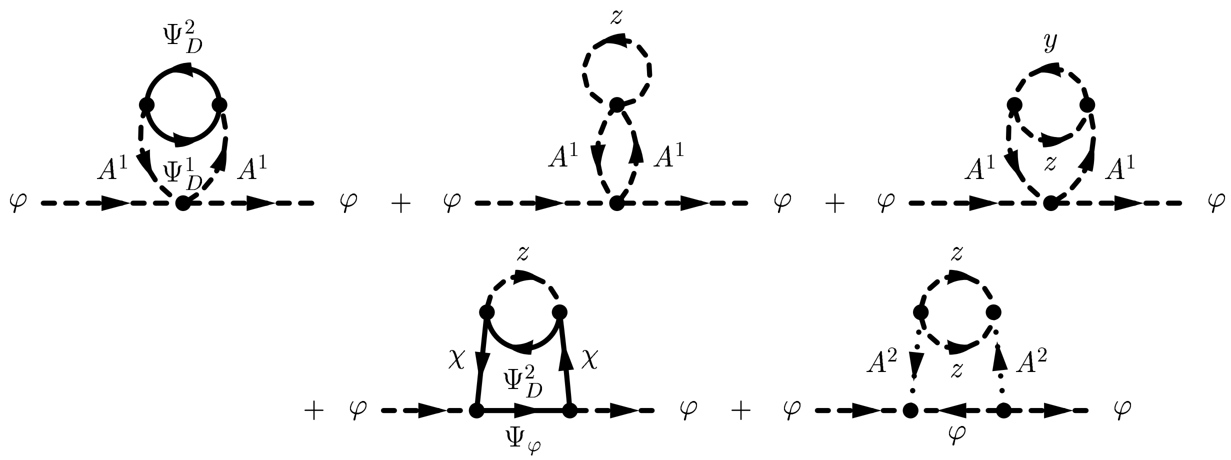


Abbildung 5.1: 2-loop-Korrekturen der Masse eines Skalars an der Wand $x^5 = l$ durch Wechselwirkungen mit einem fünfdimensionalen Hypermultiplett

Jedes Diagramm enthält zwei Propagatoren innerer Felder zwischen den Wänden $x^5 = 0$ und $x^5 = l$. Im Ortsraum ist der Propagator des Skalars, das gerade unter der Orbifold-Projektion ist, gegeben durch (vgl. Anhang D)

$$\langle a(x,0)a(y,l)\rangle = 2\int_{k5} \frac{i}{k^2-(k^5)^2} e^{-ik\cdot(x-y)} \cdot (-1)^m. \tag{5.13}$$

Der ungerade Skalar A^2 koppelt durch Ableitungen an die Wände. Ebenso wie im vorhergehenden Abschnitt führt dies zu einem Propagator für A^2, der sich aus dem geraden Propagator und einem Faktor $(k^5)^2$ zusammensetzt, falls der Impuls in x^5-Richtung gerade k^5 ist.

Wenn q der loop-Impuls an der verborgenen Wand $x^5 = l$ ist, $m_{1,2}$ die Massen der Teilchen an dieser Wand und (k, k^5) sowie $(k, \hat{k}^5)$ die Impulse der inneren Felder, haben alle

Korrekturen in Abbildung 5.1 die Struktur

$$-iM^2(p=0) = i\mu^2\nu^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int_{k55} \frac{1}{k^2[k^2-(k^5)^2][k^2-(\hat{k}^5)^2]} \frac{N(k,k^5,\hat{k}^5,q)}{[q^2-m_1^2][(q-k)^2-m_2^2]}, \tag{5.14}$$

wobei

$$\int_{k55} \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2l} \sum_n \frac{1}{2l} \sum_{\hat{n}} 4 \cdot (-1)^{n+\hat{n}} \tag{5.15}$$

die k^5-Abhängigkeit der Propagatoren innerer Felder enthält. Die Summationen über k^5 und $\hat{k}^5$ in Gleichung (5.14) sind unabhängig voneinander, da der Impuls auf einer Orbifold keine Erhaltungsgröße ist.

An dieser Stelle sollen keine Renormierungen der Wellenfunktion des beobachtbaren Skalars betrachtet, sondern nur die weich brechende Masse berechnet werden. Deshalb wird im folgenden - wie in Gleichung (5.14) bereits benutzt - der äußere Impuls p gleich null gesetzt.

Die Diagramme, die den inneren Skalar A^2 enthalten, besitzen im Zähler einen Faktor $(k^5)^2$, der durch den Propagator entsteht. Dieser Faktor kann durch k^2 ersetzt werden, wenn man die Darstellung (E.4) der Delta-Funktion auf der Orbifold verwendet. Nach dieser Umformung lautet die Summe der 2-loop-Diagramme mit Kopplung an die verborgene Wand

$$\begin{aligned}
-iM^2_{2-loop}(p=0) =& i\mu^2\nu^2 g_5^4 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int_{k55} \frac{1}{[k^2-(k^5)^2][k^2-(\hat{k}^5)^2]} \\
& \Bigg\{ -8 \frac{q\cdot(q-k)}{[q^2-g^2][(q-k)^2-g^2]} + 4\Big(\frac{1}{[q^2-g_-^2]} + \frac{1}{[q^2-g_+^2]}\Big) \\
& + 4g^2 \Big(\frac{1}{[q^2-g_-^2][(q-k)^2-g^2]} + \frac{1}{[q^2-g_+^2][(q-k)^2-g^2]}\Big) \\
& - 8\Big(\frac{k\cdot(k-q)}{[q^2-g_-^2][(q-k)^2-g^2]} + \frac{k\cdot(k-q)}{[q^2-g_+^2][(q-k)^2-g^2]}\Big) \\
& + \Bigg(\frac{k^2}{[q^2-g_-^2][(q-k)^2-g_-^2]} + \frac{k^2}{[q^2-g_+^2][(q-k)^2-g_+^2]} \\
& \quad + 2\frac{k^2}{[q^2-g_-^2][(q-k)^2-g_+^2]}\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned} \tag{5.16}$$

wobei die einzelnen Beiträge in der Reihenfolge der Diagramme geordnet sind. Die Summanden, in denen g_-^2 vorkommt, beschreiben die loops mit $\mathrm{Re}(z)$, die mit g_+^2 enthalten entsprechend $\mathrm{Im}(z)$.

Nach Ausführung einer Wickrotation

$$\begin{aligned}
k^0 &\equiv ik_E^0 \\
\vec{k} &= \vec{k}_E \\
q^0 &\equiv iq_E^0 \\
\vec{q} &= \vec{q}_E
\end{aligned} \tag{5.17}$$

kann die Summe durch Euklidische 2-loop-Integrale in d Dimensionen [22]

$$(m_1 m_2 | m_3 | m_4) \equiv \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{k_E^2 + m_1^2} \frac{1}{k_E^2 + m_2^2} \frac{1}{q_E^2 + m_3^2} \frac{1}{(q_E - k_E)^2 + m_4^2} \tag{5.18}$$

ausgedrückt werden. Im folgenden wird der Index E nicht explizit ausgeschrieben. Der Übersichtlichkeit halber wird außerdem die Abkürzung

$$[\mathcal{A}] = \frac{1}{2l} \sum_n \frac{1}{2l} \sum_{\hat{n}} 4 \cdot (-1)^{n+\hat{n}} \mathcal{A}(k^5, \hat{k}^5) \tag{5.19}$$

verwendet. Um die Notation weiter zu vereinfachen, wird ein Term, der k^2 im Zähler enthält, mit $\left[k^2 (m_1 m_2 | m_3 | m_4)\right]$ bezeichnet.

Die skalare Masse, die durch die Diagramme in 5.1 entsteht, ist dann gegeben durch

$$m_\varphi^2 = -\mu^2 \nu^2 g_5^4 \left[k^2 R + 4S\right] \tag{5.20}$$

mit

$$\begin{aligned} R =& 4(k^5 \hat{k}^5 | g | g_+) + 4(k^5 \hat{k}^5 | g | g_-) - 4(k^5 \hat{k}^5 | g | g) \\ & - (k^5 \hat{k}^5 | g_- | g_-) - (k^5 \hat{k}^5 | g_+ | g_+) - 2(k^5 \hat{k}^5 | g_- | g_+) \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$S = g_+^2 (k^5 \hat{k}^5 | g_+ | g) + g_-^2 (k^5 \hat{k}^5 | g_- | g) - 2g^2 (k^5 \hat{k}^5 | g | g). \tag{5.22}$$

In dieser kompakten Schreibweise ist deutlich sichtbar, daß sich die Summanden in den Anteilen R und S im Fall ungebrochener Supersymmetrie ($g = g_+ = g_-$) gegenseitig wegheben. Um die Korrektur der skalaren Masse weiter ausrechnen zu können, müssen die Summen über k^5 und $\hat{k}^5$ ausgeführt und die vierdimensionalen Integrationen über q berechnet werden.

Die Summation über k^5 kann mit Hilfe des Residuensatzes ausgeführt werden: Die Summe wird in ein Konturintegral in der komplexen Ebene umgewandelt:

$$\frac{1}{2l} \sum_n 2(-1)^n \frac{1}{k^2 + (k^5)^2} = \oint \frac{dk^5}{2\pi} \frac{2e^{ik^5 l}}{e^{2ik^5 l} - 1} \frac{1}{k^2 + (k^5)^2}, \tag{5.23}$$

wobei um die Pole $k^5 = \pi n / l$ auf der reellen Achse integriert wird (erster Integrationsbereich in Abbildung 5.2). Verschiebt man die Kontur über die zusätzlichen Pole des Integranden $k^5 = \pm ik$ (zweiter Integrationsbereich in Abbildung 5.2), so verschwindet das vollständige Integral. Die beiden imaginären Pole tragen jeweils $(-2k \sinh(kl))^{-1}$ zu der Summe bei. Damit kann die ursprüngliche Summation explizit angegeben werden:

$$\frac{1}{2l} \sum_n 2(-1)^n \frac{1}{k^2 + (k^5)^2} = \frac{1}{k} \frac{1}{\sinh(kl)}. \tag{5.24}$$

Da die Summationen über k^5 und $\hat{k}^5$ unabhängig voneinander sind, kann diese Umformung für jeden Propagator einzeln vorgenommen werden.

Gleichzeitig mit der Summation über k^5 können die loop-Integrale über den Impuls q ausgeführt werden. Die einzelnen Integrale sind in vier Dimensionen UV-divergent. Um ein endliches Ergebnis zu erhalten, wird die Methode der Dimensionsregularisierung [26, 27] verwendet, da sie globale Supersymmetrie und Unitarität der Theorie manifest erhält. Ist eine

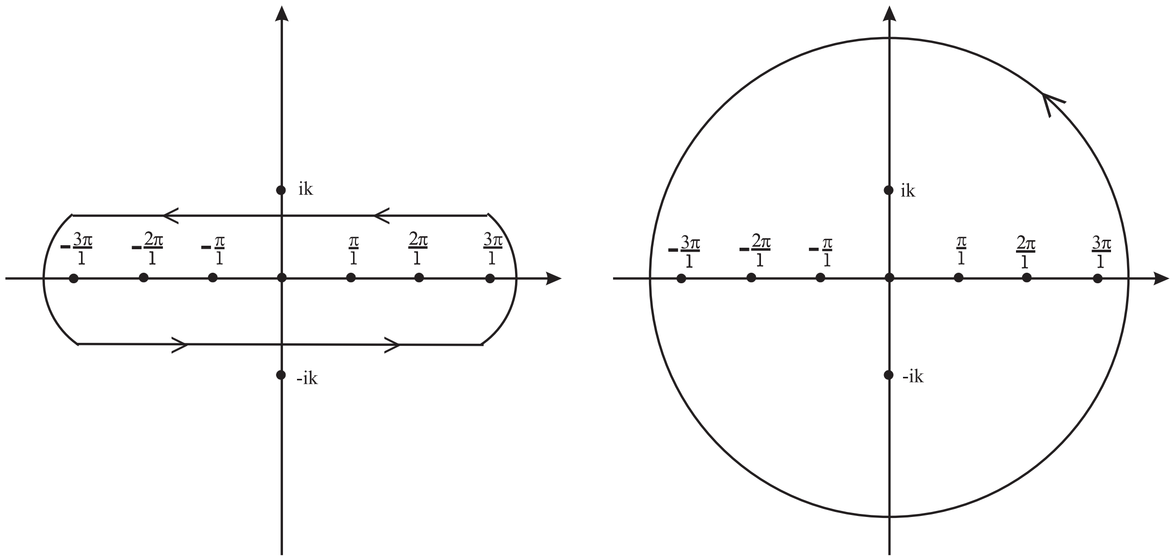


Abbildung 5.2: Integrationsbereiche des Konturintegrals

Theorie eichinvariant, so bleibt diese Symmetrie ebenfalls bei Dimensionsregularisierung erhalten. Bei dieser Methode wird die Anzahl d der Raumzeit- und Impuls-Koordinaten analytisch fortgesetzt, während die Zahl der Komponenten aller anderen Tensoren und Spinoren festgehalten wird. Nach einigen Umformungen, die in Anhang G aufgeführt sind, kann das skalare Basis-Integral durch das Selbstenergie-Integral $b(k^2, m_1^2, m_2^2)$, das die explizite Darstellung (G.8) besitzt, ausgedrückt werden:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(q-k)^2 + m_1^2][q^2 + m_2^2]} \xrightarrow{d \to 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - b(k^2, m_1^2, m_2^2) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right). \tag{5.25}$$

Die divergenten Anteile $2/\epsilon$ und die universelle Konstante γ heben sich bei der Summation über alle 1-loop-Beiträge in Gleichung (5.21) und (5.22) weg, und übrig bleiben die beschränkten endlichen Funktionen

$$\begin{aligned} \mathcal{R} =& 4b(k^2, g_+^2, g^2) + 4b(k^2, g_-^2, g^2) - 4b(k^2, g^2, g^2) \qquad (5.26) \\ & - b(k^2, g_-^2, g_-^2) - b(k^2, g_+^2, g_+^2) - 2b(k^2, g_-^2, g_+^2) \\ \mathcal{S} =& g_+^2 b(k^2, g_+^2, g^2) + g_-^2 b(k^2, g_-^2, g^2) - 2g^2 b(k^2, g^2, g^2). \qquad (5.27) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Gleichung (G.12) und (G.13) kann das asymptotische Verhalten dieser beiden Funktionen bestimmt werden:

$$\mathcal{R}(k^2) \overset{k^2 \to 0}{\longrightarrow} \left(\frac{3+2x}{x} \log(1+x) + \frac{-3+2x}{x} \log(1-x) - 6 \right) \equiv \mathcal{R}_0(x) \tag{5.28}$$

$$\mathcal{S}(k^2) \overset{k^2 \to 0}{\longrightarrow} g^2 \left(\frac{(1+x)^2}{x} \log(1+x) - \frac{(1-x)^2}{x} \log(1-x) - 2 \right) \equiv \mathcal{S}_0(x) \tag{5.29}$$

$$\mathcal{R}(k^2) \overset{k^2 \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{O}(g^4/k^4) \tag{5.30}$$

$$\mathcal{S}(k^2) \overset{k^2 \to \infty}{\longrightarrow} g^2 \left(2x^2 \frac{g^2}{k^2} \log \frac{k^2}{g^2} - (1+x)^2 \frac{g^2}{k^2} \log(1+x) - (1-x)^2 \frac{g^2}{k^2} \log(1-x) \right). \tag{5.31}$$

Hierbei ist x ein Maß für die Aufspaltung der Massen, das gegeben ist durch $g_{\pm}^2 = g^2(1 \pm x)$.

Beide Funktionen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ nehmen also für kleine Impulse einen endlichen Wert an, wobei für eine kleine Aufspaltung x der Massen $\mathcal{R}_0(x) \sim x^4$ und $\mathcal{S}_0(x) \sim x^2$ sind. Für große Impulse verschwindet die Funktion $\mathcal{R}$ mit g^4/k^4, und $\mathcal{S}$ nimmt mit $g^2/k^2 \cdot \log(k^2/g^2)$ ab.

Wenn man die Funktion

$$\mathcal{P}(k^2) = k^2\mathcal{R}(k^2) + 4\mathcal{S}(k^2), \tag{5.32}$$

definiert, die Summation über $k^5, \hat{k}^5$ ausführt und die Identität $d^4k = 2\pi^2 k^3 dk$ für ein sphärisch symmetrisches euklidisches Integral benutzt, dann ist die skalare Masse gegeben durch

$$m_\varphi^2 = 2\mu^2\nu^2 \left(\frac{1}{(4\pi)^2}\right)^2 (g_5^2)^2 \int_0^\infty dk\, k \frac{1}{\sinh^2(kl)} \mathcal{P}(k^2). \tag{5.33}$$

Für die folgende Diskussion dieses Ausdrucks wird die Masse zerlegt in einen Anteil, der von der Funktion $\mathcal{R}$ abhängt, und einen anderen Anteil, der von $\mathcal{S}$ abhängt:

$$m_\varphi^2 = m^2(\mathcal{R}) + m^2(\mathcal{S}). \tag{5.34}$$

Der erste Anteil ist endlich, der zweite IR-divergent. Hier wird zunächst nur der endliche Anteil betrachtet: Für sehr kleine Abstände l kann die rechte Seite in Gleichung (5.24) durch den führenden Term angenähert werden

$$\frac{1}{k}\frac{1}{\sinh(kl)} = \frac{1}{l}\frac{1}{k^2} + \mathcal{O}(l), \tag{5.35}$$

was gleichbedeutend ist mit der Aussage, daß bei sehr kleinen Abständen nur der Impuls $k^5 = 0$ zu der Summe in der linken Seite der Gleichung (5.24) beiträgt. Dies führt auf die Gleichung

$$m^2(\mathcal{R}) = 2\mu^2\nu^2 \left(\frac{1}{(4\pi)^2}\right)^2 \left(\frac{g_5^2}{l}\right)^2 \int_0^\infty k\, dk \mathcal{R}(k^2) \tag{5.36}$$

für einen kleinen Abstand l der Wände. Damit der Limes $l \to 0$ wohldefiniert ist, muß $g_5^2 \sim l$ gelten; g_5^2/l ist also eine dimensionslose Größe der Größenordnung 1.

Mit Hilfe der expliziten Darstellung (G.8) der Selbstenergie-Integrale kann nun das Integral $\int k\, dk \mathcal{R}(k^2)$ berechnet werden. Für $gl \to 0$ erhält man

$$m^2(\mathcal{R}) = 2\mu^2\nu^2 \left(\frac{1}{(4\pi)^2}\right)^2 \left(\frac{g_5^2}{l}\right)^2 g^2 \Big\{ -\frac{1+x}{2x}\log(1+x) + \frac{1-x}{2x}\log(1-x) + 1 \Big\}. \tag{5.37}$$

Wenn der Abstand l der Wände groß ist, schneidet der Sinus Hyperbolicus im Nenner des Integrals (5.33) den Integranden bei einem sehr kleinen Wert k ab, so daß $\mathcal{R}(k^2)$ durch den führenden Term für kleine k ersetzt werden kann. Die Substitution $y = kl$ führt dann zu einer Abhängigkeit der skalaren Masse vom Abstand der Wände in der Form $\sqrt{g_5^4/l^4}$. Die explizite Berechnung für $gl \to \infty$ ergibt

$$m^2(\mathcal{R}) = 2\mu^2\nu^2 \left(\frac{1}{(4\pi)^2}\right)^2 (g_5^2)^2 \frac{1}{l^4} \mathcal{R}_0(x) \frac{3}{2}\zeta(3). \tag{5.38}$$

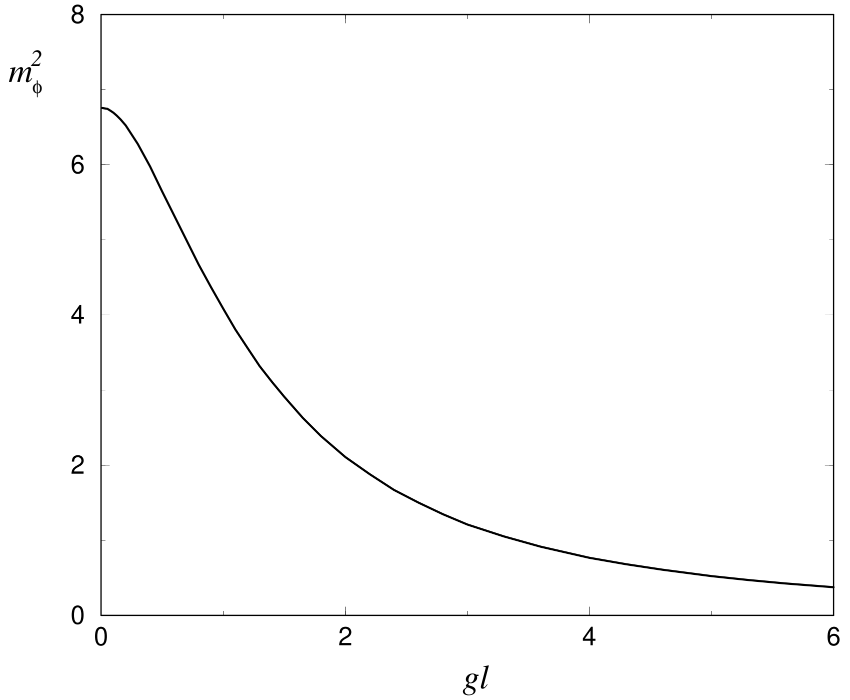


Abbildung 5.3: Verhalten der induzierten weichen Masse an der Wand $x^5 = l$ für den Wert $x = 0.25$. m_φ^2 ist in Einheiten von $10^{-4} \cdot 2\mu^2\nu^2/(4\pi)^4(g_5^2/l)^2g^2$ aufgetragen.

In Abbildung 5.3 ist die Abhängigkeit der skalaren Masse m_φ vom Abstand l der Wände beispielhaft für den Wert $x = 0.25$ aufgetragen.

Nun bleibt noch der IR-divergente Anteil zu betrachten: Der Integrand

$$k\frac{1}{\sinh^2(kl)}\mathcal{S} \tag{5.39}$$

des Massenanteils $m^2(\mathcal{S})$ fällt für große Impulse aufgrund des asymptotischen Verhaltens (5.31) exponentiell ab. Betrachtet man den vierdimensionalen Grenzfall, so erhält man ein Integral mit unterem cut-off m_0 der Form

$$m^2(\mathcal{S}) = 2\mu^2\nu^2\left(\frac{1}{(4\pi)^2}\right)^2\left(\frac{g_5^2}{l}\right)^2\int_{m_0}^{\infty}\frac{dk}{k}\mathcal{S}(k^2). \tag{5.40}$$

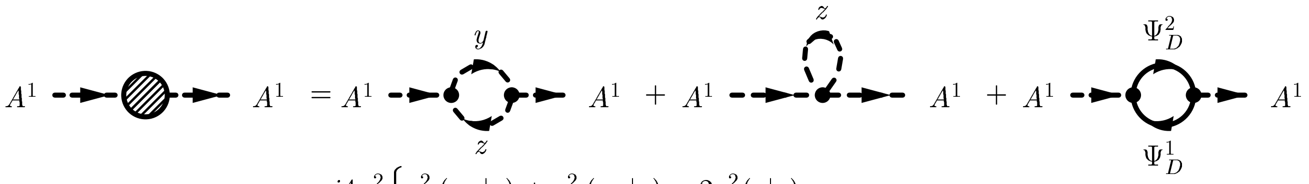
An der oberen Integrationsgrenze verschwindet der Integrand, während die untere Grenze einen Beitrag der Form $\log(m_0/g)$ liefert. Setzt man nun als cut-off $m_0 = g$ ein, so verschwindet der Beitrag der unteren Integrationsgrenze. Durch geeignete Renormierung der skalaren Masse erhält man also als endgültiges Ergebnis

$$\left(m_\varphi^2\right)^{ren} = m^2(\mathcal{R}), \tag{5.41}$$

und die renormierte skalare Masse ist durch das asymptotische Verhalten (5.37) für $gl \to 0$ sowie (5.38) für $gl \to \infty$ gegeben. Man sieht, daß die induzierte weich brechende Masse vom vierdimensionalen Fall mit zunehmendem Abstand der Wände l abfällt und sich für $l > 1/g$

wie g_5^2/l^2 verhält. Dies Verhalten ist das gleiche, das auch bei dem Modell auftritt, das im inneren ein Yang-Mills-Multiplett enthält.

Eine weitere Begründung dafür, daß der $\mathcal{S}$-Term nicht zur physikalischen Masse des Skalars φ beiträgt, erhält man, wenn man die 1-loop-Korrekturen der Propagatoren an der Wand $x^5 = 0$ betrachtet: Die Propagatoren der inneren Felder χ und A^2 erhalten eine Wellenfunktions-Renormierung, während die 1-loop-Korrektur für A^1 folgende Form hat:

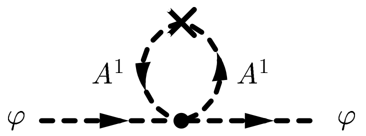


$$
\begin{aligned}
&= i4\nu^2 \Big\{ g_+^2 (g_+|g) + g_-^2 (g_-|g) - 2g^2 (g|g) \\
&\qquad - \Big(k^2 (g|g) + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{k \cdot (k-2q)}{[q^2 + g_+^2][(q-k)^2 + g^2]} \\
&\qquad\qquad + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{k \cdot (k-2q)}{[q^2 + g_-^2][(q-k)^2 + g^2]} \Big) \Big\} \\
&= -i4\nu^2 \left\{ \mathcal{S} + k^2 (\dots) \right\} \\
&= -i M_{1-loop}^2 (A^1).
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

Hierbei ist $\mathcal{S}$ die durch Gleichung (5.27) gegebene Funktion. Aufgrund des asymptotischen Verhaltens (5.29) für kleine Impulse trägt diese Funktion zu einer Massenkorrektur des inneren Skalars A^1 bei.

In dem Modell aus [16], in dem die fünfdimensionalen Felder ein Yang-Mills-Multiplett bilden, können aufgrund der erhaltenen Eichsymmetrie keine Massenkorrekturen der inneren Felder auftreten. Ebenso wie in dem hier behandelten Modell der Übertragung durch ein Hypermultiplett treten Wellenfunktions-Renormierungen der einzelnen Felder auf, deren Beiträge sich jedoch in der Berechnung der skalaren Masse an der beobachtbaren Wand kompensieren.

Im Gegensatz zur Supersymmetrie-Brechungsübertragung durch Eichfelder werden die Komponenten des Hypermultipletts nicht automatisch durch eine Symmetrie vor Massenkorrekturen geschützt. Fordert man allerdings, daß die physikalischen fünfdimensionalen Felder masselos sein sollen, so muß eine endliche Massenrenormierung für den Skalar A^1 am 1-loop-Niveau vorgenommen werden. Dies geschieht am einfachsten, indem ein Counterterm zu der Lagrange-Dichte hinzugefügt wird, der genau den Massenanteil $\mathcal{S}$ kompensiert. Der Counterterm erzeugt ein weiteres Diagramm, das zu der 2-loop-Korrektur der skalaren Masse m_φ beiträgt:



(5.43)

Dieses Diagramm trägt aufgrund der Wahl des Counterterms $m^2_{Counter} = -m^2(\mathcal{S})$ zu der skalaren Masse bei. Somit erhält man für die skalare Masse

$$\begin{aligned}\left(m^2_\varphi\right)^{ren} =& m^2_\varphi + m^2_{Counter} \\ =& \left(m^2(\mathcal{R}) + m^2(\mathcal{S})\right) - m^2(\mathcal{S}) \\ =& m^2(\mathcal{R}),\end{aligned} \tag{5.44}$$

was mit dem bereits gefundenen Ergebnis (5.41) übereinstimmt.

5.2.3 2-loop-Korrektur des fermionischen Propagators

Die Brechung der Supersymmetrie ist an der beobachtbaren Wand nur dann meßbar, wenn der supersymmetrische Partner ψ_φ nicht die gleiche Massenkorrektur wie der Skalar erhält. Da das Fermion ψ_φ chiral ist und die chirale Symmetrie nicht gebrochen wird, bleibt das Fermion in jeder Ordnung Störungstheorie masselos. Eine explizite Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}-i\Sigma(\Psi_\varphi) =& i\mu^2\gamma^m \int_{k55} \frac{1}{[k^2+(k^5)^2][k^2+(\hat{k}^5)^2](p-k)^2} \\ & \Bigg\{ (p-k)_m \Big[\, A^1 \text{ ---}\!\oslash\!\text{--- } A^1 \,\Big] \\ & + \nu^2 k^2 k_m \int_0^1 dx(1-x) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Big[\frac{1}{[q^2 + x(1-x)k^2 + xg^2 + (1-x)g^2_+]^2} + (g^2_+ \leftrightarrow g^2_-) \Big] \Bigg\},\end{aligned} \tag{5.45}$$

wobei der erste Summand aufgrund des ersten Diagramms in Abbildung 5.4 entsteht und der zweite Summand aufgrund des zweiten Diagramms. Mit p^m wird der äußere Implus bezeichnet, $\Big[\, A^1 \text{ ---}\!\oslash\!\text{--- } A^1 \,\Big]$ ist durch Gleichung (5.42) gegeben und das Weyl-Fermion ψ_φ wurde wie in den vorhergehenden Rechnungen durch einen Majorana-Spinor Ψ_φ ersetzt.

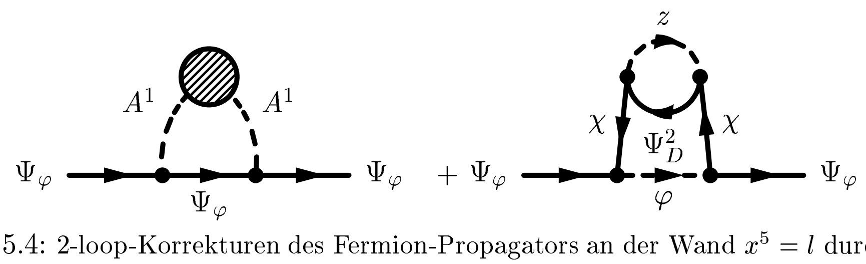


Abbildung 5.4: 2-loop-Korrekturen des Fermion-Propagators an der Wand $x^5 = l$ durch Wechselwirkungen mit einem fünfdimensionalen Hypermultiplett

Wird nun für den äußeren Impuls $p^m = 0$ eingesetzt, so erhält man einen Integranden der Form $k_m f(k^2)$. Aufgrund der sphärischen Symmetrie von $f(k^2)$ verschwindet das Integral über den Viererimpuls k^m. Damit ist explizit gezeigt, daß die Wellenfunktion des Fermions Ψ_φ renormiert wird, jedoch kein Massenterm entsteht.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird ein global supersymmetrisches Modell in fünf Dimensionen konstruiert, anhand dessen die Übertragung von spontaner Supersymmetrie-Brechung zwischen zwei Wänden untersucht werden kann. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist die in Abbildung 5.3 gezeigte Abhängigkeit einer induzierten skalaren Masse vom Abstand der Wände, wenn die Supersymmetrie an einer verborgenen Wand spontan gebrochen ist und der betrachtete Skalar sich an der anderen (beobachtbaren) Wand befindet.

Eine mögliche Erweiterung dieses Modells im Hinblick auf die heterotische $E_8 \times E_8$ M-Theorie ist die Einbettung in eine Supergravitationstheorie in fünf Dimensionen. Sinnvoll wäre außerdem die Einführung von Super-Yang-Mills-Feldern auf den Wänden.

Neben der heterotischen $E_8 \times E_8$ M-Theorie gibt es möglicherweise eine Anwendung des hier diskutierten Modells in der Theorie des Typ I-Strings. In dieser Theorie existieren p-dimensionale ausgedehnte Objekte, sogenannte „p-branes", auf denen offene Strings enden. Es bietet sich an, die beobachtbare Welt als auf einer solchen brane lokalisiert zu betrachten. Der favorisierte Kandidat ist hierbei die 3-brane, deren Weltvolumen einen vierdimensionalen Raum aufspannt. In einem solchen Modell könnte die Supersymmetrie auf einer verborgenen brane gebrochen und diese Brechung durch innere Anregungszustände auf die beobachtbare brane übertragen werden.

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Prof. Hans-Peter Nilles für die freundliche Betreuung dieser Arbeit und seine ständige Diskussionsbereitschaft. Desweiteren möchte ich mich bei Jan Conrad, Stefan Förste, Yoshiharu Kawamura, Zygmunt Lalak, Stéphane Lavignac, Khazret Nirov, Ralph Schreyer und Max Zucker für die gute Atmosphäre und viele hilfreiche Diskussionen bedanken. Für die Unterstützung in Computer-Fragen danke ich außerdem Katrin Wendland und Andreas Wißkirchen.

Meinen Eltern danke ich für ihre Liebe und Unterstützung während des gesamten Studiums und meinen Geschwistern und Freundinnen für seelischen Beistand in Stunden der Frustration.

Anhang A

Dirac-Matrizen

Die Raumzeit-Metrik ist immer zeitartig gewählt: $\eta_{MN} = diag(1,-1,-1,-1,-1)$.
Die Dirac-Matrizen bilden eine Clifford-Algebra

$$\{\gamma^M, \gamma^N\} = 2\eta^{MN}. \tag{A.1}$$

Für d Raumzeit-Dimensionen ist die Dimension der Dirac-Matrizen $2^{[d/2]} \times 2^{[d/2]}$. Bei einer zeitartigen Wahl der Metrik gibt es immer eine Darstellung der Dirac-Matrizen, in der γ^0 hermitesch ist und die Dirac-Matrizen mit raumartigem Index antihermitesch sind.
In fünf Dimensionen ist eine Darstellung

$$\gamma^M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}. \tag{A.2}$$

Hierbei ist $M = 0,1,2,3,4$ und $m = 0,1,2,3$.
σ^a, $a = 1,2,3$ sind die Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

und $\sigma^m = (\mathbb{1}_2, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^m = (\mathbb{1}_2, -\vec{\sigma})$.

Die 2×2 und 4×4 Ladungskonjugations-Matrizen sind:

$$c = -i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Es gelten folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} c^T &= c^{-1} = -c \\ C^T &= C^{-1} = -C \\ (c\bar{\sigma}^m)^T &= -c\,\sigma^m \\ \left(C\gamma^M\right)^T &= -C\,\gamma^M \end{aligned} \tag{A.5}$$

Für die Pauli-Matrizen gilt außerdem ($a = 1,2,3$):

$$(\sigma^a)^{ij}\,(\sigma^a)^{kl} = 2\delta^{jk}\delta^{il} - \delta^{ij}\delta^{kl} \tag{A.6}$$

Anhang B

Spinoren

B.1 Spinoren in verschiedenen Dimensionen

Die folgenden Überlegungen gelten für den d-dimensionalen Minkowski-Raum unabhängig davon, ob die Metrik raum- oder zeitartig gewählt ist (vgl. [33]). Das Dirac-Konjugierte zum Spinor χ ist definiert durch

$$\bar{\chi}_D = \chi^\dagger \gamma_0, \tag{B.1}$$

das Majorana-Konjugierte durch

$$\bar{\chi}_M = \chi^T C \tag{B.2}$$

mit der Ladungskonjugationsmatrix C und ein links- bzw. rechtshändiger Weyl-Spinor in geraden Dimensionen d durch

$$\begin{aligned} \chi_L &= \gamma_{d+1} \chi_L \\ \chi_R &= -\gamma_{d+1} \chi_R, \end{aligned} \tag{B.3}$$

wobei gilt $\gamma_{d+1} \sim \gamma_0 \cdots \gamma_{d-1}$ mit $(\gamma_{d+1})^2 = -\mathbb{1}$ für eine zeitartige Metrik. Die Händigkeit eines Spinors bleibt in der Zeitentwicklung nur dann erhalten, wenn er masselos ist.

Ein Majorana-Spinor ist gegeben durch

$$\bar{\chi}_M = \bar{\chi}_D. \tag{B.4}$$

Damit Majorana-Spinoren existieren können, muß gelten:

1. Bei massiven Spinoren ($m \neq 0$): $(\gamma^\mu)^T = -C\gamma^\mu C^{-1}$
2. Bei masselosen Spinoren ($m = 0$): $(\gamma^\mu)^T = \alpha\, C\gamma^\mu C^{-1}$ mit $\alpha = \pm 1$.

In geraden Dimensionen existieren zu beiden Werten $\alpha = \pm 1$ die jeweiligen Matrizen $C_\pm$. In ungeraden Dimensionen existiert nur C_+ oder C_-. Durch zweimalige Anwendung der Matrix-Identitäten erhält man $C^T = aC$ mit $a = \pm 1$ und $(C\gamma^\mu)^T = \pm C\gamma^\mu$. Damit die Dirac-Wirkung

$$\int d^d x \bar{\chi}_M (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\chi \tag{B.5}$$

für antikommutierende Spinoren nicht identisch verschwindet, muß gelten:

1. Für massive Spinoren ($m \neq 0$): $(C\gamma^\mu)^T = C\gamma^\mu$ und $C^T = -C$
2. Für masselose Spinoren ($m = 0$): $(C\gamma^\mu)^T = C\gamma^\mu$.

Zusammen mit der Möglichkeit, C unitär zu wählen, also $C^* = (C^T)^{-1}$, führt dies zu der Konsistenzbedingung

$$\begin{aligned} C_+^T =& C_+ \\ C_-^T =& - C_- . \end{aligned} \tag{B.6}$$

Diese Konsistenzbedingung kann in fünf Dimensionen nicht erfüllt werden.

Majorana-Weyl-Spinoren erfüllen die Majorana- (B.4) und eine Weyl-Bedingung (B.3), d.h. sie können nur definiert werden, falls $d/2 \in \mathbb{Z}$ ist (d ist die Raumzeit-Dimension). Die Konsistenz-Bedingung für ihre Existenz lautet

$$n_\tau = \frac{d}{2} \mathrm{mod}\, 2, \tag{B.7}$$

wobei n_τ die Anzahl der zeitartigen Dirac-Matrizen angibt. Für den Minkowski-Raum kann das Ergebnis in folgender Tabelle zusammengefaßt werden:

Majorana- und Weyl-Spinoren im Minkowski-Raum (B.8)

Dim.	Symmetrie	$C\gamma^\mu$ symmetrisch	Bed.$(B.6)$ erfüllt	Existenz Maj.	Existenz Maj.-Weyl
2	$C_+^T = C_+$	ja	ja	ja	ja
	$C_-^T = -C_-$	ja	ja	ja	ja
3	$C_-^T = -C_-$	ja	ja	ja	–
4	$C_+^T = -C_+$	$nein$	$nein$	$nein$	–
	$C_-^T = -C_-$	ja	ja	ja	$nein$
5	$C_+^T = -C_+$	$nein$	$nein$	$nein$	–
6	$C_+^T = -C_+$	$nein$	$nein$	$nein$	–
	$C_-^T = C_-$	$nein$	$nein$	$nein$	–
7	$C_-^T = C_-$	$nein$	$nein$	$nein$	–
8	$C_+^T = C_+$	ja	ja	ja	$nein$
	$C_-^T = C_-$	$nein$	$nein$	$nein$	–
9	$C_+^T = C_+$	ja	ja	ja	–
10	$C_+^T = C_+$	ja	ja	ja	ja
	$C_-^T = -C_-$	ja	ja	ja	ja
11	$C_-^T = -C_-$	ja	ja	ja	–

In Dimensionen, in denen es keine Majorana-Spinoren im Minkowski-Raum gibt, kann eine verallgemeinerte Realitätsbedingung gestellt werden: Man nennt λ_i $(i = 1, 2)$ symplektische Majorana-Spinoren, falls gilt

$$\lambda_i = \Omega_{ij} C \bar{\lambda}_j^T. \tag{B.9}$$

Dabei ist $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ eine symplektische Metrik.

B.2 Spinor-Identitäten in fünf Dimensionen

Symplektische Majorana-Spinoren in fünf Dimensionen (mit $i, j = 1, 2$, c total antisymmetrisch und $c^{12} = -1$, der Dirac-konjugierte Spinor ist definiert durch (B.1)):

$$\psi^i = c^{ij} C \bar{\psi}^{jT} \qquad \bar{\psi}^i = -c^{ij} (\psi^j)^T C. \tag{B.10}$$

Zerlegung in zweikomponentige chirale Spinoren:

$$\psi^i = \begin{pmatrix} \phi_L^i \\ \phi_R^i \end{pmatrix} \qquad \bar{\psi}^i = \begin{pmatrix} \phi_R^{i\dagger} & \phi_L^{i\dagger} \end{pmatrix} \tag{B.11}$$

Zusammenhang der zweikomponentigen Spinoren:

$$\phi_L^i = c^{ij} c \phi_R^{j*}, \qquad \phi_R^i = c^{ij} c \phi_L^{j*}. \tag{B.12}$$

Für symplektische Majorana-Spinoren ψ^i, χ^i gilt

$$\bar{\psi}^i \gamma^M \cdots \gamma^P \chi^j = -c^{ik} c^{jl} \bar{\chi}^l \gamma^P \cdots \gamma^M \psi^k, \tag{B.13}$$

insbesondere

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^i \eta^i &= -\bar{\eta}^i \xi^i \\ \bar{\xi}^i \gamma^M \eta^i &= -\bar{\eta}^i \gamma^M \xi^i \\ \bar{\xi}^i \sigma^{MN} \eta^i &= \bar{\eta}^i \sigma^{MN} \xi^i \\ \bar{\xi}^i \left(\sigma^a\right)^{ij} \eta^j &= \bar{\eta}^i \left(\sigma^a\right)^{ij} \xi^j \end{aligned} \tag{B.14}$$

Fierz-Identitäten für 4×4 - Matrizen M, N und **Dirac-Spinoren** χ, λ, ψ, ξ:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\chi} M \lambda\right)\left(\bar{\psi} N \xi\right) = &- \frac{1}{4}\left(\bar{\chi}\xi\right)\left(\bar{\psi} N M \lambda\right) \\ &- \frac{1}{4}\left(\bar{\chi}\gamma^P \xi\right)\left(\bar{\psi} N \gamma_P M \lambda\right) \\ &+ \frac{1}{8}\left(\bar{\chi}\gamma^{PQ}\xi\right)\left(\bar{\psi} N \gamma_{PQ} M \lambda\right). \end{aligned} \tag{B.15}$$

Fierz-Identitäten für 2×2 - Matrizen M, N und **Weyl-Spinoren** χ, λ, ψ, ξ :

$$\left(\chi^\dagger M \lambda\right)\left(\psi^\dagger N \xi\right) = -\left(\chi^\dagger \sigma^m \xi\right)\left(\psi^\dagger N \sigma_m M \lambda\right) \tag{B.16}$$

B.3 Umformulierung der Spinoren im konkreten O'Raifeartaigh-Modell

Um die Lagrange-Dichte auf eine manifest kovariante Form zu bringen und die loop-Rechnungen zu erleichtern, können die Spinoren aus Kapitel 5 in Majorana- und symplektische Majorana-Spinoren umgeformt werden. Der massive Dirac-Spinor Ψ_D des massenaufgespaltenen Multipletts kann durch zwei symplektische Majorana-Spinoren ersetzt werden

$$\Psi_D^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_z \\ c\psi_y^* \end{pmatrix} \qquad \Psi_D^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\psi_y \\ c\psi_z^* \end{pmatrix} \tag{B.17}$$

und der masselose Weyl-Spinor ψ_x durch einen Majorana-Spinor

$$\Psi_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_x \\ c\psi_x^* \end{pmatrix}. \tag{B.18}$$

In der fünfdimensionalen Theorie mit Wänden kann der Spinor χ_L nicht durch einen Majorana-Spinor ersetzt werden,denn

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} \tag{B.19}$$

propagiert auch in der fünften Dimension.

Mit Hilfe von Projektionsoperatoren $P_\pm = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 \pm i\gamma^5)$ können die Spinor-Wechselwirkungen in kovarianter Form geschrieben werden. In der hier gewählten Darstellung der Dirac-Matrizen gilt

$$P_+ = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \tag{B.20}$$

Die Projektoren erfüllen folgende Gleichungen:

$$P_\pm^2 = P_\pm^\dagger = P_\pm \tag{B.21}$$
$$P_+P_- = P_-P_+ = 0 \tag{B.22}$$
$$CP_\pm = P_\pm C \tag{B.23}$$
$$P_\pm\gamma^m = \gamma^m P_\mp \tag{B.24}$$
$$P_\pm\gamma^5 = \gamma^5 P_\pm, \tag{B.25}$$

wobei (B.21) und (B.22) die Bedingungen für orthogonale Projektoren sind.

Es gelten folgende Identitäten

$$\begin{aligned}
\psi_y^\dagger i\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_y + \psi_z^\dagger i\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_z =& 2\bar{\Psi}_D^1 i\gamma^m\partial_m\Psi_D^1 \\
=& 2\bar{\Psi}_D^2 i\gamma^m\partial_m\Psi_D^2 \\
=& \sum_i \bar{\Psi}_D^i i\gamma^m\partial_m\Psi_D^i, && \text{(B.26)} \\
\psi_y^T c\psi_z + h.c. =& -2\bar{\Psi}_D^1\Psi_D^1 \\
=& 2\bar{\Psi}_D^2\Psi_D^2 \\
=& \left(\bar{\Psi}_D^2\Psi_D^2 - \bar{\Psi}_D^1\Psi_D^1\right), && \text{(B.27)} \\
\psi_x^T c\psi_z =& -2\bar{\Psi}_x P_+\Psi_D^1 \\
=& -2\bar{\Psi}_D^2 P_+\Psi_x, && \text{(B.28)} \\
\psi_x^\dagger c\psi_z^* =& 2\bar{\Psi}_D^1 P_-\Psi_x \\
=& 2\bar{\Psi}_x P_-\Psi_D^2, && \text{(B.29)} \\
\psi_z^T c\psi_z =& -2\bar{\Psi}_D^2 P_+\Psi_D^1, && \text{(B.30)} \\
\psi_z^\dagger c\psi_z^* =& 2\bar{\Psi}_D^1 P_-\Psi_D^2, && \text{(B.31)} \\
\chi_L^T c\psi_z =& -\sqrt{2}\bar{\Psi}_D^2 P_+\chi, && \text{(B.32)} \\
\chi_L^\dagger c\psi_z^* =& \sqrt{2}\bar{\chi} P_-\Psi_D^2, && \text{(B.33)}
\end{aligned}$$

und Ψ_D^1, Ψ_D^2 erfüllen die Dirac-Gleichungen (bis auf Kopplungsterme)

$$\begin{aligned}
\left(i\gamma^m\partial_m + g\right)\Psi_D^1 =& 0 && \text{(B.34)} \\
\left(i\gamma^m\partial_m - g\right)\Psi_D^2 =& 0. && \text{(B.35)}
\end{aligned}$$

Die Vertexfaktoren, die nur Wandfermionen enthalten, können nach diesen Umformungen direkt aus der Lagrange-Dichte abgelesen werden. Bei Vertices, die den Anteil χ_L des fünfdimensionalen Feldes enthalten, müssen die Faktoren um einen Faktor $\sqrt{2}$ reskaliert werden. Dies wird im vierdimensionalen Grenzfall klar, in dem χ_L ebenfalls durch einen Majorana-Spinor ausgedrückt werden kann:

$$\chi_M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi_L \\ c\chi_L^* \end{pmatrix}. \qquad \text{(B.36)}$$

Die Spinoridentitäten lauten dann

$$\begin{aligned}
\chi_L^T c\psi_z =& -4\bar{\Psi}_D^2 P_+\chi_M \\
\vdots & && \text{(B.37)}
\end{aligned}$$

Anhang C

$D = 5,\ N = 1$ Supersymmetrie-Algebra

Die Poincaré-Gruppe in d Dimensionen wird erzeugt durch die Generatoren P der d dimensionalen Translationen und J der $SO(1, d-1)$-Rotationen, die Supersymmetrie-Generatoren werden mit Q bezeichnet und die Generatoren der inneren Symmetriegruppe G mit t. Dann besitzt die vollständige Superalgebra die Struktur [30]

$$\begin{aligned}
\left.\begin{aligned}
[P,P] &= 0 \\
[P,J] &= P \\
[J,J] &= J
\end{aligned}\right\} &\ \text{Poincaré-Algebra} \\
\{Q,Q\} &= P + Z \\
[Q,P] &= 0 \\
[Q,J] &= Q \\
[t,t] &= t \qquad \text{Automorphismen-Algebra} \\
[t,P] &= [t,J] = 0 \\
[t,Q] &= Q \\
[t,Z] &= Z \\
[J,Z] &= [P,Z] = [Z,Z] = 0,
\end{aligned} \tag{C.1}$$

wobei mit Z Zentrale Ladungstransformationen bezeichnet werden.

C.1 Supersymmetrie-Transformationen

Durch Reduktion von $D = 5, N = 1$ Multipletts auf vier Dimensionen entstehen $N = 2$ Multipletts. Die Transformationsgesetze dieser Multipletts sind bekannt (vgl. z.B. [35]). Die Transformationen der fünfdimensionalen Felder können daraus leicht hergeleitet werden. Fünfdimensionale Supersymmetrie-Transformationsparameter sind die symplektischen Majorana-Spinoren $\xi^{1,2}$.

Yang-Mills-Multiplett

Supersymmetrie-Transformationen:

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi A^M &= i\bar{\xi}^i \gamma^M \lambda^i \\
\delta_\xi \Phi &= i\bar{\xi}^i \lambda^i \\
\delta_\xi \lambda^i &= \left(\sigma^{MN} F_{MN} - \gamma^M D_M \Phi\right) \xi^i - i \left(X^a \sigma^a\right)^{ij} \xi^j \\
\delta_\xi X^a &= \bar{\xi}^i \left(\sigma^a\right)^{ij} \gamma^M D_M \lambda^j + i \left[\Phi, \bar{\xi}^i \left(\sigma^a\right)^{ij} \lambda^j\right].
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

Die kovariante Ableitung ist $D_M\Phi \equiv \partial_M \Phi - i[A_M, \Phi]$ (entsprechend für $D_M\lambda$), und es ist $\sigma^{MN} \equiv \frac{1}{4}[\gamma^M, \gamma^N]$.
Abschluß der Supersymmetrie-Algebra:

$$
\begin{aligned}
\left[\delta_\xi, \delta_\eta\right] \Phi &= -i2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) \partial_M \Phi - 2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) [A_M, \Phi] \\
\left[\delta_\xi, \delta_\eta\right] A^N &= -i2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) \partial_M A^N + i2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) D^N A_M - i2 \left(\bar{\eta}\xi\right) D^N \Phi \\
\left[\delta_\xi, \delta_\eta\right] \lambda^i &= -i2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) \partial_M \lambda^i - 2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) \left[A_M, \lambda^i\right] + 2 \left(\bar{\eta}\xi\right) \left[\Phi, \lambda^i\right] \\
\left[\delta_\xi, \delta_\eta\right] X^a &= -i2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) \partial_M X^a - 2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) [A_M, X^a] + 2 \left(\bar{\eta}\xi\right) [\Phi, X^a]
\end{aligned}
\tag{C.3}
$$

Lagrange-Dichte in der off-shell-Formulierung:

$$
\begin{aligned}
L_{YM} = \frac{1}{g_5^2} \Big(&-\frac{1}{2} \mathrm{tr}(F_{MN})^2 + \mathrm{tr}(D_M \Phi)^2 \\
&+ \ \mathrm{tr}\left(\bar{\lambda} i \gamma^M D_M \lambda\right) + \mathrm{tr}(X^a)^2 - \mathrm{tr}(\bar{\lambda}[\Phi, \lambda]) \Big)
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

Supersymmetrie-Transformation der Lagrange-Dichte:

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi \left(g_5^2 L_{YM}\right) = \partial_M \mathrm{tr} \Big(&\left[\bar{\lambda}^i \gamma^M \left(X^a \sigma^a\right)^{ij} \xi^j\right] + \bar{\lambda}^i \left[i\gamma^M \sigma^{PQ} F_{PQ} - i\gamma^N \gamma^M D_N \Phi\right] \xi^i \\
&-2\bar{\lambda}^i \gamma^{MNP} A_N A_P \xi^i + i2 \left(\partial_N \bar{\lambda}^i\right) \gamma^{MNP} A_P \xi^i \Big)
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

Hypermultiplett

Supersymmetrie-Transformationen:

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi A^i &= \sqrt{2}\, c^{ij}\, \bar{\xi}^j \chi \\
\delta_\xi \chi &= -i\sqrt{2}\, \gamma^M \partial_M A^i\, c^{ij}\, \xi^j - \sqrt{2} F^i \xi^i \\
\delta_\xi F^i &= i\sqrt{2}\, \bar{\xi}^i \gamma^M \partial_M \chi
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

Abschluß der Supersymmetrie-Algebra:

$$
\begin{aligned}
\left[\delta_\xi, \delta_\eta\right] A^i &= -i2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) \partial_M A^i - 2 \left(\bar{\eta}\xi\right)\ c^{ij} F^j \\
\left[\delta_\xi, \delta_\eta\right]\ \chi &= -i2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) \partial_M\ \chi - 2 \left(\bar{\eta}\xi\right) i\gamma^M \partial_M \chi \\
\left[\delta_\xi, \delta_\eta\right] F^i &= -i2 \left(\bar{\eta}\gamma^M \xi\right) \partial_M F^i - 2 \left(\bar{\eta}\xi\right)\ c^{ij} \partial_M \partial^M A^j
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

Lagrange-Dichte in der off-shell-Formulierung:

$$
L_{hyper} = \left(\partial_M A^i\right)^\dagger \left(\partial^M A^i\right) + \bar{\chi} i \gamma^M \partial_M \chi + \left(F^i\right)^\dagger F^i. \tag{C.8}
$$

Supersymmetrie-Transformation der Lagrange-Dichte:

$$\delta_\xi L_{hyper} = \partial_M \left(\sqrt{2}\bar{\chi}\gamma^N \gamma^M \partial_N A^i \, c^{ij} \, \xi^j - i\sqrt{2}\bar{\chi}\gamma^M F^i \xi^i + h.c. \right). \tag{C.9}$$

Für das Hypermultiplett gibt es supersymmetrische Massenterme

$$L_m = m \left(\bar{\chi}\chi + A^i \, c^{ij} \, \left(F^j\right)^\dagger + \left(A^i\right)^\dagger \, c^{ij} \, F^j \right) \tag{C.10}$$

mit

$$\delta_\xi L_m = \partial_M \left(-m \, i\sqrt{2} A^i \, c^{ij} \, \bar{\chi}\gamma^M \xi^j + h.c. \right). \tag{C.11}$$

Zentrale Ladungs-Transformationen:

$$\begin{aligned} \delta_z A^i &= -i c^{ij} F^j \\ \delta_z \chi \, &= \gamma^M \partial_M \, \chi \\ \delta_z F^i &= -i c^{ij} \partial_M \partial^M A^j \end{aligned} \tag{C.12}$$

erfüllen

$$[\delta_\xi, \delta_z] = 0 \tag{C.13}$$

$$\delta_z^2 = \partial_M \partial^M. \tag{C.14}$$

Supersymmetrie-Transformationen vierdimensionaler Felder

In vier Dimensionen ist der $N = 1$ Supersymmetrie-Parameter ξ ein Weyl-Spinor.

Supersymmetrie-Transformationen des vierdimensionalen Vektormultipletts in der Wess-Zumino-Eichung [34]:

$$\begin{aligned} \delta_\xi A^m &= i \left(\xi^\dagger \bar{\sigma}^m \lambda - \lambda^\dagger \bar{\sigma}^m \xi \right) \\ \delta_\xi \lambda &= \left(s^{mn} F_{mn} - iD \right) \xi \\ \delta_\xi D &= \xi^\dagger \bar{\sigma}^m D_m \lambda + D_m \lambda^\dagger \bar{\sigma}^m \xi \end{aligned} \tag{C.15}$$

Hierbei ist $s^{mn} = \frac{1}{4} \left(\sigma^m \bar{\sigma}^n - \sigma^n \bar{\sigma}^m \right)$.

Supersymmetrie-Transformationen des vierdimensionalen chiralen Multipletts [34]:

$$\begin{aligned} \delta_\xi \varphi &= \sqrt{2} \xi^T c \psi \\ \delta_\xi \psi &= i\sqrt{2} \sigma^m c \xi^* \partial_m \varphi - \sqrt{2} \xi F \\ \delta_\xi F &= i\sqrt{2} \xi^\dagger \bar{\sigma}^m \partial_m \psi. \end{aligned} \tag{C.16}$$

Anhang D

Propagatoren auf einer Orbifold

Der Impuls in Richtung einer kompakten Dimension ist quantisiert. Wenn die kompakte Richtung die Länge l hat, kann k^5 die Werte $m\pi/l$ mit $m \in \mathbb{Z}$ annehmen.

Der Propagator eines freien masselosen skalaren inneren Feldes a auf $\mathbb{R}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ ist im Ortsraum:

$$\langle a(x, x^5) a(y, y^5) \rangle = \int_{k5} \frac{i}{k^2 - (k^5)^2} e^{-ik\cdot(x-y)} \left(e^{ik^5(x^5-y^5)} + P e^{ik^5(x^5+y^5)} \right) \tag{D.1}$$

mit

$$\int_{k5} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2l} \sum_{k^5 \in \frac{\pi}{l}\mathbb{Z}} . \tag{D.2}$$

Insbesondere ist der Propagator eines geraden skalaren Feldes ($P = +1$) von der Wand $x^5 = 0$ zu der anderen Wand $x^5 = l$

$$\langle a(x, 0) a(y, l) \rangle = 2 \int_{k5} \frac{i}{k^2 - (k^5)^2} e^{-ik\cdot(x-y)} \cdot (-1)^m \tag{D.3}$$

und der Propagator eines geraden skalaren Feldes von der Wand $x^5 = 0$ zu derselben Wand

$$\langle a(x, 0) a(y, 0) \rangle = 2 \int_{k5} \frac{i}{k^2 - (k^5)^2} e^{-ik\cdot(x-y)}. \tag{D.4}$$

Für die Fermion- und Vektorpropagatoren gelten entsprechende Formeln.

Anhang E

Delta-Funktion

Auf einer Orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ ist die Delta-Funktion definiert durch:

$$\delta^N\left(x^5\right) \equiv \frac{1}{2l}\sum_{m=-N}^{+N} e^{im\pi x^5/l} = \frac{1}{2l} + \sum_{m=1}^{N}\cos\left(\frac{m\pi x^5}{l}\right), \tag{E.1}$$

$$f(x^5=0) = \lim_{N\to\infty}\int_{-l}^{+l} dx^5 \delta^N\left(x^5\right) f\left(x^5\right) \equiv \int_{-l}^{+l} dx^5 \delta\left(x^5\right) f\left(x^5\right). \tag{E.2}$$

Bei Umformungen der loop-Integrale wird insbesondere benötigt:

$$\delta(0) = \frac{1}{2l}\sum_m 1 = \frac{1}{2l}\sum_{k^5\in\frac{\pi}{l}\mathbb{Z}} \frac{k^2-(k^5)^2}{k^2-(k^5)^2}, \tag{E.3}$$

$$\delta(l) = \frac{1}{2l}\sum_m (-1)^m = \frac{1}{2l}\sum_m (-1)^m \frac{k^2-(k^5)^2}{k^2-(k^5)^2} = 0. \tag{E.4}$$

Anhang F

Superraum-Formalismus

F.1 Integration über Grassmann-Variablen

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int d\theta &= 0, \\ \int \theta d\theta &= 1. \end{aligned} \tag{F.1}$$

Mit

$$\int d^2\theta \equiv \int d\theta^2 d\theta^1 \tag{F.2}$$

erhält man

$$\int d^2\theta \left(\theta^T c\, \theta\right) = -2. \tag{F.3}$$

F.2 Taylor-Entwicklung eines $D = 4,\ N = 1$ Superfeldes

Alle Spinoren sind zweikomponentige Weyl-Spinoren.
Die Taylor-Entwicklung eines allgemeinen Superfeldes beinhaltet die bosonischen Felder C, D, M, N und A_m sowie die fermionischen Felder χ, χ', λ und λ':

$$\begin{aligned} V\left(x^m, \theta, \theta^*\right) = {} & C - i\theta^T c\chi - i\chi'^\dagger c\theta^* \\ & - \frac{1}{2} i\theta^T c\theta \left(M - iN\right) - \frac{1}{2} i\theta^\dagger c\theta^* \left(M + iN\right) + \theta^\dagger \bar{\sigma}^m \theta A_m \\ & - i\left(\theta^\dagger c\theta^*\right) \theta^T \left[c\lambda - \frac{1}{2} i \left(\bar{\sigma}^m\right)^T \partial_m \chi'^*\right] \\ & + i\left(\theta^T c\theta\right) \theta^\dagger \left[c\lambda'^* + \frac{1}{2} i\bar{\sigma}^m \partial_m \chi\right] \\ & + \frac{1}{2}\left(\theta^T c\theta\right)\left(\theta^\dagger c\theta^*\right)\left(D + \frac{1}{2}\partial_m \partial^m C\right). \end{aligned} \tag{F.4}$$

Ein chirales Superfeld hängt nicht von der fermionischen Koordinate θ^* ab:

$$\phi\left(x^m,\theta\right) = \varphi\left(x^m\right) + \sqrt{2}\theta^T c\psi\left(x^m\right) - \theta^T c\,\theta F\left(x^m\right). \tag{F.5}$$

Produkte chiraler Superfelder sind wieder chirale Superfelder:

$$\begin{aligned}
\phi_a\phi_b &= \varphi_a\varphi_b + \sqrt{2}\theta^T c\left(\varphi_a\psi_b + \psi_a\varphi_b\right) \\
&\quad - \left(\theta^T c\,\theta\right)\left(\varphi_a F_b + F_a\varphi_b + \psi_a^T c\psi_b\right), \\
\phi_a\phi_b\phi_c &= \varphi_a\varphi_b\varphi_c + \sqrt{2}\theta^T c\left(\varphi_a\varphi_b\psi_c + \varphi_a\psi_b\varphi_c + \psi_a\varphi_b\varphi_c\right) \\
&\quad - \left(\theta^T c\,\theta\right)\left(\varphi_a\varphi_b F_c + \varphi_a F_b\varphi_c + F_a\varphi_b\varphi_c + \psi_a^T c\psi_b\varphi_c + \varphi_a\psi_b^T c\psi_c + \psi_a^T\varphi_b c\psi_c\right).
\end{aligned} \tag{F.6}$$

Anhang G

Feynman-Parameter und Selbstenergie-Integral

Mit Hilfe der Methode der Feynman-Parameter

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \tag{G.1}$$

können die inneren Euklidischen loop-Integrale der 2-loop-Massenkorrektur eines Skalars an der beobachtbaren Wand umgeformt werden:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(q-k)^2 + m_1^2][q^2 + m_2^2]} = \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + \Delta]^2} \tag{G.2}$$

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{k \cdot q}{[(q-k)^2 + m_1^2][q^2 + m_2^2]} = k^2 \int_0^1 x dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + \Delta]^2} \tag{G.3}$$

mit

$$\Delta = x(1-x)k^2 + x m_1^2 + (1-x) m_2^2. \tag{G.4}$$

In (G.3) wurde außer den Feynman-Parametern verwendet, daß aufgrund der sphärischen Symmetrie des Nenners gilt ($m = 0 \ldots 3$ ist der Raumzeit-Index des euklidischen Vektors q):

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^m}{[q^2 + \Delta]^2} = 0. \tag{G.5}$$

Mit $\epsilon = 4 - d$ erhält man das dimensional regularisierte Integral

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + \Delta]^2} \xrightarrow{d \to 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \tag{G.6}$$

wobei $\gamma \approx 0.5772$ die Euler-Mascheroni-Konstante ist. (G.2) kann damit auf folgende Form gebracht werden:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(q-k)^2 + m_1^2][q^2 + m_2^2]} \xrightarrow{d \to 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \int_0^1 dx \log \Delta - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right). \tag{G.7}$$

Das **Selbstenergie-Integral** $b(k^2, m_1^2, m_2^2)$ ist definiert als der nichtuniverselle Anteil von (G.7):

$$b(k^2, m_1^2, m_2^2) \equiv \int_0^1 dx \log \Delta = \int_0^1 dx \log\bigl(x(1-x)k^2 + x m_1^2 + (1-x) m_2^2\bigr). \tag{G.8}$$

Es besitzt die explizite Darstellung

$$b(k^2, m_1^2, m_2^2) = A \log\Bigl[\frac{(A+B_1)(A+B_2)}{(A-B_1)(A-B_2)}\Bigr] + B_2 \log m_1^2 + B_1 \log m_2^2 - 2 \tag{G.9}$$

mit

$$A = \Bigl[\frac{k^4 + 2k^2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}{4k^4}\Bigr]^{1/2} \tag{G.10}$$

und

$$B_1 = \frac{1}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2k^2}, \qquad B_2 = \frac{1}{2} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2k^2}. \tag{G.11}$$

Aus (G.9) kann das asymptotische Verhalten für kleine und große Impulse berechnet werden:

$$b(k^2, m_1^2, m_2^2) \overset{\frac{k^2}{m^2}\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{m_1^2 - m_2^2}\bigl(m_1^2 \log m_1^2 - m_2^2 \log m_2^2\bigr) - 1 + \mathcal{O}(\frac{k^2}{m^2}) & m_1^2 \neq m_2^2 \\ \log m^2 + \mathcal{O}(\frac{k^2}{m^2}) & m_1^2 = m_2^2 = m^2 \end{cases} \tag{G.12}$$

$$b(k^2, m_1^2, m_2^2) \overset{\frac{k^2}{m^2}\to \infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2} + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2k^2}\right) \log\left[\frac{k^4}{m_1^2 m_2^2}\right] + B_2 \log m_1^2 + B_1 \log m_2^2 - 2 + \mathcal{O}(\frac{m^4}{k^4}). \tag{G.13}$$

Literaturverzeichnis

[1] A.C. Cadavid, A. Ceresole, R. D'Auria, and S. Ferrara, *Eleven-dimensional supergravity compactified on Calabi-Yau threefolds*, Phys. Lett. **B357** (1995), 76.

[2] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, *Supergravity theory in eleven dimensions*, Phys. Lett. **B76** (1978), 409.

[3] S. Dimopoulos, G.F. Giudice, and A. Pomarol, *Dark matter in theories of gauge-mediated supersymmetry breaking*, Phys. Lett. **B389** (1996), 37, hep-ph/9607225.

[4] L. Dixon, J.A. Harvey, C. Vafa, and E. Witten, *Strings on orbifolds*, Nucl. Phys. **B261** (1985), 678.

[5] J. Ellis, Z. Lalak, S. Pokorski, and W. Pokorski, *Five-dimensional aspects of M-theory dynamics and supersymmetry breaking*, hep-ph/9805377.

[6] J. Ellis, Z. Lalak, and W. Pokorski, *Five-dimensional gauged supergravity and supersymmetry breaking in M-theory*, hep-th/9811133.

[7] P. Fayet, *Spontaneous supersymmetry breaking without gauge invariance*, Phys.Lett. **B58** (1975), 67.

[8] P. Fayet, *Higgs model and supersymmetry*, Nuovo Cim. **31A** (1976), 626.

[9] P. Fayet and J. Iliopoulos, *Spontaneously broken supergauge symmetries and goldstone spinors*, Phys. Lett. **B51** (1974), 461.

[10] S. Ferrara, L Girardello, and F. Palumbo, *A general mass formula in broken supersymmetry*, Phys. Rev. **D20** (1979), 403.

[11] G.F. Giudice and R. Rattazzi, *Extracting supersymmetry-breaking effects from wave-function renormalization*, Nucl.Phys. **B511** (1998), 25.

[12] P. Hořava, *Gluino condensation in strongly coupled heterotic string theory*, Phys. Rev. **D54** (1996), 7561.

[13] A. Lukas, B.A. Ovrut, K.S. Stelle, and D. Waldram, *Heterotic M-theory in five dimensions*, hep-th/9806051.

[14] A. Lukas, B.A. Ovrut, K.S. Stelle, and D. Waldram, *The universe as a domain wall*, hep-th/9803235.

[15] S. Martin, *Generalized massengers of supersymmetry breaking and the sparticle mass spectrum*, Phys.Rev. **D55** (1997), 3177, hep-ph/9608224.

[16] E.A. Mirabelli and M.E. Peskin, *Transmission of supersymmetry breaking from a 4-dimensional boundary*, Phys.Rev. **D58** (1998), 065002, hep-th/9712214.

[17] W. Nahm, *Supersymmetries and their representations*, Nucl. Phys. **B135** (1978), 149.

[18] H.P. Nilles, *Supersymmetry, supergravity and particle physics*, Phys.Rept. **110** (1984), 1.

[19] H.P. Nilles, M. Olechowski, and M. Yamaguchi, *Supersymmetry breaking and soft terms in M-theory*, Phys.Lett. **B415** (1997), 24, hep-th/9707143.

[20] H.P. Nilles, M. Olechowski, and M. Yamaguchi, *Supersymmetry breakdown at a hidden wall*, Nucl.Phys. **B530** (1998), 43, hep-th/9801030.

[21] L. O'Raifeartaigh, *Spontaneous symmetry breaking for chiral scalar superfields*, Nucl.Phys. **B96** (1975), 331.

[22] E. Poppitz and S.P. Trivedi, *Some remarks on gauge mediated supersymmetry breaking*, Phys. Lett. **B401** (1997), 38.

[23] A. Salam and J. Strathdee, *Supersymmetry, parity and fermion-number conservation*, Nucl.Phys. **B97** (1975), 293.

[24] J. Scherk and J.H. Schwarz, *Spontaneous breaking of supersymmetry through dimensional reduction*, Phys. Lett. **B82** (1979), 60.

[25] J.H. Schwarz, *The power of M theory*, Phys. Lett. **B367** (1996), 97.

[26] W. Siegel, *Supersymmetric dimensional regularization via dimensional reduction*, Phys. Lett. **B84** (1979), 193.

[27] W. Siegel, *Inconsistency of supersymmetric dimensional regularization*, Phys. Lett. **B94** (1980), 37.

[28] M.F. Sohnius, *Supersymmetry and central charges*, Nucl.Phys. **B138** (1978), 109.

[29] M.F. Sohnius, *Introducing supersymmetry*, Phys.Rept. **128** (1985), 39.

[30] J. Strathdee, *Extended poincaré supersymmetry*, Int. J. Mod. Phys. **A2** (1987), 273.

[31] P.K. Townsend, *The eleven-dimensional supermembrane revisited*, Phys. Lett. **B350** (1995), 184, hep-th/9501068.

[32] P. van Nieuwenhuizen, *Supergravity*, Phys. Rept. **68** (1981), 189.

[33] P. van Nieuwenhuizen, *An introduction to simple supergravity and the Kaluza-Klein program*, Relativity, groups and topology II, Les Houches, Session XL, 1983 (B.S. DeWitt and R. Stora, eds.), Elsevier Science Publishers B.V., 1984, p. 823.

[34] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton University Press, 1983.

[35] P. West, *Introduction to supersymmetry and supergravity*, World Scientific, 1990.

[36] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. **B443** (1995), 85.

[37] E. Witten, *Strong coupling expansion of Calabi-Yau compactification*, Nucl. Phys. **B471** (1996), 135.

[38] E. Witten and D. Olive, *Supersymmetry algebras that include topological charges*, Phys.Lett. **B78** (1978), 97.