Phänomenologische Aspekte der Supersymmetrie–Brechung in String– und M–Theorie

von
RALPH SCHREYER

Diplomarbeit in Physik
angefertigt im
Physikalischen Institut

vorgelegt der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität
Bonn

im November 1998

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. Hans–Peter Nilles
Koreferent: Prof. Dieter Schütte

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Hans–Peter Nilles für die Aufnahme in seine Gruppe, für seine Betreuung und die stete Bereitschaft, Fragen zu beantworten, danken. Desweiteren danke ich Jan Conrad, Gabriele Honecker, Yoshiharu Kawamura, Stéphane Lavignac, Zygmunt Lalak, Stefan Förste, Khazret Nirov und Max Zucker für die gute Atmosphäre in der Gruppe, für zahlreiche Diskussionen und nochmals Jan Conrad für geduldige Unterstützung in Computerfragen.
Für finanzielle Unterstützung danke ich der Fritz ter Meer– und der Richard Winter–Stiftung.
Mein Dank gilt außerdem meinen Freunden und insbesondere meiner Freundin Angela.
All dies wäre aber nicht möglich gewesen ohne die Unterstützung und Liebe meiner Familie und insbesondere meiner Eltern.

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit werden phänomenologische Aspekte der Supersymmetrie–Brechung in $E_8 \times E_8$ heterotischer Stringtheorie und in M–Theorie [51, 49] untersucht. M–Theorie wird hier im Sinne von Hořava und Witten [34, 33] auf der Orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ betrachtet, wodurch (vermutlich) die $E_8 \times E_8$ heterotische Stringtheorie im Falle starker Stringkopplung beschrieben wird. Um nun Phänomenologie auf der schwachen Energieskala $\sim \mathcal{O}(100\ \text{GeV})$ diskutieren zu können, benötigt man ein wohldefiniertes niederenergetisches Teilchenspektrum mit gebrochener Supersymmetrie (SUSY), das auch das Standardmodell (SM) beinhaltet.

In Kapitel 2 wird deshalb das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) vorgestellt. Nach einer kurzen Einführung in die Konstruktion von Modellen mit globaler SUSY und Eichsymmetrie wird das Teilchenspektrum des MSSM diskutiert. Die SUSY wird explizit durch Hinzufügen weicher Terme gebrochen, wodurch eine Vielzahl freier Parameter in die Theorie eingeführt wird. Durch vereinfachende Annahmen wird die Anzahl dieser Parameter reduziert. Abschließend werden die — unter Berücksichtigung der vereinfachenden Annahmen — resultierenden Massen und Renormierungsgruppengleichungen (RGE) des MSSM dargestellt.

In Kapitel 3 wird die Kompaktifizierung der effektiven Feldtheorie der $E_8 \times E_8$ heterotischen Stringtheorie und M–Theorie nach $D = 4$ gemäß der in [47] verwendeten Methode skizziert. Dadurch sollen die Ergebnisse motiviert werden, die man benötigt, um Relationen für die weich brechenden Parameter auf der Energieskala M_{GUT} der Vereinigung der Eichkopplungen aufzustellen. Die Diskussion in [10] wird dabei auf verschiedene modulare Gewichte verallgemeinert.

In Kapitel 4 werden die Beziehungen für die weich brechenden Parameter aus Kapitel 3 mittels der RGE des MSSM aus Kapitel 2 auf die schwache Energieskala übersetzt und das resultierende Massenspektrum diskutiert. Das verwendete numerische Verfahren, die Vorgehensweise und die zu beachtenden Einschränkungen aus experimentellen Daten werden erläutert und dargestellt. Abschließend werden „flavour–changing neutral currents" (FCNC) untersucht, die durch unterschiedliche skalare Massen aufgrund verschiedener modularer Gewichte der einzelnen Generationen erzeugt werden.

Die modularen Gewichte werden in dieser Arbeit gemäß $n_1 = +1$, $n_2 = 0$, $n_3 = -1$ und $n_H = -1$ den Skalaren der drei Generationen bzw. des Higgs–Sektors zugeordnet. Im betrachteten Modell bleiben noch die Gravitino–Masse $m_{3/2}$, der Parameter $\tan\beta$, das Vorzeichen des μ–Parameters, die Stärke der Stringkopplung und der Goldstino–Winkel θ als Parameter übrig.

Als Ergebnisse der phänomenologischen Diskussion des in dieser Arbeit betrachteten Modells lassen sich folgende Aussagen formulieren:

- Die niederenergetischen Massenspektren werden durch die großen Beiträge der Gaugino–Massen dominiert.

- Die größten Einschränkungen an den Parameterraum liefern die experimentellen Grenzen an die Masse der leichten Charginos $m_{\tilde{C}_1^{\pm}}$, des leichten Higgs–Bosons m_{h^0}, sowie die Forderung nach der Neutralität des leichtesten supersymmetrischen Teilchens (LSP).

- Bei $\theta = \arctan(1/\sqrt{3})$ ist die Phänomenologie (fast) unabhängig von der Stärke der Stringkopplung.

- Im gesamten verbleibenden Parameterraum ist das leichte Neutralino $\tilde{N}_1$ das LSP.
- In dieser Arbeit wird die folgende experimentelle Grenze durch FCNC diskutiert [41]:

$$\frac{|m^2_{\tilde{q}_{1L}} - m^2_{\tilde{q}_{2L}}|}{\frac{1}{2}(m^2_{\tilde{q}_{1L}} + m^2_{\tilde{q}_{2L}})} \times \frac{1\mathrm{TeV}}{m_{max}} \lesssim 1 \ .$$

  Es wird festgestellt, daß diese Grenze im gewählten Modell keine weitere Einschränkung der Phänomenologie bedeutet. Die — bezüglich der FCNC — kritischen Bereiche des Parameterraumes bei Modulus–dominierter SUSY–Brechung ($\sin\theta = 0$) und schwacher Stringkopplung sind nämlich schon durch andere experimentelle Grenzen und Einschränkungen ausgeschlossen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ein großes Ziel der theoretischen Physik ist es, die vereinigte Theorie der Gravitation, des Elektromagnetismus sowie der starken und der schwachen Wechselwirkung zu finden. Mit dem Standardmodell (SM) konnte eine vereinigte Beschreibung der drei letztgenannten Wechselwirkungen formuliert werden, dessen Vorhersagen in allen bisherigen Präzisionsexperimenten bis zu einer Energieskala $\mathcal{O}(100)$ GeV bestätigt wurden. Lediglich das Higgs–Boson konnte bislang nicht gefunden werden. Trotz dieser Erfolge ist das SM theoretisch wenig zufriedenstellend: Die Gravitation kann nicht miteinbezogen werden; das SM enthält eine Reihe von Parametern, die aus dem Modell selbst heraus nicht bestimmt werden können (z.B. Eich– und Yukawa–Kopplungen); es existert keine natürliche Begründung dafür, daß die Energieskala der Brechung der elektroschwachen Symmetrie von ungefähr 100 GeV im Vergleich zur Planck–Skala $M_{Planck} \approx 10^{19}$ GeV so klein ist. Dieses sogenannte „Hierarchie–Problem" hängt zusammen mit dem Auftreten quadratisch divergenter Korrekturen für skalare Massen, also für die Masse des Higgs–Bosons im SM. Damit die Unitarität erhalten bleibt, muß das Higgs–Boson, dessen Masse die Energieskala der Brechung der elektroschwachen Symmetrie bestimmt, leichter als 1 TeV sein. Die quadratisch divergenten Quantenkorrekturen zur Higgs–Masse aber sind von der Größenordnung des Cutoffs, also der Planck–Skala. Das bedeutet, daß eine extreme Feineinstellung („fine tuning") zwischen allen Ordnungen der Korrekturen vorgenommen werden muß, um die elektroschwache Energieskala zu erhalten.

Ein erfolgreiches Konzept ist es, die Existenz unerwartet kleiner physikalischer Größen durch eine spontan gebrochene Symmetrie zu erklären. Auf diese Weise werden die Massen von Spin–1/2 Fermionen durch eine spontan gebrochene chirale Symmetrie und die Massen von Spin–1 Bosonen durch eine spontan gebrochene Eichsymmetrie vor großen Korrekturen „beschützt".

Die Symmetrie, die so etwas für skalare Massen gewährleistet, ist die Supersymmetrie (SUSY)[43, 3]. Eine SUSY Transformation wandelt einen bosonischen in einen fermionischen Zustand um und umgekehrt. Der Generator Q einer solchen Transformation ist ein antikommutierender Spinor mit

$$Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \ , \qquad Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \ .$$

In einer supersymmetrischen Quantenfeldtheorie treten nun keine quadratischen Divergenzen mehr auf. Die Generatoren der SUSY vertauschen mit dem Quadrat des Impulsoperators, so daß die Teilchen eines Supermultipletts die gleiche Masse besitzen. Deshalb muß SUSY auf der schwachen Energieskala gebrochen sein. Die spontane Brechung von globaler SUSY aber ist phänomenologisch problematisch. Diese Probleme können umgangen werden, indem man lokale Supersymmetrie fordert, wodurch automatisch Gravitation in die Theorie eingeführt wird, weshalb man solche Modelle auch als Supergravitation (SUGRA) [43] bezeichnet. Wenn man nun lokale SUSY spontan bricht und nur die Terme führender Ordnung beibehält, indem man formal den Limes $M_{Planck} \to \infty$ bildet, so entpricht das einem Modell mit explizit gebrochener globaler SUSY. Diese explizit brechenden Terme beinhalten aber keine quadratischen Divergenzen, weshalb sie „weich brechende" Terme genannt werden. Das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) ist die minimale Erweiterung des SM unter Einbeziehung der SUSY und der weich brechenden Terme, siehe Kapitel 2.

Auf diese Weise ist das Hierarchie–Problem gelöst, aber auch eine große Zahl neuer freier Parameter eingeführt worden, so daß das MSSM ebenfalls als eine niederenergetische effektive Feldtheorie einer fundamentaleren Theorie betrachtet werden muß[1]. Kandidaten für eine ultraviolett–endliche, unitäre und perturbative Beschreibungen der Quantengravitation sind die Typ I, IIA und IIB und die $E_8 \times E_8$ und $SO(32)$ heterotischen Superstring–Theorien in $D = 10$. Phänomenologisch bevorzugt ist dabei die $E_8 \times E_8$ heterotische Superstring–Theorie, weil die Eichgruppe des SM enthalten ist und weil nach Kompaktifizierung zu $D = 4$ komplexe Darstellungen der Eichgruppe und somit chirale Fermionen möglich sind. Es werden aber wiederum neue Fragen aufgeworfen: Warum sollte eine dieser fünf konsistenten Theorien und warum eine der vielen möglichen Kompaktifizierungen bevorzugt werden? Zumindest verwunderlich ist auch Folgendes: Die niederenergetischen effektiven Feldtheorien der Superstring–Theorien werden durch die entsprechende SUGRA bzw. Super–Yang–Mills–Theorie (SYM) in $D = 10$ beschrieben. Die höchstdimensionale supersymmetrische Theorie, deren masselose Zustände keinen Spin größer als 2 tragen [42], ist aber die SUGRA in $D = 11$ [13], die in diesem Bild also keine Interpretation als effektive Feldtheorie besäße. Weil aber die SUGRA–Theorien nicht renormierbar sind und nicht bekannt war, wie man ausgehend von $D = 11$ SUGRA chirale Darstellungen erzeugen kann, wurde diese Theorie zugunsten der Superstring–Theorien für einige Jahre vernachlässigt. Auch besteht ein Zusammenhang zwischen den Superstring–Theorien, der einer Erklärung bedarf: Die effektive Feldtheorie der Typ I und der $SO(32)$ heterotischen Superstringtheorie ist in beiden Fällen die $N = 1$ SUGRA/SYM mit Eichgruppe $SO(32)$.

In den letzten Jahren konnten durch die *Vermutung*, daß die fünf Stringtheorien perturbative Entwicklungen um verschiedene Punkte eines gemeinsamen Moduli–Raumes darstellen, große Fortschritte erzielt werden. Die vermutete Theorie, die diesen Moduli–Raum beschreibt, wird M–Theorie [51, 49] genannt. Man vermutet, daß die fünf Stringtheorien in diesem Bild durch Dualitätssymmetrien ineinander übergehen. Außerdem wird der Moduli–Raum z.T. durch eine elfdimensionale Theorie beschrieben, so daß die $D = 11$ SUGRA an dieser Stelle als effektive Feldtheorie ihren Platz hat. Zwar ist die M–Theorie noch nicht gefunden und die nichtperturbativen Dualitätssymmetrien sind noch nicht bewiesen, aber alle bisher durchgeführten (nichttrivialen) Tests haben die Vermutung untermauert. In der Literatur — und in dieser Arbeit — wird das Gebiet des Moduli–Raumes (und die möglichen Kompaktifizierungen), in dem die $D = 11$ SUGRA als effektive Feldtheorie auftritt, ebenfalls als M–Theorie bezeichnet. Eine weitere wichtige, durch viele Argumente gestützte Vermutung ist, daß M–Theorie auf der Orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ die $E_8 \times E_8$ heterotische Stringtheorie im Falle starker Stringkopplung beschreibt [34, 53, 33].

Es ist nun interessant, phänomenologische Aspekte im Vergleich zur schwach gekoppelten

[1]Das MSSM umfaßt nicht die Gravitation.

$E_8 \times E_8$ heterotischen Stringtheorie zu untersuchen. Der Weg zur schwachen Energieskala kann dabei folgendermaßen skizziert werden (siehe Kapitel 3): Zunächst muß man eine geeignete Kompaktifizierung wählen, um eine $N = 1$ supersymmetrische effektive Theorie in $D = 4$ zu erhalten. Insbesondere im M–Theorie–Fall gestaltet sich diese Aufgabe als technisch aufwendig [53, 47]. Man erhält Ergebnisse für das Kähler–Potential K, die eichkinetische Funktion f, das Dilaton–Feld S sowie das allgemeine Modulus–Feld[2] T, wobei die Korrekturen erster Ordnung im Falle schwacher Stringkopplung klein sind und deshalb vernachlässigt werden. Die Kenntnis dieser Funktionen und Felder ermöglicht die Diskussion einer ganzen Klasse von Modellen. Im allgemeinen existieren noch eine Vielzahl weiterer Felder, die stark modellabhängig sind und hier nicht betrachtet werden sollen.

Weil das Problem, einen phänomenologisch akzeptablen Mechanismus der SUSY–Brechung zu finden, schwierig und noch lange nicht geklärt ist, wird diese durch den Goldstino–Winkel parametrisiert, dem Mischungswinkel zwischen Dilaton– und Modulus–dominierter SUSY–Brechung [7]. Dabei macht man die Annahme, daß an der Brechung der SUSY nur die Hilfsfelder des S– und des T–Feldes beteiligt sind. Nun kann man Relationen für die weich brechenden Parameter aufstellen, wobei hier der Einfachheit halber deren Gültigkeit auf der Energieskala M_{GUT} der Vereinigung der drei Eichkopplungen des MSSM angenommen wird. Auch auf die Brechung der Eichgruppe nach $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ wird nicht eingegangen, sondern einfach die Gültigkeit des MSSM unterhalb von M_{GUT} vorausgesetzt. Weil in dieser Arbeit Teilchenmassen im Bereich $\mathcal{O}(100)$ GeV – $\mathcal{O}(1)$ TeV diskutiert werden, werden alle Fermionenmassen des SM bis auf m_t, m_b und m_τ und die entsprechenden Yukawa–Kopplungen und A–Parameter vernachlässigt. Ebenso werden komplexe Phasen nicht berücksichtigt, weil keine Fragen der CP–Verletzung behandelt werden sollen. Unter diesen Voraussetzungen werden die Parameter der weich brechenden Terme mittels der Renormierungsgruppengleichungen (RGE) des MSSM von M_{GUT} nach M_Z entwickelt, wobei darauf geachtet werden muß, daß das Higgs–Potential die phänomenologisch richtige Brechung der elektroschwachen Symmetrie liefert. Nun kann die phänomenologische Diskussion erfolgen (siehe Kapitel 4).

[2]Die englische Bezeichnug lautet „overall modulus“

Kapitel 2

Das minimale supersymmetrische Standardmodell

Das MSSM [43, 30, 40, 35] ist die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells (SM), d.h. dem Spektrum des SM werden nur so viele Teilchen hinzugefügt wie nötig, um eine konsistente supersymmetrische Theorie zu erhalten.

In Abschnitt 2.1 wird nach einer (sehr) kurzen Einführung des nötigen Formalismus eine supersymmetrische (nichtabelsche) Eichtheorie in 4 Dimensionen konstruiert. Anschließend werden in den Abschnitten 2.2 bis 2.4 der Feldinhalt des MSSM und dessen Lagrangian vorgestellt. In Abschnitt 2.5 wird das Higgs-Potential diskutiert und in 2.6 und 2.7 werden die physikalischen Massen und die Renormierungsgruppengleichungen des MSSM angegeben.

2.1 Eine supersymmetrische Eichtheorie

Die gewählte Darstellung und Notation folgt im Wesentlichen [3], siehe auch Anhang A. Wie schon in der Einleitung erwähnt, transformiert SUSY Bosonen in Fermionen und umgekehrt. Der Operator Q, der eine solche Transformation

$$Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \;, \qquad Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \tag{2.1}$$

generiert, ist ein antikommutierender Spinor. In der Darstellung als 2–komponentige Weyl–Spinoren ist die SUSY-Algebra definiert durch

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0 \;, \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu \;, \\ [Q_\alpha, P_\mu] &= 0 \;, \end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei P_μ der 4er–Impuls ist. Mit der Metrik $g_{\mu\nu} = diag(- + ++)$ stellt $-P^2$ den (Masse)^2-Operator dar. Außerdem kommutiert die Superladung Q mit den Generatoren einer Eichgruppe G. Daraus folgt, daß die Teilchen in einem irreduziblen Supermultiplett gleiche Quantenzahlen bzgl. G besitzen. Aus SUSY folgt, daß sie die gleichen Massen besitzen und die Anzahl der fermionischen gleich der der bosonischen Freiheitsgrade ist. Supersymmetrische Theorien können effizient mit Superfeldern formuliert werden. Dies sind Funktionen auf dem Superraum, einem Vektorraum, der aufgespannt wird durch die vier Raumzeitkoordinaten x^μ und die antikommutierenden Grassmann–Variablen θ_α und $\bar\theta^{\dot\alpha}$. Eine endliche SUSY-Transformation kann nun dargestellt werden als

$$S(x,\theta,\bar\theta) = e^{i(\theta Q + \bar Q\bar\theta - x_\mu P^\mu)} \tag{2.3}$$

und durch Anwendung infinitesimaler Transformationen auf ein Superfeld Φ findet man folgende Darstellung der Superladungen:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu \,, \\ \bar Q_{\dot\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die zugehörigen kovarianten Ableitungen, die mit Q und $\bar Q$ vertauschen und die Translationen im Superraum generieren, lauten:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu \,, \\ \bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Anstatt (2.3) kann man auch chirale Darstellungen

$$S_L = e^{i(\theta Q - x_\mu P^\mu)}e^{i\bar Q\bar\theta} \,, \qquad S_R = e^{i(\bar Q\bar\theta - x_\mu P^\mu)}e^{i\theta Q} \tag{2.6}$$

definieren und erhält die entsprechenden Superladungen, die dadurch z.T. eine einfachere Gestalt annehmen. Die zugehörigen kovarianten Ableitungen lauten nun:

$$\mathrm{D}_{L\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i(\sigma^\mu\bar\theta)_\alpha\partial_\mu \,, \qquad \bar{\mathrm{D}}_{L\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} \,, \tag{2.7}$$

$$\mathrm{D}_{R\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \,, \qquad \bar{\mathrm{D}}_{R\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - 2i(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu \,. \tag{2.8}$$

Die verschiedenen Darstellungen der Superfelder hängen dann über

$$\Phi(x,\theta,\bar\theta) = \Phi_L(x_\mu + i\theta\sigma_\mu\bar\theta,\theta,\bar\theta) = \Phi_R(x_\mu - i\theta\sigma_\mu\bar\theta,\theta,\bar\theta) \tag{2.9}$$

zusammen und man nennt Φ_L (Φ_R) linkshändige (rechtshändige) chirale Superfelder, falls sie

$$\bar{\mathrm{D}}_{L\dot\alpha}\Phi_L \equiv 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{D}_{R\alpha}\Phi_R \equiv 0 \tag{2.10}$$

erfüllen. Gemäß (2.7) hängt Φ_L dann nicht mehr von $\bar\theta$ ab und man findet folgende einfache Entwicklung in den Komponenten des chiralen Supermultipletts:

$$\Phi_L = \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x). \tag{2.11}$$

Dabei ist ϕ ein komplexes skalares Feld, ψ_α ein Weyl–Fermion und F ein Hilfsfeld, das durch seine algebraischen Bewegungsgleichungen eliminiert werden kann. Zwischen diesen Feldern wirken SUSY–Transformationen folgendermaßen:

$$\delta_\xi\phi = \sqrt{2}\xi\psi \qquad \text{(Boson} \to \text{Fermion)} \tag{2.12}$$

$$\delta_\xi\psi_\alpha = i\sqrt{2}(\sigma^\mu\bar\xi)_\alpha\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\xi_\alpha F \qquad \text{(Fermion} \to \text{Boson)} \tag{2.13}$$

$$\delta_\xi F = -i\sqrt{2}\bar\xi\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi \qquad \text{(Hilfsfeld} \to \text{totale Ableitung)} \tag{2.14}$$

Man kann also die Spin–0 Bosonen und Spin–1/2 Fermionen des SM als Komponenten chiraler Superfelder beschreiben. Aus (2.14) folgt nun eine wichtige Eigenschaft für die Konstruktion supersymmetrischer Modelle, nämlich daß $\int d^4x F(x)$ invariant unter SUSY-Transformationen ist.

Zur Beschreibung der Spin–1 Eichbosonen des SM benötigt man eine andere irreduzible Darstellung der SUSY, die Vektorsuperfelder, die definiert sind durch die Bedingung:

$$V^a \equiv V^{a\dagger} \tag{2.15}$$

Der Index a numeriert die adjungierte Darstellung der Eichgruppe G. Die Entwicklung von V in Komponenten vereinfacht sich in der Wess–Zumino–Eichung [3]:

$$V^a = i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}^a(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda^a(x) - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v^a_\mu(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D^a(x) \tag{2.16}$$

Das Vektormultiplett besteht also aus einem Weyl–Fermion λ^a_α, einem Vektorfeld v^a_μ und einem Hilfsfeld D^a, das ebenfalls eliminiert werden kann.

Superfelder transformieren sich unter der (nichtabelschen) Eichgruppe G gemäß

$$\begin{aligned} \Phi_i &\longrightarrow \left(e^{-ig\Lambda}\right)_{ij}\Phi_j \\ e^{2gV} &\longrightarrow e^{-ig\Lambda^\dagger}e^{2gV}e^{ig\Lambda} \end{aligned} \tag{2.17}$$

mit $\Lambda = \Lambda^a\mathbf{T}^a_{ij}$ und $V = V^a\mathbf{T}^a_{ij}$. Dabei sind Λ^a chirale Superfelder, $\mathbf{T}^a$ sind die Generatoren von G mit $[\mathbf{T}^a, \mathbf{T}^b] = if^{abc}\mathbf{T}^c$ und der Normierung $\mathrm{Tr}(\mathbf{T}^a\mathbf{T}^b) = k\delta^{ab}$ und g ist die Eichkopplungskonstante. Die Indizes i, j numerieren die Darstellung der Eichgruppe, unter der die chiralen Superfelder transformieren. Eine invariante Wirkung kann man nun konstruieren, wenn man die $\theta\theta$– ($\bar{\theta}\bar{\theta}$–) und die $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$–Komponente von kinetischen und Wechselwirkungs–Termen für Superfelder herausprojeziert. Die allgemeinste supersymmetrische, eichinvariante und renormierbare Lagrangedichte für die Wechselwirkung skalarer, Spinor– und Vektorfelder lautet:

$$L_{susy} = L_{eich} + L_{kin} + L_{superpot} \tag{2.18}$$

mit

$$\begin{aligned} L_{eich} &= \frac{1}{16kg^2}\mathrm{Tr}\left(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\right) \\ L_{kin} &= \Phi^\dagger e^{2gV}\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ L_{superpot} &= \mathcal{W}(\Phi)|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{2.19}$$

mit der Eichfeldstärke

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}e^{-gV}\mathrm{D}_\alpha e^{gV} \tag{2.20}$$

und dem Superpotential[1]

$$\mathcal{W}(\Phi) = \left.\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\right|_{\theta\theta} \tag{2.21}$$

mit den total symmetrischen Tensoren der Massen m_{ij} und Kopplungen g_{ijk}. Ein linearer Term ist i.a. nicht erlaubt, sondern nur dann, wenn das entsprechende chirale Superfeld ungeladen unter der Eichgruppe ist.

[1] Das Superpotential ist eine holomorphe Funktion der chiralen Superfelder

2.2 Der Feldinhalt des MSSM

Das SM wird dadurch zum MSSM erweitert, daß man unter Beibehaltung der Eichgruppe

$$G = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \tag{2.22}$$

nur genau so viele Felder hinzufügt wie nötig, um eine konsistente supersymmetrische Theorie zu erhalten.

Zunächst soll der Feldinhalt des SM rekapituliert werden. Das Spektrum und die jeweiligen Quantenzahlen sind in Tabelle 2.1 zusammengefaßt, wo die schwachen Eigenzustände aufgeführt sind. Die Fermionen sind Weyl–Spinoren, die sich gemäß $u_D = \binom{u_L}{u_R}$ zu Dirac-Spinoren zusammensetzen. Dabei ist u_L ein linkshändiger und u_R ein rechtshändiger, von u_L unabhängiger Weyl–Spinor. Die fermionischen Partner der Eichbosonen, Gauginos genannt

Teilchenspektrum des SM

		Spin 0	Spin $\frac{1}{2}$	Spin 1	Farbe	T_3	Y
Eichbosonen	$SU(3)_C$			g	8	0	0
	$SU(2)_L$			$\begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{pmatrix}$	1	$\begin{matrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$	0
	$U(1)_Y$			B	1	0	0
Quarks (×3 Familien)			$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$		3	$\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$	$+\frac{1}{6}$
			$u_R^\dagger$		$\bar{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
			$d_R^\dagger$		$\bar{3}$	0	$+\frac{1}{3}$
Leptonen (×3 Familien)			$l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$		1	$\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$	$-\frac{1}{2}$
			$e_R^\dagger$		1	0	$+1$
Higgsboson		$h = \begin{pmatrix} h^0 \\ h^- \end{pmatrix}$			1	$\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$	$-\frac{1}{2}$

Tabelle 2.1: Familien– und Eichindizes sind weggelassen; „u“ steht für die up–Typ Quarks, das sind die Quarks u, c, t, „d“ steht entsprechend für die down–Typ Quarks; die Felder sind als $SU(2)_L$–Multipletts geordnet; „Farbe“ ist die Dimension der Darstellung bzgl. $SU(3)_C$; T_3 ist die 3. Komponente des schwachen Isospins; Y ist die Hyperladung; die elektrische Ladung Q ergibt sich gemäß $Q = T_3 + Y$. Der Konvention folgend, nachdem SUSY eingeführt ist, alle chiralen Supermultipletts mit linkshändigen Weyl–Spinoren zu definieren, sind in der Tabelle die konjugierten der rechthändigen Quarks und Leptonen aufgeführt.

(bzw. im einzelnen Gluinos, Winos und Bino), können keine Fermionen des SM sein, denn unter diesen findet man kein $SU(3)_C$–Oktett, kein $SU(2)_L$–Triplett und kein $U(1)_Y$–Singulett (d.h. $Y = 0$). Eichbosonen und Gauginos des MSSM bilden somit 12 Vektorsupermultipletts.

Umgekehrt können die bosonischen Partner der Fermionen des SM, Sfermionen genannt (bzw. im einzelnen Squarks und Sleptonen), ebenso keine Eichbosonen des SM sein. Die Partnerteilchen müssen somit komplexe Skalare sein, die zusammen mit den Fermionen des SM chirale Supermultipletts des MSSM bilden.

Durch SUSY wäre es nun möglich, daß das Higgsboson des SM der skalare Partner eines SM–Fermions ist, denn das Higgs-Dublett besitzt gemäß Tabelle 2.1 die gleichen Quantenzahlen wie ein linkshändiges Leptonendublett, tatsächlich aber wäre u.a. die Leptonenzahlerhaltung verletzt [43]. Man muß also wiederum neue Teilchen einführen und erhält ein weiteres chirales Supermultiplett des MSSM.

Teilchenspektrum des MSSM

		Spin 0	Spin $\frac{1}{2}$	Spin 1	Farbe	T_3	Y
Eichbosonen/ Eichfermionen	$SU(3)_C$		$\tilde{g}$	g	8	0	0
	$SU(2)_L$		$\begin{pmatrix} \tilde{W}^1 \\ \tilde{W}^2 \\ \tilde{W}^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{pmatrix}$	1	$+1$ 0 -1	0
	$U(1)_Y$		$\tilde{B}$	B	1	0	0
Quarks/ Squarks		$\tilde{q}_L = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$	$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$		3	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{6}$
		$\tilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$		$\bar{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
		$\tilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$		$\bar{3}$	0	$+\frac{1}{3}$
Leptonen/ Sleptonen		$\tilde{l}_L = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$	$l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$		1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
		$\tilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$		1	0	$+1$
Higgsbosonen/ Higgsfermionen		$h_d = \begin{pmatrix} h_d^0 \\ h_d^- \end{pmatrix}$	$\tilde{h}_d = \begin{pmatrix} \tilde{h}_d^0 \\ \tilde{h}_d^- \end{pmatrix}$		1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
		$h_u = \begin{pmatrix} h_u^+ \\ h_u^0 \end{pmatrix}$	$\tilde{h}_u = \begin{pmatrix} \tilde{h}_u^+ \\ \tilde{h}_u^0 \end{pmatrix}$		1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$

Tabelle 2.2: Die Indizes „L“ und „R“ bei den Squarks und Sleptonen bezeichnen natürlich keine Händigkeit, die für Spin–0 Teilchen nicht definiert ist, sondern erinnern an die Händigkeit des fermionischen Superpartners. Die Indizes „u“ und „d“ der Higgs–Felder beziehen sich auf die Quarks, denen sie über Yukawa–Kopplungen Massen geben werden.

Leider ist damit die Erweiterung des SM noch nicht beendet, denn man benötigt noch ein zweites chirales Supermultiplett im Higgs-Sektor. Die Theorie wäre nämlich mit nur einem Higgs-Dublett nicht anomaliefrei und man könnte für die up–Typ Quarks keinen Massen im

Superpotential erzeugen [43]. Das Spektrum des MSSM ist in Tabelle 2.2 zusammengefaßt.

Nun bleibt noch die Form des Superpotentials $\mathcal{W}$ zu klären. Wie schon erwähnt, ist $\mathcal{W}$ eine holomorphe Funktion der chiralen Superfelder, die im Folgenden mit den entsprechenden Großbuchstaben bezeichnet werden, so ist z.B. Q ein linkshändiges Superfeld, das $\tilde{q}_L$ und q_L enthält, U ist ein linkshändiges Superfeld, das $\tilde{u}_R^*$ und $u_R^\dagger$ enthält, analog D, L, E, H_u und H_d.

Das allgemeinste renormierbare Superpotential für das MSSM lautet [40]

$$\mathcal{W}_{allg} = \mathcal{W} + \mathcal{W}_{\not L} + \mathcal{W}_{\not B} \;, \tag{2.23}$$

mit

$$\mathcal{W} = U^i Y_u^{ij} Q^j \cdot H_u + D^i Y_d^{ij} Q^j \cdot H_d + E^i Y_e^{ij} L^j \cdot H_d + \mu H_u \cdot H_d \;, \tag{2.24}$$

$$\mathcal{W}_{\not L} = \lambda_{ijk} D^i Q^j \cdot L^k + \lambda'_{ijk} E^i L^j \cdot L^k + \mu'_i H_u \cdot L^i \;, \tag{2.25}$$

$$\mathcal{W}_{\not B} = \lambda''_{ijk} U^i D^j D^k \;, \tag{2.26}$$

mit den Familienindizes $i, j, k = 1 \ldots 3$, die nur an dieser Stelle der Klarheit halber angegeben sind. Die $3{\times}3$ Matrizen $\mathbf{Y}^u$, $\mathbf{Y}^d$ und $\mathbf{Y}^e$ sind die jeweiligen Yukawa–Kopplungen und die $SU(2)$–Dubletts werden gemäß $A \cdot B = A^a \epsilon_{ab} B^b$ $(a, b = 1, 2)$ zu $SU(2)$–Singuletts kontrahiert, wobei ϵ_{ab} total antisymmetrisch ist mit $\epsilon_{12} = -1$.

$\mathcal{W}_{\not L}$ und $\mathcal{W}_{\not B}$ verletzen die Leptonen– bzw. Baryonenzahlerhaltung und würden einen Protonenzerfall ermöglichen, der weit schneller erfolgt als es die experimentelle Grenze von ca. 10^{32} Jahren erlaubt. Man könnte nun die Leptonen– bzw. Baryonenzahlerhaltung im MSSM postulieren, aber dies wäre ein Schritt zurück gegenüber dem SM, wo die Erhaltung dieser Quantenzahlen nicht vorausgesetzt werden muß. Eleganter ist es, eine neue Symmetrie in das MSSM einzuführen, bzgl. der $\mathcal{W}$, nicht aber $\mathcal{W}_{\not L}$ und $\mathcal{W}_{\not B}$ invariant sind. Diese neue Symmetrie wird „R-Parität“ [22][2] genannt und ist eine diskrete $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie mit der erhaltenen multiplikativen Quantenzahl

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s} \;, \tag{2.27}$$

wobei s der Spin des jeweiligen Teilchens ist. Somit haben alle Teilchen des SM (inkl. zweites Higgs-Boson) die R-Paratät $P_R = +1$ und alle Superpartner $P_R = -1$. Ein Term im Lagrangian ist nur dann erlaubt, wenn das Produkt der P_R der enthaltenen Felder $+1$ ergibt. Dies hat nicht nur zur Folge, daß die Terme (2.25) und (2.26) im Superpotential verboten sind, sondern auch, daß die neu eingeführten Superpartner nur paarweise produziert werden können und somit das leichteste dieser Teilchen (LSP) stabil und deshalb ein Kandidat für dunkle Materie ist[19]. Gleichung (2.24) beschreibt also nun das Superpotential[3] des MSSM.

2.3 Weiche Brechung der Supersymmetrie

Im bisher experimentell erschlossenen Energiebereich muß SUSY gebrochen sein, denn sonst wären die Massen der Teilchen des SM und ihrer Superpartner entartet, was aber im Widerspruch zum Experiment steht, denn ein gleich schwerer supersymmetrischer Partner des Elektrons hätte schon vor langer Zeit entdeckt werden müssen.

[2]Symmetrien mit der Eigenschaft, daß Teilchen im gleichen Supermultiplett unterschiedliche Ladungen besitzen, werden als „R-Symmetrien“ bezeichnet.

[3]Im Grenzfall $\mu \to 0$ existiert eine exakte Peccei–Quinn–Symmetrie [48]. Wenn aber die Higgs–Felder VEVs erhalten, ist diese Symmetrie spontan gebrochen und die Theorie enthält ein Axion. Deshalb benötigt man $\mu \neq 0$.

Eine spontane Brechung der SUSY [43] liegt genau dann vor, wenn (mindestens) ein Hilfsfeld einen nichtverschwindenden VEV erhält. Je nachdem, welches Hilfsfeld einen von Null verschiedenen VEV besitzt, spricht man von „F–Term–“ bzw. „D–Term–Brechung“. Eine allgemeine Eigenschaft von Modellen mit spontaner SUSY-Brechung ist die Summenregel[4]

$$\mathrm{STr}M^2 \equiv \sum_s (-1)^{2s}(2s+1)m_s^2 = 0 \ , \tag{2.28}$$

dabei ist M die Massenmatrix der Teilchen und m_s die Masse des jeweiligen Teilchens mit Spin s. Weil sich die Teilchenmassen in diesem gewichteten Mittel aufheben müssen, ist diese Bedingung, die zumindest auf dem tree–level gültig ist, innerhalb des MSSM phänomenologisch problematisch Ein möglicher Ausweg ist, das MSSM als „beobachtbaren Sektor“ einer übergeordneten Theorie betrachten, die SUSY im „versteckten Sektor“ zu brechen und diese Brechung durch gravitative oder Eichwechselwirkungen auf den „beobachtbaren Sektor“ zu übertragen, so daß (2.28) für das MSSM selbst nicht gelten muß. Tatsächlich ist der Mechanismus der SUSY–Brechung Gegenstand intensiver Forschung und längst nicht geklärt. Eine pragmatische Vorgehensweise ist, explizit brechende Terme hinzuzufügen, die aber nicht die quadratischen Divergenzen der fundamentalen Skalare, also das Hierarchieproblem, wieder in die Theorie einführen. Solche Terme werden „weich brechende Terme“ genannt. Für das MSSM lautet dieser Beitrag zum Lagrangian [40]:

$$\begin{aligned}
-L_{weich}^{MSSM} &= \tilde{q}_L^\dagger \tilde{\mathbf{m}}_{\tilde{q}_L}^2 \tilde{q}_L + \tilde{u}_R^\dagger \tilde{\mathbf{m}}_{\tilde{u}_R}^2 \tilde{u}_R + \tilde{d}_R^\dagger \tilde{\mathbf{m}}_{\tilde{d}_R}^2 \tilde{d}_R + \tilde{l}_L^\dagger \tilde{\mathbf{m}}_{\tilde{l}_L}^2 \tilde{l}_L + \tilde{e}_R^\dagger \tilde{\mathbf{m}}_{\tilde{e}_R}^2 \tilde{e}_R \\
&+ m_{h_u}^2 |h_u|^2 + m_{h_d}^2 |h_d|^2 \\
&+ \left(\tilde{u}_R \mathbf{A}_u \tilde{q}_L \cdot h_u + \tilde{d}_R \mathbf{A}_d \tilde{q}_L \cdot h_d + \tilde{e}_R \mathbf{A}_e \tilde{l}_L \cdot h_d + \mu B h_u \cdot h_d + \text{h.c.} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(M_3 \tilde{g}\tilde{g} + M_2 \tilde{W}\tilde{W} + M_1 \tilde{B}\tilde{B} + \text{h.c.} \right) \ .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

In (2.29) sind die trilinearen Kopplungsparameter $\mathbf{A}_{u,d,e}$ skalarer Felder i.a. komplexe 3×3 Matrizen, die Massenparameter $\tilde{\mathbf{m}}^2_{\tilde{q},\tilde{u},\tilde{d},\tilde{l},\tilde{e}}$ sind hermitesche 3×3 Matrizen (jeweils im Raum der Familienindizes, die hier unterdrückt sind) und die Gauginomassen $M_{3,2,1}$ sowie der Parameter B sind komplexe Zahlen. Gegenüber den 19 Input–Parametern des SM[5] werden so generisch 105 neue Massen, komplexe Phasen und Mischungswinkel eingeführt! Dies würde einerseits eine Freiheit bedeuten, die kaum noch Aussagen ermöglicht, andererseits sind viele dieser Parameter durch experimentelle Ergebnisse zur CP–Verletzung, FCNC usw. derart eingeschränkt, daß ein organisierendes Prinzip, eine fundamentalere Theorie auf einer höheren Energieskala, die ebenfalls zu spezifizieren ist, erforderlich ist. So erhält man z.B. in durch Supergravitation („SUGRA“) motivierten Modellen folgenden Ansatz auf der Planck–Skala [43]:

- Alle skalaren Massen sind gleich, $m^2 = m^2_{3/2}$, dabei ist $m_{3/2}$ die Gravitino–Masse. Man spricht von der „Universalität“ der skalaren Massen.
- Alle Gaugino-Massen sind gleich, $M_{1,2,3} = M_{1/2}$. Dies nennt man die „GUT–Relation“.
- Die weich brechenden trilinearen Terme sind proportional zu den Yukawa–Kopplungen („Proportionalität“).

[4]Eine Ausnahme von dieser Regel ist möglich, wenn eine ungebrochene $U(1)$ und D–Term Brechung der SUSY vorliegen. Dann ist die rechte Seite $\propto \mathrm{Tr}Q\langle D\rangle$, wobei Q die Ladungsmatrix der betreffenden chiralen Felder bzgl. der $U(1)$ ist [43].

[5]Mit massiven Neutrinos und leptonischen Mischungswinkeln enthält das SM 26 Parameter.

Ignoriert man nun noch die möglichen Phasen, so bleiben nur zusätzliche 5 Parameter ($m^2_{3/2}$, $M_{1/2}$, A, B, μ) zu spezifizieren, von denen auch noch 2 durch LEP–Daten eliminiert werden können.

2.4 Der Lagrangian des MSSM

Den Lagrangian L^{MSSM} erhält man nun, indem man (2.18) auf die Eichgruppe $G = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ des SM spezifiziert und L^{MSSM}_{weich} aus (2.29) hinzuaddiert, also

$$L^{MSSM} = L^{MSSM}_{eich} + L^{MSSM}_{kin} + L^{MSSM}_{superpot} + L^{MSSM}_{weich} \ , \tag{2.30}$$

mit

$$\begin{aligned} L^{MSSM}_{eich} =& \frac{1}{16k_3 g_3^2} \mathrm{Tr}\left(W^{3\alpha} W^3_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}^3_{\dot\alpha} \bar{W}^{3\dot\alpha}|_{\bar\theta\bar\theta}\right) \\ &+ \frac{1}{16k_2 g_2^2} \mathrm{Tr}\left(W^{2\alpha} W^2_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}^2_{\dot\alpha} \bar{W}^{2\dot\alpha}|_{\bar\theta\bar\theta}\right) \\ &+ \frac{1}{4}\left(W^{1\alpha} W^1_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}^1_{\dot\alpha} \bar{W}^{1\dot\alpha}|_{\bar\theta\bar\theta}\right) \ , \end{aligned} \tag{2.31}$$

wobei

$$\begin{aligned} W^3_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}} e^{-g_3\hat{G}} \mathrm{D}_\alpha e^{g_3\hat{G}} \ , \\ W^2_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}} e^{-g_2\hat{W}} \mathrm{D}_\alpha e^{g_2\hat{W}} \ , \\ W^1_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}} \mathrm{D}_\alpha \hat{\hat{B}} \qquad \text{(abelsch)} \end{aligned}$$

und

$$L^{MSSM}_{kin} = \Phi^{I\dagger} e^{2g_3\hat{G}} e^{2g_2\hat{W}} e^{2g_1\hat{\hat{B}}} \Phi^I|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \ , \tag{2.32}$$

$$L^{MSSM}_{superpot} = \mathcal{W}(\Phi)|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \ , \tag{2.33}$$

wobei der Index I in (2.32) über alle chiralen Superfelder des MSSM läuft und $\mathcal{W}(\Phi)$ in (2.33) das Superpotential aus (2.24) ist. In (2.31) sind g_3, g_2 und g_1 die Eichkopplungen von $SU(3)_C, SU(2)_L$ und $U(1)_Y$; k_3 und k_2 sind die entsprechenden Normierungen (siehe Abschnitt 2.1); $\hat{G} = \hat{G}^a \mathbf{T}^a$ $(a = 1, \ldots, 8)$, $\hat{W} = \hat{W}^{\bar a} \mathbf{t}^{\bar a}$ $(\bar a = 1, \ldots, 3)$ und $\hat{\hat{B}} = \hat{B} Y$ sind Vektorsuperfelder mit den Generatoren $\mathbf{T}^a$, $\mathbf{t}^{\bar a}$ und Y in der adjungierten von $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ und $U(1)_Y$, d.h. $(\mathbf{T}^a_{adj})^{bc} = -if^{abc}$, $(\mathbf{t}^{\bar a}_{adj})^{\bar b \bar c} = -if^{\bar a \bar b \bar c}$ und $Y_{adj} = 0$; $\hat{G}^a$ enthält die Gluonen g^a und die Gluinos $\tilde{g}^a$ als fermionische Superpartner, $\hat{W}^{\bar a}$ enthält die W–Bosonen $W^{\bar a}$ und die Winos $\tilde{W}^{\bar a}$ und $\hat{B}$ enthält das B–Boson B und das Bino $\tilde{B}$. In Komponenten lautet (2.30) dann:

$$\begin{aligned} L^{MSSM} =& -\frac{1}{4} g^{a\mu\nu} g^a_{\mu\nu} - i\bar{\tilde{g}}^a \bar\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \tilde{g}^a - \frac{1}{4} W^{\bar a\mu\nu} W^{\bar a}_{\mu\nu} - i\bar{\tilde{W}}^{\bar a} \bar\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \tilde{W}^{\bar a} \\ &- \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - i\bar{\tilde{B}} \bar\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \tilde{B} - \mathcal{D}^\mu \phi^{I\dagger} \mathcal{D}_\mu \phi^I - i\bar\psi^I \bar\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^I \\ &+ \sqrt{2}\left(ig_3 \phi^{I\dagger} \mathbf{T}^a \psi^I \tilde{g}^a + ig_2 \phi^{I\dagger} \mathbf{t}^{\bar a} \psi^I \tilde{W}^{\bar a} + ig_1 \phi^{I\dagger} Y \psi^I \tilde{B} + \text{h.c}\right) \\ &- \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{W}(\Phi)}{\partial\Phi^I \partial\Phi^J}\bigg|_{skalar} \psi^I \psi^J + \text{h.c.}\right) - V^{MSSM}_{skalar} \ , \end{aligned} \tag{2.34}$$

mit

$$
\begin{aligned}
g^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu g^a_\nu - \partial_\nu g^a_\mu - g_3 f^{abc} g^b_\mu g^c_\nu \ , \\
W^{\bar{a}}_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^{\bar{a}}_\nu - \partial_\nu W^{\bar{a}}_\mu - g_2 f^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} W^{\bar{b}}_\mu W^{\bar{c}}_\nu \ , \\
B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \ ,
\end{aligned}
$$

der kovarianten Ableitung

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i g_3 \mathbf{T}^a g^a_\mu + i g_2 \mathbf{t}^{\bar{a}} W^{\bar{a}}_\mu + i g_1 Y B_\mu \tag{2.35}$$

und dem skalaren Potential

$$
\begin{aligned}
V^{MSSM}_{skalar} =& \left(\left. \frac{\partial \mathcal{W}(\Phi)}{\partial \Phi^I} \right|_{skalar} \right)^\dagger \left(\left. \frac{\partial \mathcal{W}(\Phi)}{\partial \Phi^I} \right|_{skalar} \right) \\
&+ \frac{1}{2} g_3^2 \sum_a (\phi^{I\dagger} \mathbf{T}^a \phi^I)^2 + \frac{1}{2} g_2^2 \sum_{\bar{a}} (\phi^{I\dagger} \mathbf{t}^{\bar{a}} \phi^I)^2 + \frac{1}{2} g_1^2 (\phi^{I\dagger} Y \phi^I)^2 \\
&- \left. L^{MSSM}_{weich} \right|_{skalar} \ ,
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

wobei $\left. L^{MSSM}_{weich} \right|_{skalar}$ der Anteil von (2.29) ohne die Gaugino–Terme ist.

2.5 Spontane Brechung der Eichsymmetrie

2.5.1 Das Higgs–Potential auf dem tree–level

Wie im SM soll nun die Eichgruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ durch den Higgsmechanismus spontan nach $U(1)_{em}$ gebrochen werden. Das absolute Minimum des skalaren Potentials muß also abseits des Ursprungs liegen. Das skalare Potential ist der Anteil von L^{MSSM}, der nur skalare Felder ohne Ableitungen enthält. Geht man davon aus, daß nur die skalaren Felder im Higgs–Sektor von Null verschiedene VEVs entwickeln, dann braucht man lediglich den Teil des skalaren Potentials zu betrachten, der die Higgs–Felder beinhaltet. Außerdem muß im Minimum gewährleistet sein, daß die elektromagnetische Ladung erhalten ist, also $\langle h_d^- \rangle = \langle h_u^+ \rangle = 0$, was durch $SU(2)$–Eichtransformationen erreicht werden kann [17]. Es bleibt also folgendes Potential zu minimieren

$$
\begin{aligned}
V^{tree}_{Higgs} &= m_u^2 |h_u^0|^2 + m_d^2 |h_d^0|^2 + (\mu B h_u^0 h_d^0 + \text{h.c.}) \\
&+ \frac{1}{8} (g_1^2 + g_2^2)(|h_u^0|^2 - |h_d^0|^2)^2 \ ,
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

mit $m^2_{u,d} = m^2_{h_{u,d}} + \mu^2$ und den Kopplungen g_1 und g_2 der Eichgruppen $U(1)_Y$ und $SU(2)_L$[6]. Die VEVs der skalaren Higgsfelder lauten also

$$\langle h_u \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} \ , \qquad \langle h_d \rangle = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} \ , \tag{2.38}$$

wobei v_u und v_d reell gewählt werden können (unitäre Eichung). An dieser Stelle führt man nun einen neuen Parameter ein, und zwar

$$\tan\beta = \frac{v_u}{v_d} \ , \tag{2.39}$$

[6] Man beachte, daß der Vorfaktor des quartischen Terms kein unabhängiger Parameter wie im SM ist, sondern durch die Eichkopplungen festgelegt wird.

denn wegen

$$M_Z^2 = \frac{1}{2}(g_1^2 + g_2^2)(v_u^2 + v_d^2) \tag{2.40}$$

(siehe Abschnitt 2.6.2) liegen v_u und v_d schon durch Angabe von tanβ fest. In der Richtung $|h_u^0| = |h_d^0|$ verschwindet der quartische Term in (2.37) und das Potential ist nur dann von unten beschränkt, wenn

$$m_u^2 + m_d^2 \geq 2|\mu B| \; . \tag{2.41}$$

Außerdem muß, damit die $SU(2) \times U(1)$-Eichbrechung auftritt, die Determinante der Hesse-Matrix von V_{Higgs}^{tree} an der Stelle $(0,0)$ negativ sein, d.h. es muß

$$m_u^2 m_d^2 < (\mu B)^2 \tag{2.42}$$

gelten. Minimiert man nun (2.37), so erhält man die beiden Gleichungen

$$\mu^2 = \frac{m_{h_d}^2 - m_{h_u}^2 \tan^2\beta}{\tan^2\beta - 1} - \frac{1}{2}M_Z^2 \tag{2.43}$$

$$\mu B = -\frac{1}{2}\left(m_d^2 + m_u^2\right)\sin 2\beta \; . \tag{2.44}$$

Bei einer Analyse des Spektrums des MSSM muß also dafür gesorgt werden, daß diese beiden Gleichungen erfüllt sind, damit die elektroschwache Symmetrie phänomenologisch richtig gebrochen ist.

2.5.2 Das Higgs–Potential in 1–loop Ordnung

Die Parameter des MSSM sind natürlich ebenso wie die Parameter des SM abhängig von der Energieskala Λ und entwickeln sich gemäß ihrer Renormierungsgruppengleichungen (RGE). Ein Vorteil des MSSM ist nun, daß die elektroschwache Symmetrie radiativ gebrochen werden kann [37]. D.h. genau einer der auf einer hohen Energieskala vorgegebenen Massenparameter in (2.37) (nämlich m_u^2, siehe Abschnitt 2.7) wird im Laufe seiner Entwicklung herunter zur schwachen Energieskala negativ, so daß der Higgs–Effekt auftreten kann[7].

Wie sich später zeigen wird, ist es nötig, 1–loop Korrekturen des Higgs–Potentials zu berücksichtigen, weil diese in den meisten Fällen groß sind [2]:

$$V_{Higgs}^{1-loop} = V_{Higgs}^{tree}(\Lambda) + \Delta V(\Lambda) \; , \tag{2.45}$$

mit

$$\Delta V(\Lambda) = \frac{1}{64\pi^2}\sum_p (-1)^{2s_p}(2s_p+1)m_p^4(\ln\frac{m_p^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2}) \; , \tag{2.46}$$

wobei m_p die Masse des Teilchens p mit Spin s_p ist. Die Minimierungsbedingungen (2.43) und (2.44) müssen jetzt entsprechend modifiziert werden, dazu definiert man

$$\overline{m}_{h_{u,d}}^2 = m_{h_{u,d}}^2 + \Sigma_{u,d} \; , \tag{2.47}$$

[7] Im SM ist eine so natürliche Einführung des Higgs–Mechanismus nicht möglich.

mit

$$\Sigma_{u,d} \equiv \frac{\partial \Delta V}{\partial v_{u,d}^2} = \frac{1}{32\pi^2} \sum_p (-1)^{2s_p}(2s_p+1) m_p^2 (\ln \frac{m_p^2}{\Lambda^2} - 1) \frac{\partial m_p^2}{\partial v_{u,d}^2} , \tag{2.48}$$

so daß die 1–loop korrigierten Minimierungsbedingungen lauten:

$$\mu^2 = \frac{\overline{m}_{h_d}^2 - \overline{m}_{h_u}^2 \tan^2\beta}{\tan^2\beta - 1} - \frac{1}{2} M_Z^2 , \tag{2.49}$$

$$\mu B = -\frac{1}{2}\left(\overline{m}_d^2 + \overline{m}_u^2\right) \sin 2\beta , \tag{2.50}$$

wobei $\overline{m}_{u,d}^2 = m_{u,d}^2 + \Sigma_{u,d}$ ist. Die Ausdrücke für die 1–loop Beiträge Σ_u und Σ_d befinden sich im Anhang B.

2.6 Das Massenspektrum des MSSM

In diesen Abschnitt werden die nötigen Formeln wiedergegeben, um das Massenspektrum des MSSM berechnen zu können [6]. Zunächst aber sollen die in dieser Arbeit verwendeten vereinfachenden Annahmen dargestellt werden, damit die Ausdrücke für die Massen z.T. spezifiziert werden können.

2.6.1 Annahmen

- Die möglichen komplexen Phasen der Parameter werden nicht berücksichtigt, weil die CP-Verletzung in dieser Arbeit nicht erörtert werden soll.

- Die Yukawa-Matrizen legen, nachdem die neutralen skalaren Komponenten der Higgs–Felder VEVs erhalten haben, die Massen und CKM–Mischungswinkel der Quarks und Leptonen fest. Aufgrund der beobachteten Massenhierarchie macht man die Näherung, nur die Yukawa–Kopplungen der 3. Familie zu berücksichtigen, also

$$\mathbf{Y}_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{pmatrix} , \quad \mathbf{Y}_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix} , \quad \mathbf{Y}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_\tau \end{pmatrix} . \tag{2.51}$$

- Die trilinearen A–Parameter sind proportional zu den Yukawa–Kopplungen

$$\mathbf{A}_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_t y_t \end{pmatrix} , \mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_b y_b \end{pmatrix} , \mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_\tau y_\tau \end{pmatrix} . \tag{2.52}$$

- Wenn man oberhalb von M_{GUT} eine vereinheitlichte Theorie voraussetzt, dann sind die Gaugino-Massen bei M_{GUT} universell, also $M_i = M_{1/2}$ $(i = 1, 2, 3)$.

- Die Massenmatrizen der weich brechenden skalaren Massenterme sind diagonal. In der Literatur wird meist auch noch die Universalität der Massen vorausgesetzt, um FCNC zu vermeiden. In dieser Arbeit soll Nicht–Universalität zugelassen sein, d.h.

$$\mathbf{\tilde{m}}^2_{\tilde{q}L} = \begin{pmatrix} \tilde{m}^2_{\tilde{q}1L} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m}^2_{\tilde{q}2L} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m}^2_{\tilde{q}3L} \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{\tilde{m}}^2_{\tilde{u}R} = \begin{pmatrix} \tilde{m}^2_{\tilde{u}R} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m}^2_{\tilde{c}R} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m}^2_{\tilde{t}R} \end{pmatrix} \quad \text{usw.} \tag{2.53}$$

Zusammen mit den Higgs–Massenparametern μ und B und dem Parameter $\tan\beta$ sind so die Anfangsbedingungen bei M_{GUT} fixiert.

2.6.2 Die Massen der Eichbosonen

Durch die Brechung der Eichsymmetrie

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{em}$$

werden Massen für die zugehörigen Eichbosonen erzeugt. Weil aber $U(1)_{em}$ überlebt, ist klar, daß ein Vektorteilchen masselos bleiben muß. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.4 erhält man folgende Masseneigenzustände:

$$\begin{aligned} W^\pm_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu \mp iW^2_\mu) , \\ Z^0_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}(g_2 W^3_\mu - g_1 B_\mu) , \\ \gamma_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}(g_2 W^3_\mu + g_1 B_\mu) , \end{aligned} \tag{2.54}$$

mit den Massen

$$\begin{aligned} M_W^2 &= \frac{g_2^2}{2}(v_u^2+v_d^2) , \\ M_Z^2 &= \frac{g_1^2+g_2^2}{2}(v_u^2+v_d^2) , \end{aligned} \tag{2.55}$$

das Photon γ_μ ist masselos. Der schwache Mischungswinkel θ_W (Weinbergwinkel), der den Basiswechsel $(W^3_\mu, B_\mu) \to (Z^0_\mu, \gamma_\mu)$ erzeugt, ist definiert durch

$$\cos\theta_W = \frac{g_2^2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} , \qquad \text{bzw.} \qquad \sin\theta_W = \frac{g_1^2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} . \tag{2.56}$$

2.6.3 Die Massen der Fermionen

Setzt man die Higgs–VEVs in das Superpotential (2.24) ein, erkennt man sofort, daß die Fermionenmassen proportional zu den Yukawa–Kopplungen sind:

$$M_t = y_t v_u , \qquad M_b = y_b v_d , \qquad M_\tau = y_\tau v_d . \tag{2.57}$$

2.6.4 Die Massen der Sfermionen

Die Massenterme der Squarks und Sleptonen enthalten 2×2 Matrizen der Form:

$$\begin{pmatrix} m^2_{\tilde{f}_L} & m^2_{\tilde{f}_{LR}} \\ m^2_{\tilde{f}_{RL}} & m^2_{\tilde{f}_R} \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

mit

$$m^2_{\tilde{f}_L} = \tilde{m}^2_{\tilde{f}_L} + M^2_f + M^2_Z \cos 2\beta (T_3 - Q \sin^2\theta_W) \ , \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned} m^2_{\tilde{f}_R} &= \tilde{m}^2_{\tilde{f}_R} + M^2_f - M^2_Z \cos 2\beta (T_3 - Q \sin^2\theta_W) \ , \\ &= \tilde{m}^2_{\tilde{f}_R} + M^2_f + M^2_Z \cos 2\beta Q \sin^2\theta_W \ , \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$m^2_{\tilde{f}_{LR}} = m^{2\,*}_{\tilde{f}_{RL}} = \begin{cases} M_f(A_f + \mu \cot\beta) & \text{für } \ f = u \ , \\ M_f(A_f + \mu \tan\beta) & \text{für } \ f = d, e \ , \end{cases} \tag{2.61}$$

wobei T_3 und Q mit $Q = T_3 + Y$ der Tabelle 2.2 entnommen werden können. Wie man sieht, kommt es i.a. durch nichtverschwindende trilineare Kopplungen zur Mischung der skalaren Partner der links– und rechtshändigen Fermionen. Diese Massenmatrix kann folgendermaßen diagonalisiert werden:

$$m^2_{\tilde{f}_{1,2}} = \frac{1}{2}\left(m^2_{\tilde{f}_L} + m^2_{\tilde{f}_R} \mp \sqrt{\left(m^2_{\tilde{f}_L} - m^2_{\tilde{f}_R}\right)^2 + 4\left(m^2_{\tilde{f}_{LR}}\right)} \right) \ . \tag{2.62}$$

2.6.5 Die Charginomassen

Die Eichsymmetriebrechung führt auch zu einer Mischung der elektroschwachen Gauginos und der Higgsinos. Analog zu (2.54) definiert man nun für die geladenen Gauginos die Linearkombinationen $\tilde{W}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{W}^1 \mp i\tilde{W}^2)$, die mit den geladenen Higgsinos zu den Charginos $\tilde{C}^\pm_{1,2}$ mischen. Diese Masseneigenzustände erhält man durch Diagonalisieren der Massenmatrix

$$\begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2} M_W \sin\beta \\ \sqrt{2} M_W \cos\beta & \mu \end{pmatrix} \ . \tag{2.63}$$

Als physikalische Massen erhält man:

$$\begin{aligned} M^2_{\tilde{C}^\pm_{1,2}} = \Big\{ & M^2_2 + \mu^2 + 2M^2_W \\ & \mp \sqrt{(M^2_2 - \mu^2)^2 + 4M^4_W \cos^2 2\beta + 4M^2_W(M^2_2 + \mu^2 + 2M_2\mu \sin 2\beta)} \Big\} \ , \end{aligned} \tag{2.64}$$

mit der Konvention $M^2_{\tilde{C}^\pm_1} \leq M^2_{\tilde{C}^\pm_2}$.

2.6.6 Die Neutralinomassen

Die Masseneigenzustände der neutralen Gauginos von $SU(2)_L \times U(1)_Y$ und Higgsinos nennt man dementsprechend Neutralinos $\tilde{N}^0_{1,2,3,4}$, deren Massenquadrate man durch Diagonalisieren der Matrix

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z \sin\theta_W \cos\beta & M_Z \sin\theta_W \sin\beta \\ 0 & M_2 & M_Z \cos\theta_W \cos\beta & -M_Z \cos\theta_W \sin\beta \\ -M_Z \sin\theta_W \cos\beta & M_Z \cos\theta_W \cos\beta & 0 & -\mu \\ M_Z \sin\theta_W \sin\beta & -M_Z \cos\theta_W \sin\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{2.65}$$

erhält, deren charakteristisches Polynom lautet

$$\begin{aligned} F(\lambda) =& \lambda^4 - (M_1 + M_2)\lambda^3 - (M_Z^2 + \mu^2 - M_1 M_2)\lambda^2 \\ &+ [(M_2 \sin^2\theta_W + M_1 \cos^2\theta_W - \mu \sin 2\beta) M_Z^2 + (M_1 + M_2)\mu^2]\lambda \\ &+ [(M_2 \sin^2\theta_W + M_1 \cos^2\theta_W)\mu M_Z^2 \sin 2\beta - M_1 M_2 \mu^2] \ , \end{aligned} \tag{2.66}$$

dessen Nullstellen i.a. nicht analytisch gefunden werden können.

2.6.7 Die Massen der Higgsbosonen

Der bosonische Teil des Higgs–Sektors des MSSM besteht aus 4 komplexen skalaren Feldern. Von diesen 8 Freiheitsgraden werden 3 durch den Higgs–Effekt im Eichsektor absorbiert. Die verbleibenden 5 Masseneigenzustände sind das CP–ungerade, neutrale Higgsboson A, die CP–geraden, neutralen h^0 und H^0 und die geladenen $H^\pm$. Die Massen lauten:

$$m_A^2 = -\frac{2\mu B}{\sin 2\beta} \ , \tag{2.67}$$

$$m_{h^0,H^0}^2 = \frac{1}{2}\left(m_A^2 + M_Z^2 \mp \sqrt{(m_A^2 + M_Z^2)^2 - 4 m_A^2 M_Z^2 \cos^2 2\beta} \right) \ , \tag{2.68}$$

$$m_{H^\pm}^2 = m_A^2 + M_W^2 \ . \tag{2.69}$$

Die untere experimentelle Grenze für das neutrale Higgs–Boson liegt bei ca. 77 GeV [50]. Gleichung (2.68) sagt aus, daß $m_{h^0}^{tree}$ immer kleiner als M_Z ist, so daß für das MSSM nicht mehr viel Parameterraum zu bleiben scheint. Aber wie schon in Abschnitt 2.5 erwähnt, müssen Quantenkorrekturen des Higgs-Potentials berücksichtigt werden, wie die Diskussion des Massenspektrums in Kapitel 4 zeigen wird. Die korrigierten Higgs–Massen können in der folgenden Form geschrieben werden [18]:

$$m_A^2 = -\frac{2\mu B + \Delta}{\sin 2\beta} \ , \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned} m_{h^0,H^0}^2 = \frac{1}{2}\Bigg(& M_Z^2 + m_A^2 + \Delta_{11} + \Delta_{22} \\ & \mp \sqrt{[\cos 2\beta (M_Z^2 - m_A^2) + \Delta_{11} - \Delta_{22}]^2 + [\sin 2\beta (M_Z^2 + m_A^2) - \Delta_{12}]^2} \Bigg) \ . \end{aligned} \tag{2.71}$$

Die Ausdrücke für die Δ's sind im Anhang C angegeben. Die Korrekturen der geladenen Higgs–Bosonen sind wesentlich kleiner [18], so daß sich der Aufwand der Berechnung im Rahmen dieser Arbeit nicht lohnt.

2.7 Die Renormierungsgruppengleichungen des MSSM

Das MSSM wird als eine effektive Niederenergietheorie betrachtet, die unterhalb einer hohen Energieskala gültig ist. Die ausgezeichnete Energieskala des MSSM ist nun $M_{GUT} \approx 2 \times 10^{16}$ GeV, das ist die Energie, bei der sich die drei Kopplungskonstanten vereinigen, siehe Abschnitt 2.7.1. Nimmt man oberhalb dieser Energieskala eine vereinigte Theorie, z.B. eine Stringtheorie an, so kann man Relationen für die weich brechenden Parameter bei M_{GUT} gewinnen. Um nun aber Vergleiche mit dem Experiment durchführen zu können, müssen diese Parameter auf die entsprechende niedrige Energieskala, hier die schwache Energieskala $M_Z = 91.187$ GeV, mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichungen (RGE) des MSSM übersetzt werden. In dieser Arbeit werden 1–loop RGE verwendet, deren allgemeine Form z.B. [6] entnommen werden kann. Weil hier aber der Parameterraum des MSSM durch M–Theorie (siehe Kapitel 3) und durch vereinfachende Annahmen (siehe Abschnitt 2.6.1) eingeschränkt wird, reduziert sich die Anzahl der benötigten RGE dementsprechend. Nur diese sollen im Folgenden dargestellt werden.

2.7.1 Die Eichkopplungen

Die folgenden RGE beschreiben die Entwicklung der Eichkopplungen von M_{GUT} zu einer Energieskala Λ. Benutzt man die Parametrisierung $t = -2\ln\frac{\Lambda}{M_{GUT}}$ und definiert $\tilde{\alpha}_i = \frac{g_i^2}{(4\pi)^2}$ dann lauten die RGE:

$$\frac{d\tilde{\alpha}_i}{dt} = -b_i\tilde{\alpha}_i^2 , \qquad (2.72)$$

mit den Gruppenfaktoren[8]

	SM	MSSM
b_3	-7	-3
b_2	$-\frac{19}{6}$	1
b_1	$\frac{41}{6}$	11

. (2.73)

Wie man sieht, ist die $SU(2)$ Kopplung im MSSM nicht asymptotisch frei. Durch Trennung der Variablen kann man leicht die Lösung von (2.72) finden:

$$\tilde{\alpha}_i(t) = \frac{\tilde{\alpha}_i(0)}{1+\tilde{\alpha}_i(0)b_i t} . \qquad (2.74)$$

Zur Bestimmung von M_{GUT} im MSSM verwendet man nun die experimentellen Daten [21] $M_Z = 91.187$ GeV, $\sin^2\theta_W(M_Z) = 0.2315$ und $\alpha_{em}(M_Z) = \frac{1}{128}$, sowie die Beziehungen $\alpha_1 = \frac{\alpha_{em}}{\cos^2_{\theta_W}}$ und $\alpha_2 = \frac{\alpha_{em}}{\sin^2_{\theta_W}}$. Anhand der Lösungen (2.74) berechnet man den Schnittpunkt von α_1 und α_2. Ausgehend von diesem Schnittpunkt erhält man wiederum unter Verwendung von (2.74) $\alpha_3(M_Z) = 0.116$, was in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert $\alpha_3(M_Z) = 0.118 \pm 0.003$ ist. M_{GUT} ist im MSSM also tatsächlich die Energieskala der Vereinigung der 3 Eichkopplungen und die Ergebnisse lauten:

$$\alpha_{GUT} = \alpha_3(0) = \alpha_2(0) = \frac{5}{3}\alpha_1(0) \approx \frac{1}{25} \qquad (2.75)$$

[8] b_1 ist in der $U(1)_Y$ Normierung angegeben. Die Umrechnung in die GUT-Normierung erfolgt gemäß $b' = \frac{3}{5}b_1$.

bei

$$M_{GUT} \approx 2 \times 10^{16} GeV \ . \tag{2.76}$$

Führt man diese Rechnug im SM durch, so stellt man fest, daß die experimentellen Daten eine Vereinigung der Eichkopplungen ausschließen! Deshalb ist eine Einbettung des SM in eine GUT–Theorie nicht ohne weiteres möglich, ein weiteres wichtiges Argument für das MSSM. In den Abbildungen 2.1 und 2.2 sind die Entwicklungen der α_i für das SM bzw. das MSSM dargestellt.

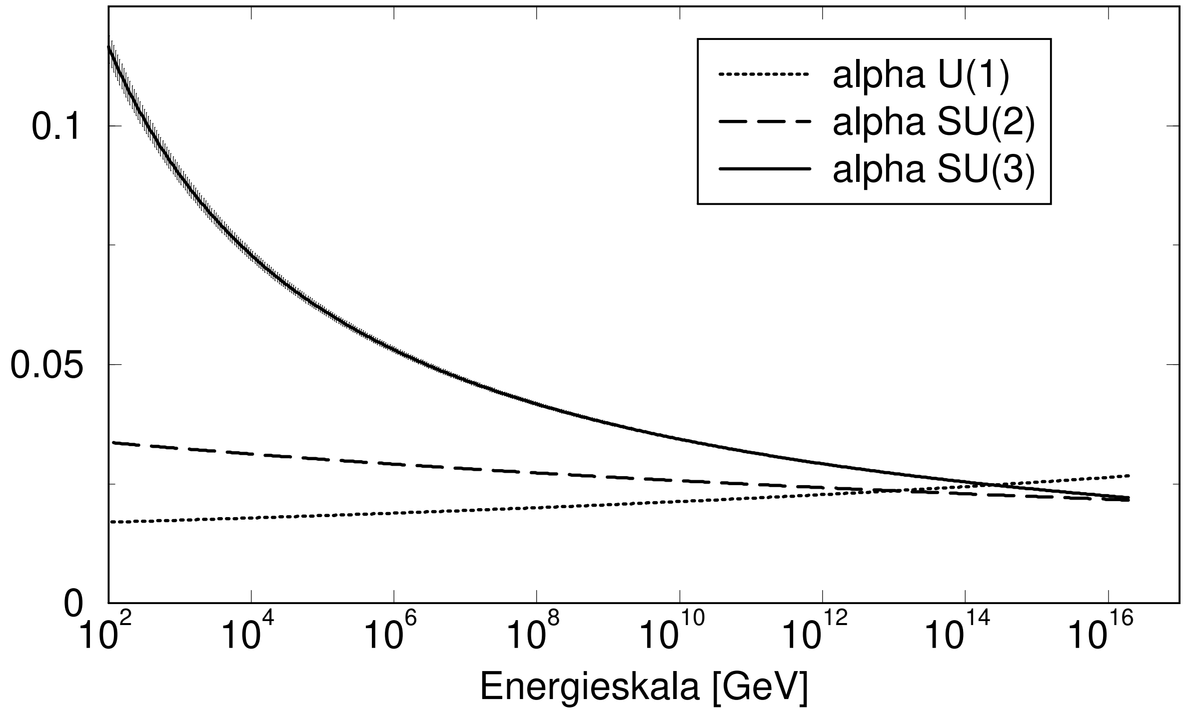

Abbildung 2.1: Die Entwicklung der drei Eichkopplungen im SM ausgehend von den experimentellen Werten bei M_Z mit α_1 in GUT-Normierung. Die schraffierte Fläche um α_3 gibt den experimentellen Fehler $\alpha_3(M_Z) = 0.118 \pm 0.003$ wieder. Die Fehler der anderen beiden Eichkopplungen sind kleiner als die Linienbreite.

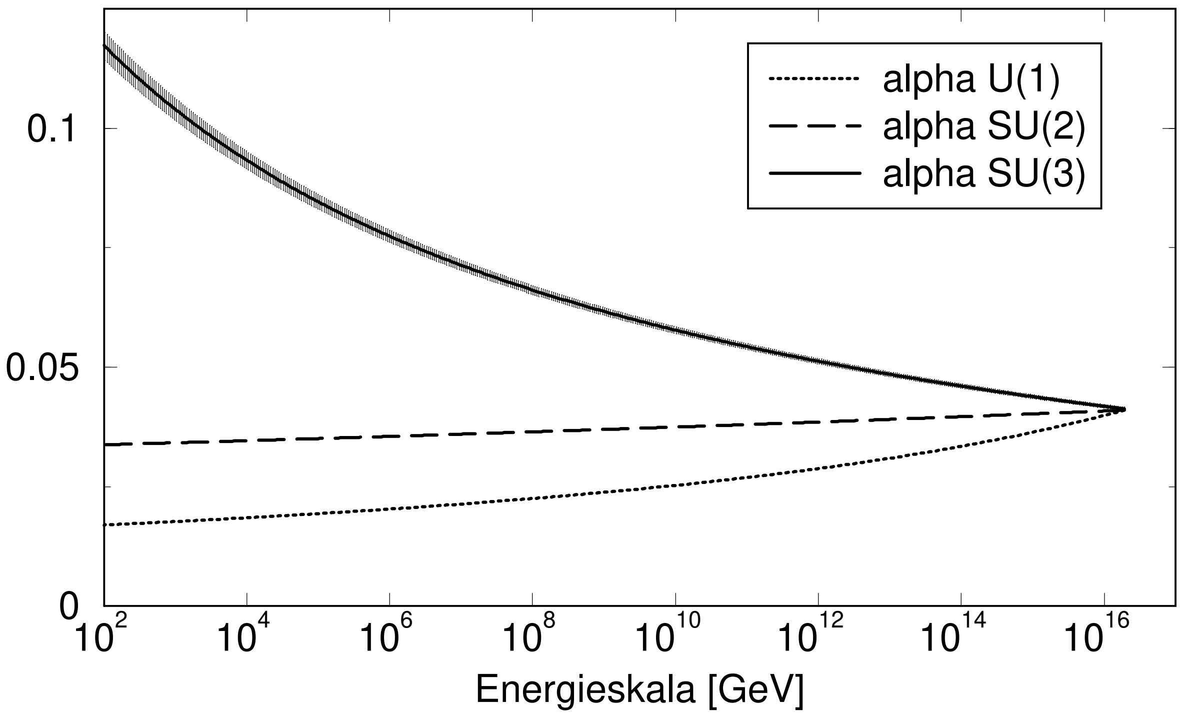

Abbildung 2.2: Wie Abb. 2.1 für das MSSM

2.7.2 Die Gauginomassen

Die RGE für die Massen der Gauginos

$$\frac{dM_i}{dt} = -b_i \tilde{\alpha}_i M_i \tag{2.77}$$

können ebenso einfach gelöst werden:

$$M_i(t) = \frac{M_{1/2}}{1 + \tilde{\alpha}_i(0) b_i t} \tag{2.78}$$

mit $M_{1/2} = M_i(0)$. Die Gauginomassen entwickeln sich also genauso wie die Eichkopplungen, so daß eine gesonderte graphische Darstellung der Lösung nicht nötig ist.

2.7.3 Die Yukawa–Kopplungen

Mit der Substitution $h_{t,b,\tau} = (\frac{y_{t,b,\tau}}{4\pi})^2$ lauten die RGE für die Yukawa–Kopplungen:

$$\frac{dh_t}{dt} = h_t \left(\frac{16}{3}\tilde{\alpha}_3 + 3\tilde{\alpha}_2 + \frac{13}{9}\tilde{\alpha}_1 - 6h_t - h_b \right) , \tag{2.79}$$

$$\frac{dh_b}{dt} = h_b \left(\frac{16}{3}\tilde{\alpha}_3 + 3\tilde{\alpha}_2 + \frac{7}{9}\tilde{\alpha}_1 - h_t - 6h_b - h_\tau \right) , \tag{2.80}$$

$$\frac{dh_\tau}{dt} = h_\tau \left(3\tilde{\alpha}_2 + 3\tilde{\alpha}_1 - 3h_b - 4h_\tau \right) . \tag{2.81}$$

Dieses gekoppelte System von Differentialgleichungen kann, ebenso wie die folgenden, i.a. nicht analytisch gelöst werden.

2.7.4 Die A–Parameter

Die Entwicklung der A–Parameter ist gegeben durch die folgenden RGE:

$$\frac{dA_t}{dt} = \frac{16}{3}\tilde{\alpha}_3 M_3 + 3\tilde{\alpha}_2 M_2 + \frac{13}{9}\tilde{\alpha}_1 M_1 - 6h_t A_t - h_b A_b \;, \tag{2.82}$$

$$\frac{dA_b}{dt} = \frac{16}{3}\tilde{\alpha}_3 M_3 + 3\tilde{\alpha}_2 M_2 + \frac{7}{9}\tilde{\alpha}_1 M_1 - h_t A_t - 6h_b A_b - h_\tau A_\tau \;, \tag{2.83}$$

$$\frac{dA_\tau}{dt} = 3\tilde{\alpha}_2 M_2 + 3\tilde{\alpha}_1 M_1 - 3h_b A_b - 4h_\tau A_\tau \;. \tag{2.84}$$

2.7.5 Die μ– und B–Parameter

Die Parameter μ und B entwickeln sich gemäß:

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu\left[\frac{3}{2}\tilde{\alpha}_2 + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1 - \frac{1}{2}(3h_t + 3h_b + h_\tau)\right] \;, \tag{2.85}$$

$$\frac{dB}{dt} = 3\tilde{\alpha}_2 M_2 + \tilde{\alpha}_1 M_1 - 3h_t A_t - 3h_b A_b - h_\tau A_\tau \;. \tag{2.86}$$

2.7.6 Die skalaren Massen

Aufgrund der Annahmen in 2.6.1 enthalten die RGE der Sfermionen der ersten beiden Generationen keine Beiträge durch Yukawa–Kopplungen und A–Parameter und haben folgende Gestalt[9]:

$$\frac{dm^2_{\tilde{q}_{1,2}}}{dt} = \frac{16}{3}\tilde{\alpha}_3 M_3^2 + 3\tilde{\alpha}_2 M_2^2 + \frac{1}{9}\tilde{\alpha}_1 M_1^2 - \frac{1}{6}\tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \;, \tag{2.87}$$

$$\frac{dm^2_{\tilde{u},\tilde{c}}}{dt} = \frac{16}{3}\tilde{\alpha}_3 M_3^2 + \frac{16}{9}\tilde{\alpha}_1 M_1^2 + \frac{2}{3}\tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \;, \tag{2.88}$$

$$\frac{dm^2_{\tilde{d},\tilde{s}}}{dt} = \frac{16}{3}\tilde{\alpha}_3 M_3^2 + \frac{4}{9}\tilde{\alpha}_1 M_1^2 - \frac{1}{3}\tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \;, \tag{2.89}$$

$$\frac{dm^2_{\tilde{l}_{1,2}}}{dt} = 3\tilde{\alpha}_2 M_2^2 + \tilde{\alpha}_1 M_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \;, \tag{2.90}$$

$$\frac{dm^2_{\tilde{e},\tilde{\mu}}}{dt} = 4\tilde{\alpha}_1 M_1^2 - \tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \;, \tag{2.91}$$

mit

$$\mathrm{Tr}\{Ym^2\} = \sum_{i=1}^{3}(m^2_{\tilde{q}_i} - 2m^2_{\tilde{u}_i} + m^2_{\tilde{d}_i} - m^2_{\tilde{l}_i} + m^2_{\tilde{e}_i}) + m^2_{H_u} - m^2_{H_d} \;. \tag{2.92}$$

Der Term (2.92) tritt nur auf, falls man Nicht–Universalität der skalaren Massen bei M_{GUT} zulassen möchte. In einer anomaliefreien Theorie verschwindet dieser Term, falls alle Massen auf irgendeiner Energieskala identisch sind, denn in einem solchen Fall gilt wegen des Verschwindens der gravitativen Anomalie $\mathrm{Tr}\{Ym^2\} = m^2\mathrm{Tr}\{Y\} = 0$. Um auch $d\mathrm{Tr}\{Ym^2\}/dt = 0$ zu

[9]Die Händigkeiten der Superpartner sind im Folgenden der Übersichtlichkeit halber weggelassen und ergeben sich aus dem Kontext

zeigen, benötigt man die Bedingung der Auslöschung der $U(1)$ Anomalie $\mathrm{Tr}\{Y^3\} = 0$ [9]. Ohne diesen Term wären die obigen RGE übrigens analytisch lösbar [36]. Die RGE der skalaren Massen der 3. Generation und der Higgs–Massenparameter lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{dm^2_{\tilde{q}_3}}{dt} &= \frac{16}{3}\tilde{\alpha}_3 M_3^2 + 3\tilde{\alpha}_2 M_2^2 + \frac{1}{9}\tilde{\alpha}_1 M_1^2 - h_t(m^2_{\tilde{q}_3} + m^2_{\tilde{t}} + m^2_{H_u} + A_t^2) \\
&\quad - h_b(m^2_{\tilde{q}_3} + m^2_{\tilde{b}} + m^2_{H_d} + A_b^2) - \frac{1}{6}\tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \ , \qquad (2.93)
\end{aligned}$$

$$\frac{dm^2_{\tilde{t}}}{dt} = \frac{16}{3}\tilde{\alpha}_3 M_3^2 + \frac{16}{9}\tilde{\alpha}_1 M_1^2 - 2h_t(m^2_{\tilde{q}_3} + m^2_{\tilde{t}} + m^2_{H_u} + A_t^2) + \frac{2}{3}\tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \ , \qquad (2.94)$$

$$\frac{dm^2_{\tilde{b}}}{dt} = \frac{16}{3}\tilde{\alpha}_3 M_3^2 + \frac{4}{9}\tilde{\alpha}_1 M_1^2 - 2h_b(m^2_{\tilde{q}_3} + m^2_{\tilde{b}} + m^2_{H_d} + A_b^2) - \frac{1}{3}\tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \ , \qquad (2.95)$$

$$\frac{dm^2_{\tilde{l}_3}}{dt} = 3\tilde{\alpha}_2 M_2^2 + \tilde{\alpha}_1 M_1^2 - h_\tau(m^2_{\tilde{l}_3} + m^2_{\tilde{\tau}} + m^2_{H_d} + A_\tau^2) + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \ , \qquad (2.96)$$

$$\frac{dm^2_{\tilde{\tau}}}{dt} = 4\tilde{\alpha}_1 M_1^2 - 2h_\tau(m^2_{\tilde{l}_3} + m^2_{\tilde{\tau}} + m^2_{H_d} + A_\tau^2) - \tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \ , \qquad (2.97)$$

$$\frac{dm^2_{H_u}}{dt} = 3\tilde{\alpha}_2 M_2^2 + \tilde{\alpha}_1 M_1^2 - 3h_t(m^2_{\tilde{q}_3} + m^2_{\tilde{t}} + m^2_{H_u} + A_t^2) - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \ , \qquad (2.98)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dm^2_{H_d}}{dt} &= 3\tilde{\alpha}_2 M_2^2 + \tilde{\alpha}_1 M_1^2 - 3h_b(m^2_{\tilde{q}_3} + m^2_{\tilde{b}} + m^2_{H_d} + A_b^2) \\
&\quad - h_\tau(m^2_{\tilde{l}_3} + m^2_{\tilde{\tau}} + m^2_{H_d} + A_\tau^2) + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1 \mathrm{Tr}\{Ym^2\} \ . \qquad (2.99)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle kann nun der Mechanismus der elektroschwachen Symmetriebrechung im MSSM gut eingesehen werden. Bei M_{GUT} mag zwar $m^2_{H_u} = m^2_{H_d} > 0$ gegeben sein und somit keine spontane Symmetriebrechung vorliegen, betrachtet man jedoch (2.98) und (2.99), so erkennt man, daß eine dominante top–Yukawa–Kopplung zu $m^2_{H_u} < m^2_{H_d}$ führt. Bei geeigneter Wahl der Parameter erreicht man nun, daß $m^2_{H_u} + \mu^2 < 0$ und gleichzeitig $m^2_{H_d} + \mu^2 > 0$ bei M_Z gelten und die Minimierungsbedingungen aus Abschnitt 2.5 erfüllt sind.

Damit steht nun das Handwerkszeug zur Verfügung, das benötigt wird, um phänomenologische Konsequenzen einer oberhalb von M_{GUT} gültigen vereinigten Theorie, wie z.B. der im nächsten Kapitel vorgestellten M–Theorie zu diskutieren.

Kapitel 3

Stringtheorie, M–Theorie und die weich brechenden Parameter

Bis heute existiert noch keine eindeutige Definition des Begriffes M–Theorie [51, 49]. U.a. steht der Name für die übergeordnete Theorie, die alle Superstringtheorien als unterschiedliche Vakua enthält, die wiederum durch Dualitätstransformationen ineinander übergehen. Der Begriff wird aber auch für die $E_8 \times E_8$ heterotische Stringtheorie oder die Typ IIA Stringtheorie im Falle starker Stringkopplung verwendet [34, 33]. Dahinter steht das Bild, daß das Dilaton der Stringtheorie der Länge einer kompakten elften Dimension entspricht und so — über den Erwartungswert des Dilatons — die Stringkopplung mit der Länge der kompakten elften Dimension zusammenhängt. Bei schwacher Stringkopplung ist die elfte Dimension unsichtbar und es liegt die $E_8 \times E_8$ heterotische Stringtheorie bzw. die Typ IIA Stringtheorie in $D = 10$ vor.

Wenn im Folgenden von M–Theorie die Rede ist, dann ist immer M–Theorie auf $S^1/\mathbb{Z}_2$ gemäß [34, 33], d.h. die effektive Feldtheorie des stark gekoppelten $E_8 \times E_8$ heterotischen Strings bzw. deren Kompaktifizierungen gemeint.

Zunächst werden im Abschnitt 3.1 kurz die Grundlagen der Supergravitation (SUGRA) [43] rekapituliert. In den nächsten beiden Abschnitten werden Kompaktifizierungen nach $D = 4$ im schwach gekoppelten und im M–Theorie–Fall skizziert, wobei im Wesentlichen die Vorgehensweise und Resultate aus [52, 47, 46] zusammengefaßt werden. Aus diesen Ergebnissen werden im Abschnitt 3.4 Relationen für einige der in Abschnitt 2.3 ad hoc eingeführten weich brechenden Parameter gewonnen, die z.T. [10] entnommen werden können. Im letzten Abschnitt schließlich erfolgt eine kurze Diskussion dieser Relationen.

3.1 $N = 1$ Supergravitation in $D = 4$

Das MSSM ist eine Theorie mit *lokaler* Symmetriegruppe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ und *globaler* Supersymmetrie, d.h. der antikommutierende Parameter ξ_α der SUSY–Transformationen ist raumzeitunabhängig. Der nichtverschwindende Antikommutator der SUSY–Algebra (2.2) kann mit Hilfe des Parameters ξ_α in einen Kommutator umgeschrieben werden:

$$[\xi Q, \bar{Q}\bar{\xi}] = 2\xi\sigma^\mu\bar{\xi}P_\mu \ . \tag{3.1}$$

Betrachtet man nun lokale SUSY, also $\xi_\alpha = \xi_\alpha(x)$, so erkennt man, daß das Produkt zweier lokaler SUSY–Transformationen zu einer raumzeitabhängigen Translation führt, was aber nichts anderes als eine allgemeine Koordinatentransformation ist. An dieser Stelle kann man also schon erkennen, daß lokale Supersymmetrie Gravitation beinhaltet. Durch genauere Betrachtung wird diese Vermutung bestätigt [43], denn um die zusätzlichen, wegen $\partial_\mu \xi_\alpha$ entstehenden Terme zu kompensieren, muß man ein Spin–3/2 Feld (Gravitino) und ein Spin–2 Feld (Graviton) einführen.

In globaler SUSY lautet die allgemeinste Lagrangedichte für die Wechselwirkung von chiralen und Vektorsuperfeldern [43]

$$L_{allg} = \int \mathrm{d}^2\theta (f_{ab}(\Phi) W^{a\alpha} W^b{}_\alpha + \text{h.c.}) + \int \mathrm{d}^4\theta J(\Phi^\dagger e^{2gV}, \Phi) + \int \mathrm{d}^2\theta (\mathcal{W}(\Phi) + \text{h.c.}) \ , \quad (3.2)$$

dabei sind die eichkinetische Funktion f_{ab}, die Funktion J und das Superpotential $\mathcal{W}$ nur durch ihre Argumente spezifiziert, d.h. f_{ab} und $\mathcal{W}$ sind holomorphe Funktionen chiraler Superfelder und J ist eine Funktion von Φ und $\Phi^\dagger e^{2gV}$. Die Indizes a, b sind Indizes der adjungierten Darstellung der Eichgruppe. In (3.2) wurde gegenüber. (2.18) die Forderung der Renormierbarkeit fallengelassen, weil die Supergravitation angekoppelt werden soll, die selbst nichtrenormierbar ist. Der Lagrangian (3.2) ist nur dann renormierbar, falls $f_{ab}(\Phi) = f\delta_{ab}$ mit einer Konstanten f, falls $J(\Phi^\dagger e^{2gV}, \Phi) = \Phi^\dagger e^{2gV}\Phi$ und falls das Superpotential $\mathcal{W}(\Phi)$ ein Polynom höchstens dritter Ordnung ist. Beim Übergang zu lokaler SUSY fordert man nun, daß alle nichtrenormierbaren Terme die Kopplungskonstante der Gravitation enthalten und im sogenannten flachen Limes ($M_P \to \infty$) verschwinden. Dabei verlieren die Funktionen J und $\mathcal{W}$ ihre unabhängige Bedeutung und die Lagrangedichte hängt nur noch von zwei Funktionen lediglich der skalaren Felder ϕ^* und ϕ ab: Von der eichkinetischen Funktion $f_{ab}(\phi)$ und der Kähler–Funktion $G(\phi^*, \phi)$, die definiert ist durch[1]

$$G = K + \ln |\mathcal{W}|^2 \ , \quad (3.3)$$

mit dem Kähler–Potential $K = -3\ln(-\frac{1}{3}J)$. Die Entwicklung des SUGRA Lagrangians und der SUSY Transformationen in Komponentenfeldern würde hier zu weit führen und kann der Literatur entnommen werden [43, 3, 5].

Etwas genauer soll auf die Brechung der Supersymmetrie eingegangen werden. Diese tritt genau dann auf, wenn mindestens ein Hilfsfeld einen nichtverschwindenden VEV besitzt[2]. Die Hilfsfelder der chiralen Multipletts lauten

$$F_i = e^{G/2} (G^j_i)^{-1} G_j + \text{fermionische Terme} \ , \quad (3.4)$$

die der Vektormultipletts

$$D_a = ig \ \mathrm{Re}\ f^{-1}_{ab} G^i (T^b)^j_i \phi_j + \text{fermionische Terme} \ , \quad (3.5)$$

mit $G^i = \partial G/\partial\phi_i$ und $G^i_j = \partial^2 G/\partial\phi_i \partial\phi^{*j}$. Die Energieskala der SUSY–Brechung M_S^2 ist dann gegeben durch $\langle F \rangle$ bzw. $\langle D \rangle$. Die fermionischen Terme können nichtverschwindende VEVs erhalten, wenn es in Anwesenheit einer starken Eichkopplung zur Bildung von bilinearen Fermion–Antifermion Kondensaten kommt. Diese Möglichkeit soll hier nicht weiter betrachtet werden, außerdem soll im Folgenden reine F–Term Brechung angenommen werden. Welcher

[1] An den Nullstellen des Superpotentials ist G nicht wohldefiniert, aber dieser Fall soll hier nicht betrachtet werden.

[2] Da dieses Kriterium eine unmittelbare Folge der Algebra ist, bleibt es auch bei lokaler Supersymmetrie gültig.

Faktor im ersten Term in (3.4) ist dann für die SUSY–Brechung entscheidend? Der Faktor $e^{G/2}$ verschwindet nur an den Nullstellen des Superpotentials, die hier nicht betrachtet werden sollen. Mit dem Faktor G_i^j würde auch der dynamische Term der skalaren Felder im Lagrangian verschwinden und die Theorie somit inkonsistent werden. Also bleibt der Faktor G^i, der darüber entscheidet, ob die lokale SUSY gebrochen ist oder nicht. An dieser Stelle ist es interessant, das skalare Potential zu betrachten, das ohne D–Terme lautet:

$$V = e^G \left[G_i (G^{-1})^i_j G^j - 3 \right] \ . \tag{3.6}$$

Angenommen, man befinde sich am Minimum des skalaren Potentials. Führt man nun eine Redefinition der Felder durch, so daß die kinetischen Terme kanonische Form annehmen, d.h. $G^i_j = \delta^i_j$ und $f_{ab} = \delta_{ab}$ und fordert man $\langle V \rangle = 0$, so erhält man die Aussage $\langle G_i G^i \rangle = 3$, d.h. gebrochene SUSY bei verschwindender Vakuumenergie. Dies ist in Modellen mit globaler Supersymmetrie nicht möglich. Durch die Brechung der lokalen SUSY wird ein Massenterm für das Gravitinio erzeugt (Super–Higgseffekt)

$$m_{3/2} = \frac{M_{Planck}}{\sqrt{8\pi}} e^{\langle G \rangle /2} \ . \tag{3.7}$$

Durch geeignete Linearkombination der Felder kann man erreichen, daß nur ein G_i einen VEV besitzt und man erhält die Deser–Zumino Relation

$$m_{3/2} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{M_S^2}{M_{Planck}} \ . \tag{3.8}$$

Bei einer geeigneten Skala der SUSY–Brechung M_S kann man somit eine Gravitino–Masse im TeV–Bereich erhalten

Die Summenregel der Massen (2.28) bedeutet in Modellen mit globaler SUSY eine starke Einschränkung an die Phänomenologie. In SUGRA–Theorien ist nun folgendes möglich: Das niederenergetische Teilchenspektrum, z.B. gegeben durch das MSSM, bildet den beobachtbaren Sektor. Im versteckten Sektor, der sehr schwere Teilchen enthält, wird die SUSY gebrochen, z.B. durch Gaugino–Kondensation [23]. Durch Übertragung der SUSY–Brechung durch eine sehr schwache Wechselwirkung — der Gravitation — kann nun im beobachtbaren Sektor eine phänomenologisch akzeptable Aufspaltung der Massen im TeV–Bereich generiert werden.

3.2 Der schwach gekoppelte $E_8 \times E_8$ heterotische String

Modelle, die auf dem $E_8 \times E_8$ heterotische String basieren, sind phänomenologisch besonders interessant, da es z.B. möglich ist, im niederenergetischen Limes eine $N = 1$ supersymmetrische[3] effektive Feldtheorie in $D = 4$ mit der Eichgruppe des SM und chiralen Fermionen zu erhalten. In diesem und im nächsten Abschnitt werden im Wesentlichen die Methoden und Ergebnisse aus [47] zusammengefaßt.

Der bosonische Teil des Lagrangians der effektiven Feldtheorie in $D = 10$ lautet [46]:

$$L = -\frac{4}{(\alpha')^3} \int \mathrm{d}^{10}x \sqrt{g} e^{-2\phi} \left(\frac{1}{\alpha'} R + \frac{1}{4} \mathrm{Tr} F^2 + \frac{1}{12} \alpha' H^2 + \dots \right) \ , \tag{3.9}$$

[3] Nur mit $N = 1$ und $N = 0$ sind chirale Fermionen in $D = 4$ möglich.

mit dem Dilaton ϕ, dem Krümmungsskalar R, der Eichfeldstärke F und der 3–Form Feldstärke

$$H = \mathrm{d}B + \omega^{YM} - \omega^{L} \ , \tag{3.10}$$

die wiederum die 2–Form B sowie den Yang–Mills Chern–Simons Term

$$\omega^{YM} = \mathrm{Tr}(AF - \frac{2}{3}A^3) \tag{3.11}$$

und den Lorentz Chern–Simons Term

$$\omega^{L} = \mathrm{Tr}(\omega R - \frac{2}{3}\omega^3) \tag{3.12}$$

enthält. Dabei ist ω die Spin–connection und A die Eichfeldstärke.

An dieser Stelle ist es interessant, den Zusammenhang der Eich– und Gravitations–Kopplungskontanten zu diskutieren. Kompaktifiziert man von $D = 10$ nach $D = 4$ auf einer Calabi–Yau Mannigfaltigkeit mit Volumen V, so erhält man

$$L = -\frac{4}{(\alpha')^3}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}e^{-2\phi}V\left(\frac{1}{\alpha'}R + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}F^2 + \ldots\right) \ , \tag{3.13}$$

mit $N = 1$ Supersymmetrie. Mit dem Zusammenhang zwischen Newtons und Einsteins Kopplungskonstanten der Gravitation G_N und κ_4 in 4 Dimensionen

$$G_N = \frac{\kappa_4^2}{8\pi} = \frac{1}{M_{Planck}^2} \tag{3.14}$$

erhält man die Beziehung

$$G_N = \frac{(\alpha')^4}{64\pi V}e^{2\phi} \ . \tag{3.15}$$

Aus Gleichung (3.13) erhält man außerdem

$$\alpha_{GUT} = \frac{(\alpha')^3}{16\pi V}e^{2\phi} \tag{3.16}$$

und somit

$$G_N = \frac{\alpha_{GUT}\alpha'}{4} \ . \tag{3.17}$$

Setzt man nun die experimentellen Werte $M_{Planck} \approx 1.2 \times 10^{19}$ GeV und $\alpha_{GUT} \approx 1/25$ (aus der Extrapolation der gemessenen Kopplungen) ein, so erhält man einen Wert für die Stringskala $M_{String} = (\alpha')^{-1/2} \approx 1.2 \times 10^{18}$ GeV. Somit liegt M_{String} signifikant höher als die GUT–Skala $M_{GUT} \approx 2 \times 10^{16}$ GeV.

Nun soll die Kompaktifizierung von $D = 10$ nach $D = 4$ skizziert werden, eine ausführliche Darstellung findet man in [45, 52]. Die Kompaktifizierung auf einer Calabi–Yau Mannigfaltigkeit ist technisch aufwendig, deshalb soll hier nach der einfacheren Methode der „Reduktion und Trunkierung“ vorgegangen werden, die das gleiche Ergebnis liefert. Im Folgenden sind $M, N, \ldots = 1, \ldots, 10$ zehndimensionale Indizes, $m, n, \ldots = 5, \ldots, 10$ sind Indizes der kompakten Dimensionen und $\mu, \nu, \ldots = 1, \ldots, 4$ indizieren die Raumzeit in $D = 4$. Man fordert nun, daß alle Feldern invariant sind unter Translationen der kompakten Koordinaten x^m. Dies ist nichts anderes als eine Kompaktifizierung auf einem Torus T^6 und man erhält eine $N = 4$ supersymmetrische Theorie in vier Dimensionen. Die Rotationsgruppe der x^m ist $SO(6)$ oder $SU(4)$, unter der die vier Superladungen Q^I als $\mathbf{4}$ transformieren. Nun wählt man eine $SU(3)$ Untergruppe der $SU(4)$, unter der die x^m als $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ und die Q^I als $\mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$ transformieren und fordert, daß alle Felder außerdem invariant sind unter $SU(3)$ Rotationen der x^m. Dadurch überlebt nur eine Superladung (das Singulett) und die SUSY wird zu $N = 1$ heruntergebrochen.

Dieses Verfahren basiert auf dem Ansatz für die Metrik[4]

$$g_{MN}^{(10)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{-3\sigma} g_{\mu\nu}^{(4)} & * \\ \hline * & e^{\sigma}\delta_{mn} \end{array} \right) . \tag{3.18}$$

In $D = 10$ sind die bosonischen Felder des gravitativen Sektors das Graviton $g_{MN}^{(10)}$, das antisymmetrische Tensorfeld B_{MN} und das Dilaton ϕ. In $D = 4$ erhält man also zusätzlich das skalare Feld σ, wobei e^{σ} den mittleren Radius der kompakten Mannigfaltigkeit beschreibt. Außerdem erhält man zwei Pseudoskalare, eines aus dem Ansatz $B_{mn} = \epsilon_{mn} b$ mit dem $SU(3)$ invarianten Tensor ϵ_{mn}, der gegeben ist durch $\epsilon_{56} = \epsilon_{78} = \epsilon_{9\,10} = 1$ und Antisymmetrie, die übrigen Einträge sind Null. Das zweite Pseudoskalar a ist definiert durch eine Dualitäts–Transformation $\phi^{-3/2} e^{6\sigma} H_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \partial^{\tau} a$.

Auf diese Weise erhält man aus den Eichfeldern A_M in $D = 10$ lediglich die Eichfelder A_{μ} in 4 Dimensionen, denn die Skalare A_m werden eliminiert, da sie unter der $SU(3)$ als $\mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ transformieren. Außerdem bleibt in $D = 4$ die Eichgruppe $E_8 \times E_8$ ungebrochen, so daß man keine chiralen Fermionen erhalten kann.

Ein wesentlich interessanteres Resultat ergibt sich, wenn man eine Untergruppe $\widetilde{SU(3)}$ einer E_8 wählt und Invarianz aller Felder unter der diagonalen Gruppe $SU(3) \oplus \widetilde{SU(3)}$ fordert. Man erhält eine $N = 1$ supersymmetrische Theorie in $D = 4$ mit verbleibender Eichgruppe $S \times E_8$, wobei S die maximale Untergruppe von E_8 ist, die mit $\widetilde{SU(3)}$ kommutiert, also $S = E_6$. Dies ist die Eichgruppe des beobachtbaren Sektors. Die Gruppe E_6 besitzt komplexe Darstellungen in $D = 4$, so daß chirale Fermionen möglich sind. Außerdem ist E_6 groß genug, um die Eichgruppe des SM zu beinhalten. Weiterhin existieren Linearkombinationen der A_m, die Singuletts unter $SU(3) \oplus \widetilde{SU(3)}$ sind, so daß die Theorie nun Skalare mit E_6 Quantenzahlen enthält. Diese sogenannten Materiefelder C_i transformieren als $\mathbf{27}$ der E_6, die durch i indiziert wird[5]. Dieses wichtige Ergebnis läßt sich an der Zerlegung der adjungierten Darstellung der E_8 bzgl. $E_6 \times SU(3)$ erkennen:

$$248 = (78, 1) + (27, 3) + (\overline{27}, \overline{3}) + (1, 8) \; . \tag{3.19}$$

Die obige Konstruktion, bei der die Spin–connection der $SU(3)$ mit den Eichfeldern der $\widetilde{SU(3)}$ identifiziert wird, nennt man die Standard–Einbettung der Spin–connection in die Eichgruppe. Dies ist gleichzeitig die einfachste Möglichkeit, die Konsistenzbedingung, daß die Bianchi–Identität

$$\mathrm{d}H = \mathrm{Tr} F \wedge F - \mathrm{Tr} R \wedge R \tag{3.20}$$

[4]Elemente in den Blöcken $(*)$ führen zu weiteren Eichbosonen und sollen hier nicht diskutiert werden.

[5]Im Falle des $SO(32)$ heterotischen Strings bricht die Eichgruppe nach $SO(26) \times U(1)$, aber die zusätzlichen Skalare bilden eine reelle Darstellung der $SO(26)$, so daß der Kontakt zur Phänomenologie auf diese Weise nicht möglich ist [45].

kohomolog verschwinden muß, zu erfüllen. Im Fall der Standard–Einbettung verschwindet nämlich $\mathrm{d}H$ sogar punktweise.

Der $D = 4$ Lagrangian kann auf seine Standardform gebracht werden, indem die zwei Skalare ϕ und σ und die zwei Pseudoskalare a und b folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$S = e^{3\sigma}\phi^{-3/4} + 3i\sqrt{2}a \tag{3.21}$$

$$T = e^{\sigma}\phi^{3/4} + i\sqrt{2}b + C_i^* C_i \ . \tag{3.22}$$

In der vierdimensionalen Theorie bezeichnet man nun S als das Dilaton– und T als das Modulusfeld. Die Kählerfunktion lautet

$$G = -\ln(S + S^*) - 3\ln(T + T^* - 2C_i^* C_i) + \ln|\mathcal{W}|^2 \tag{3.23}$$

mit dem Superpotential

$$\mathcal{W}(C) = d_{ijk} C_i C_j C_k \ , \tag{3.24}$$

wobei der Tensor dritter Stufe d_{ijk} total symmetrisch und invariant unter E_6 Transformationen ist. Die eichkinetische Funktion ist gegeben durch das Dilaton–Feld

$$f_{ab} = S\delta_{ab} \ , \tag{3.25}$$

so daß man redefinieren kann $f_{ab} = f\delta_{ab}$. Alle diese Ergebnisse gelten nur in führender Ordnung. Wie aber wirken sich 1–loop Korrekturen aus? Für das Superpotential existiert ein Nichtrenormierungs–Theorem, so daß $\mathcal{W}$ keine Korrekturen erhält. Auch die eichkinetische Funktion f wird durch ein solches Theorem vor Korrekturen geschützt, allerdings erst ab 2 loops [44]. Die 1–loop Korrekturen der eichkinetischen Funktion hängen zusammen mit dem Mechanismus der Auslöschung der Anomalie in der zehndimensionalen Theorie [11, 39]. Wichtig ist, daß die 1–loop Korrekturen beim schwach gekoppelten $E_8 \times E_8$ heterotischen String gegenüber der führenden Ordnung klein sind [47].

3.3 $E_8 \times E_8$ M–Theorie

Die effektive Wirkung der $E_8 \times E_8$ M–Theorie wurde in [33] konstruiert und in [12] wurden Korrekturen dieser Konstruktion gefunden. Der vollständige Ausdruck kann diesen Quellen entnommen werden. Hier sollen nur die Struktur und die im Folgenden benötigten Terme wiedergegeben werden:

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{\kappa^2}\int_{M^{11}} \mathrm{d}^{11}x\sqrt{g}\left(-\frac{1}{2}R - \frac{1}{48}G^2 - \dots\right) \\ & + \frac{1}{4\pi(4\pi\kappa^2)^{2/3}}\sum_{i=1}^{2}\int_{M_{10}^i} \mathrm{d}^{10}x\sqrt{g}\left(-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}F_i^2 - \dots\right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dabei ist κ die Einsteinsche Gravitationskonstante in elf Dimensionen. Dahinter steht nun folgendes Bild: Man geht von $D = 11$ SUGRA als effektiver Niederenergie-Feldtheorie der zugrundeliegenden M-Theorie aus. Der bosonische Feldgehalt ist durch die Metrik g_{MN} $(M, N, \ldots = 1, \ldots, 11)$ und die 3–Form C mit der zugehörigen Feldstärke G gegeben, ein Dilaton existiert nicht. Kompaktifiziert man auf einem Kreis S^1, so erhält man eine nichtchirale Theorie mit

$N = 2$ SUSY in $D = 10$, die effektive Feldtheorie des Typ IIA Superstrings. Betrachtet man die Theorie auf $M^{11} = M^{10} \times S^1/\mathbb{Z}_2$, so wird die Hälfte der Supersymmetrien gebrochen und es ergibt sich nach Kompaktifizierung eine chirale $N = 1$ Supergravitation in $D = 10$. Den Kreis S^1 kann man durch $\mathbb{R}$ parametrisieren, indem man die Punkte 0 und $2\pi\rho$ identifiziert, wobei ρ der Radius ist. Die $\mathbb{Z}_2$ Symmetrie wirkt dann gemäß $x^{11} \mapsto -x^{11}$, so daß $S^1/\mathbb{Z}_2$ einem kompakten Intervall I mit $0 \leq x^{11} \leq \pi\rho$ entspricht. $D = 11$ SUGRA auf $M^{10} \times S^1/\mathbb{Z}_2$ bedeutet also, daß die Supergravitation auf einer elfdimensionalen Mannigfaltigkeit mit zwei zehndimensionalen Rändern lebt, wobei die elfte Dimension durch das Intervall I aufgespannt wird[6]. $N = 1$ SUGRA in $D = 10$ ist aber nicht anomaliefrei [1]. Weil die elfdimensionale SUGRA, die die Physik zwischen den Rändern beschreibt, frei von Anomalien ist, müssen diese auf den Rändern lokalisiert sein, und zwar gleichverteilt, weil die Ränder lokal nicht unterscheidbar sind. Ein Teil der Anomalien kann durch einen verallgemeinerten Green–Schwarz Mechanismus [27] aufgehoben werden. Zur Auslöschung der restlichen Anomalien müssen 496 masselose Vektormultipletts, also auf jedem Rand 248, hinzugefügt werden. 248 ist aber die Dimension u.a. der Gruppe E_8, so daß, um den Zusammenhang mit einer der Superstringtheorien herstellen zu können, nur die $E_8 \times E_8$ als mögliche Eichgruppe übrigbleibt. Der Lagrangian (3.26) beschreibt die effektive Niederenergie–Feldtheorie des $E_8 \times E_8$ heterotischen Strings im Falle starker Stringkopplung, die mit der Länge des Intervalls I wächst.

Interessant ist es nun, die Stringskala abzuschätzen. Dazu kompaktifiziert man nach $D = 4$ auf der Mannigfaltigkeit[7] $M^4 \times CY^6 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ — dies entspricht der führenden Ordnung — und man erhält [53, 12]

$$G_N = \frac{\kappa_4^2}{8\pi} = \frac{1}{M_{Planck}^2} = \frac{\kappa^2}{8\pi R_{11} V} \tag{3.27}$$

und

$$\alpha_{GUT} = \frac{(4\pi\kappa^2)^{2/3}}{V} \;, \tag{3.28}$$

wobei V das Volumen der CY^6 und $R_{11} = \pi\rho$ die Länge des Intervalls I ist. Die Energieskala der Theorie in $D = 11$ ist $M_{11} = \kappa^{-2/9}$. Identifiziert man $V \approx (M_{GUT})^{-6}$ und verwendet $\alpha_{GUT} \approx \frac{1}{25}$, so ergibt sich

$$\frac{M_{11}}{M_{GUT}} \approx V^{1/6} M_{11} = (4\pi)^{1/9} (\alpha_{GUT})^{-1/6} \approx 2 \;, \tag{3.29}$$

also eine günstigere Situation als im schwach gekoppelten Fall. Auch über das Verhältnis der Länge des Intervalls I zum Durchmesser der CY^6 kann man eine Aussage machen. Gemäß Gleichung (3.27) kann nämlich die Kopplungskonstante der Gravitation durch Wahl von R_{11} an den experimentellen Wert angepaßt werden, es folgt

$$R_{11} = \frac{\alpha_{GUT}}{8\pi(4\pi)^{2/3}} \frac{M_{Planck}^2}{M_{11}^3} \approx \frac{\alpha_{GUT}}{8\pi(4\pi)^{2/3}} \frac{M_{Planck}^2}{(2.3 \times M_{GUT})^3} \approx 10^{15} \text{ GeV} \;, \tag{3.30}$$

[6] Dies ist das sogenannte „downstairs“ Bild. Zur Vereinfachung der Rechnung wird auch das „upstairs“ Bild verwendet, in dem man den ganzen Kreis — also auch die unphysikalische Hälfte — versehen mit zwei singulären Punkten verwendet. Dies hat in der Literatur zu einiger Verwirrung geführt, die in [12] aufgelöst werden konnte.

[7] CY^6 ist eine sechsdimensionale Calabi–Yau Mannigfaltigkeit mit Holonomiegruppe $SU(3)$.

d.h. der Durchmesser der CY^6 ist ungefähr eine Größenordnung kleiner als die Länge des Intervalls I. Diese – rein qualitative – Analyse ergibt also folgendes Bild: Unsere niederenergetische Welt ist vierdimensional, die Eichkopplungen entwickeln sich logarithmisch und die Kopplung der Gravitation nach einem Potenzgesetz. Bei $(R_{11})^{-1} < M_{GUT}$ erscheint eine kompakte fünfte Dimension, die von den Eichfeldern auf den vierdimensionalen Rändern nicht bemerkt wird, so daß die Entwicklung der Eichkopplungen sich nicht ändert, im Gegensatz zum Potenzgesetz der Entwicklung der gravitativen Kopplung, das nämlich stärker wird. Bei M_{GUT} wird die CY^6 sichtbar, d.h. die Theorie wird elfdimensional und die vereinigten Eichkopplungen entwickeln sich ebenfalls nach einem Potenzgesetz. Bei M_{11} schließlich erwartet man die Vereinigung der Eichkopplungs– mit der Gravitationskonstanten.

Um nun die Kähler–Funktion, die eichkinetische Funktion und das Superpotential der effektiven $N = 1$ Supergravitation in $D = 4$ in der führenden Ordnung zu erhalten, wird auf der Mannigfaltigkeit $M^4 \times CY^6 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ kompaktifiziert. In [47] wird wieder nach der Methode der Reduktion und Trunkierung vorgegangen und der Ansatz für die Metrik lautet:

$$g^{(11)}_{MN} = \begin{pmatrix} c_4 e^{-\gamma} e^{-2\sigma} g^{(4)}_{\mu\nu} & & \\ & e^{\sigma} g_{mn} & \\ & & e^{2\gamma} e^{-2\sigma} \end{pmatrix} , \tag{3.31}$$

mit $M, N = 1, \ldots, 11$; $\mu, \nu = 1, \ldots, 4$; $m, n = 5, \ldots, 10$; $\det(g_{mn}) = 1$ und dem Verhältnis $c_4 = V_7/V_{\hat{7}}$ des physikalischen zum Koordinatenvolumen der kompakten siebendimensionalen Mannigfaltigkeit. Neben den skalaren Feldern σ und γ kann man wieder zwei pseudoskalare Felder D und C_{11} einführen

$$\frac{1}{4! c_4} e^{6\sigma} G_{11\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \partial^{\tau} D , \tag{3.32}$$

$$C_{11a\bar{b}} = C_{11} \delta_{a\bar{b}} , \tag{3.33}$$

mit den holomorphen (antiholomorphen) Koordinaten x^a $(x^{\bar{b}})$ der Calabi–Yau Mannigfaltigkeit. Das Dilaton– bzw. Modulus–Feld lauten nun

$$S = \frac{1}{(4\pi)^{2/3}} \left(e^{3\sigma} + i 24\sqrt{2} D \right) , \tag{3.34}$$

$$T = \frac{1}{(4\pi)^{2/3}} \left(e^{\gamma} + i 6\sqrt{2} C_{11} \right) + C_i^* C_i , \tag{3.35}$$

so daß der Lagrangian wieder seine Standardform annimmt mit der Kählerfunktion

$$K = -\ln(S + S^*) - 3 \ln(T + T^* - 2C_i^* C_i) \tag{3.36}$$

und dem Superpotential

$$\mathcal{W} = d_{ijk} C_i C_j C_k . \tag{3.37}$$

Die eichkinetische Funktion ist wieder gegeben durch das Dilaton–Feld $f = S$. Diese Ergebnisse sind den Resultaten der führenden Ordnung im Falle schwacher Stringkopplung sehr ähnlich.

Wesentliche Unterschiede ergeben sich erst in höherer Ordnung [47]. Das Superpotential ist wieder vor Korrekturen geschützt und die eichkinetische Funktion erfährt Korrekturen höchstens erster Ordnung, die wieder eng mit der Auslöschung der Anomalien zusammenhängen. An dieser Stelle ist es wieder wichtig, festzulegen, auf welche Weise die Bianchi–Identität erfüllt wird. Im Falle schwacher Kopplung wurde das kohomologe Verschwinden von $\mathrm{d}H$ durch punktweise Identifizierung der Spin–connection mit den Eichfeldern erfüllt. Diese punktweise Identifizierung ist im stark gekoppelten Fall nicht durchführbar, weil hier die Eichgruppen räumlich getrennt auf den zwei Rändern leben. Die modifizierte Bianchi–Identität lautet

$$\mathrm{d}G \propto \sum_{i=1}^{2} \delta(x^{11} - x_i^{11}) \left(\mathrm{Tr}F_i^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}R^2 \right) , \tag{3.38}$$

wobei x_i^{11} die Position des i–ten Randes ist. Führt man nun die Standard–Einbettung durch, indem man $\mathrm{Tr}F_1^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}R^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}R^2$ auf dem einen und $\mathrm{Tr}F_2^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}R^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}R^2$ auf dem anderen Rand setzt, so erkennt man, daß $\mathrm{d}G$ auf beiden Rändern nichtverschwindende VEVs annimmt. Aus der SUSY Transformation des Gravitinos in $D = 11$

$$\delta\psi_M = D_M\eta + \frac{\sqrt{2}}{288} G^{NOPQ} \left(\Gamma_{MNOPQ} - 8 g_{MN}\Gamma_{OPQ}\right)\eta + \ldots \tag{3.39}$$

— die Punkte stehen für fermionische Terme — folgt dann, daß SUSY gebrochen ist, außer der VEV von G wird durch $D_M\eta$ kompensiert[8]. Witten hat eine solche Lösung für die erste Ordnung des Entwicklungsparameters $\kappa^{2/3}$ konstruiert [53] In dieser Näherung ist die Mannigfaltigkeit M^{11} nicht mehr ein direktes Produkt $M^4 \times CY^6 \times S^1/\mathbb{Z}_2$, da nun z.B. das Volumen der Calabi–Yau Mannigfaltigkeit von der Koordinate x^{11} abhängt, ebenso die Felder σ und γ. In [47] wird deshalb über das Intervall I gemittelt. Die Ergebnisse für das Dilaton– bzw. Modulus–Feld lauten:

$$S = \frac{1}{(4\pi)^{2/3}} \left(e^{3\bar{\sigma}} + i24\sqrt{2}\bar{D} \right) + \alpha C_i^* C_i , \tag{3.40}$$

$$T = \frac{1}{(4\pi)^{2/3}} \left(e^{\bar{\gamma}} + i6\sqrt{2}\bar{C}_{11} \right) + C_i^* C_i , \tag{3.41}$$

wobei die Balken über den Feldern andeuten, daß über das Intervall I gemittelt wurde und α ist eine Konstante $\sim \mathcal{O}(1)$, die durch die Auslöschung der Anomalien festgelegt ist. Die Kähler–Funktion lautet

$$K = -\ln(S + S^*) + \frac{2\alpha C_i^* C_i}{S + S^*} - 3\ln(T + T^* - 2C_i^* C_i) . \tag{3.42}$$

Für die eichkinetischen Funktionen, die auf den beiden Rändern verschieden sind, ergibt sich im Fall der Standard–Einbettung

$$f_{E_6} = S + \alpha T , \qquad f_{E_8} = S - \alpha T . \tag{3.43}$$

Alle diese Korrekturen existieren auch im Falle schwacher Kopplung. Entscheidend ist aber, daß die Korrekturen bei schwacher Kopplung zu vernachlässigen sind ($|\alpha T| \ll |S|$), wohingegen sie bei starker Kopplung wichtige Beiträge liefern ($|\alpha T| \sim |S|$).

[8] In (3.39) ist η der Parameter der SUSY Transformation und $\Gamma_{M_1 \ldots M_n} = \Gamma_{[M_1} \ldots \Gamma_{M_n]} = (1/n!)(\Gamma_{M_1} \ldots \Gamma_{M_n} \pm \text{Permutationen})$ sind die antisymmetrisierten Produkte der Gamma–Matrizen.

Noch eine abschließende Bemerkung zur Änderung des Volumens der CY^6 entlang der elften Dimension: Sei $V_{E_8(E_6)}$ das Volumen der CY^6 auf dem Rand mit der Eichgruppe $E_8(E_6)$. Der Zusammenhang zwischen den beiden Volumina ist dann in der linearen Näherung gegeben durch [47]

$$V_{E_8} = V_{E_6} - c\kappa^{2/3} R_{11} \ , \tag{3.44}$$

wobei c eine Konstante ist, die durch die Auslöschung der Anomalien bestimmt ist. Der Rand mit der Eichgruppe E_6 bildet den beobachtbaren Sektor der Theorie, so daß das Volumen der CY^6 auf dieser Seite gemäß $V_{E_6}^{-1/6} \approx M_{GUT}$ experimentell fixiert ist. Weil ein Volumen nicht negativ werden kann, folgt aus (3.44), daß eine obere Grenze für R_{11} existiert, der sogenannte kritische Radius. Dieser kritische Radius entspricht unendlich starker Kopplung auf der E_8 Seite, d.h. $\mathrm{Re} f_{E_8} = \frac{1}{2}[S+S^* - \alpha(T+T^*)] = 0$. Das bedeutet aber, daß die 1–loop Korrektur in diesem Fall sogar genauso groß ist wie der Beitrag der führenden Ordnung! Dies ist dennoch ein stabiles Ergebnis, weil alle Korrekturen zu f oberhalb von einem Loop verschwinden [44]. In der gewählten Normierung der S– und T–Felder ist der Wert für $\mathrm{Re} f_{E_6}$ fixiert gemäß

$$\mathrm{Re} f_{E_6} = \frac{1}{2}[S + S^* + \alpha(T + T^*)] = \alpha_{GUT}^{-1} \approx 25 \ . \tag{3.45}$$

3.4 Relationen für die weich brechenden Parameter

Mit diesen Ergebnissen kann man nun Relationen für die weich brechenden Parameter aus (2.29) formulieren, die zusammen mit den vereinfachenden Annahmen aus Abschnitt 2.6.1 die Anzahl der freien Parameter des MSSM einschränken. Um auf diese Weise die Anfangsbedingungen bei M_{GUT} spezifizieren zu können, wird hier außerdem die Annahme gemacht, daß sich die folgenden Relationen zwischen der jeweiligen Stringskala und M_{GUT} nicht verändern. Auch wird hier nicht auf die Brechung der Eichgruppe E_6 eingegangen, sondern einfach unterhalb von M_{GUT} das MSSM angenommen.

Die SUSY soll nun durch nichtverschwindende VEVs von Hilfsfeldern aus dem versteckten Sektor gebrochen werden. Die Felder S und T, die auch modellunabhängige Moduli genannt werden, bilden gewissermaßen den natürlichen versteckten Sektor in Modellen, die durch Superstrings motiviert werden. Um festzulegen, welches der Felder S und T die dominante Rolle bei der Brechung der SUSY spielt, wird die in [7] eingeführte Parametrisierung benutzt[9]

$$F^S \equiv \langle F^S \rangle = \sqrt{3} m_{3/2} (S + S^*) \sin\theta \ , \tag{3.46}$$
$$F^T \equiv \langle F^T \rangle = m_{3/2} (T + T^*) \cos\theta \ , \tag{3.47}$$

mit dem Goldstino–Winkel θ. Dabei bezeichnet man den Fall $\sin\theta = 0$ als Modulus–dominiert und den Fall $\cos\theta = 0$ als Dilaton–dominiert. Die Gravitino–Masse $m_{3/2}$ ist ein Parameter, der im TeV–Bereich liegt und, wie man an dem Spezialfall (3.8) erkennen kann, mit der Skala der Brechung der Supersymmetrie zusammenhängt. Das Kähler–Potential (3.42) nimmt im sogenannten „Limes großer T" [7] eine einfachere Form an

$$K = -\ln(S + S^*) + \frac{2\alpha C_i^* C_i}{S + S^*} - 3\ln(T + T^*) + \frac{6 C_i^* C_i}{T + T^*} + \text{höhere Ordnungen}(|C|^2) \ , \tag{3.48}$$

[9]Gegenüber der allgemeineren Parametrisierung in [7] wurde hier schon die Diagonalität der Kähler–Metrik bzgl. der Moduli verwendet. Außerdem wird eine verschwindende kosmologische Konstante vorausgesetzt und mögliche komplexe Phasen werden wieder vernachlässigt, weil die CP-Verletzung in dieser Arbeit nicht diskutiert werden soll.

wobei der Term $2\alpha C_i^* C_i (S+S^*)^{-1}$ im schwach gekoppelten Fall vernachlässigt wird. Der Term $6C_i^* C_i (T+T^*)^{-1}$ tritt in Orbifold–Kompaktifizierungen [7, 38, 14] für Materiefelder mit modularem Gewicht $n = -1$ auf. Im Folgenden sollen aber Materiefelder mit verschiedenen modularen Gewichten zugelassen werden, um unterschiedliche skalare Massen bei M_{GUT} generieren zu können. Deren Beiträge zum Kähler–Potential haben die Form $6C_{i_n}^* C_{i_n} (T+T^*)^n$, so daß das im Folgenden verwendete Kähler–Potential lautet

$$\begin{aligned} K &= -\ln(S+S^*) - 3\ln(T+T^*) + \sum_n \left(6(T+T^*)^n + \frac{2\alpha}{S+S^*} \right) C_{i_n}^* C_{i_n} \\ &= -\ln(S+S^*) - 3\ln(T+T^*) + \sum_n Z_{(n)} C_{i_n}^* C_{i_n} \\ &= \hat{K} + \sum_n Z_{(n)} C_{i_n}^* C_{i_n} \ , \end{aligned} \tag{3.49}$$

wodurch nun $\hat{K}$ und $Z_{(n)}$ definiert sind. Die Gauginomasse $M_{1/2}$ berechnet man gemäß

$$M_{1/2} = \frac{1}{2} (\mathrm{Re} f_{E_6})^{-1} F^k \partial_k f_{E_6} \tag{3.50}$$

mit $k = S, T$. Damit erhält man im schwach gekoppelten Fall

$$M_{1/2} = \sqrt{3} m_{3/2} \sin\theta \ , \tag{3.51}$$

woraus folgt, daß die Gaugino–Masse im Modulus–dominierten Fall verschwindet. Dies ist aber lediglich ein Artefakt der Näherung, im schwach gekoppelten Fall die 1–loop Korrekturen zu vernachlässigen. Berücksichtigt man diese, so verschwindet $M_{1/2}$ für $\sin\theta = 0$ nicht, wird aber dennoch sehr klein, d.h. $M_{1/2} \ll m_{3/2}$ [47]. Im stark gekoppelten Fall erhält man

$$M_{1/2} = \frac{\sqrt{3} m_{3/2}}{S + S^* + \alpha(T+T^*)} \left((S+S^*) \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \alpha (T+T^*) \cos\theta \right) \ . \tag{3.52}$$

Die skalaren Massen mit modularem Gewicht n berechnet man aus

$$m_{(n)}^2 = m_{3/2}^2 - F^k F^{l\,*} - \frac{\partial_k \partial_{\bar{l}} Z_{(n)} - \partial_k Z_{(n)} Z_{(n)}^{-1} \partial_{\bar{l}} Z_{(n)}}{Z_{(n)}} \ , \tag{3.53}$$

mit $\partial_k = \partial_{S,T}$ und $\partial_{\bar{k}} = \partial_{S^*,T^*}$. Das Ergebnis im schwach gekoppelten Fall lautet

$$m_{(n)}^2 = m_{3/2}^2 (1 + n\cos^2\theta) \ , \tag{3.54}$$

wobei das Verschwinden der skalaren Masse für modulares Gewicht $n = -1$ im Dilaton–dominierten Fall wieder ein Artefakt der Näherung ist, die 1–loop Korrekturen im schwach gekoppelten Fall zu vernachlässigen. Im Falle starker Kopplung erhält man

$$\begin{aligned} m_{(n)}^2 = m_{3/2}^2 \Big\{ 1 - \frac{1}{(R+2\alpha)^2} \times \\ \times \Big[12\alpha(R+\alpha)\sin^2\theta + 4\sqrt{3}\alpha n R \sin\theta\cos\theta + nR(2\alpha(n-1) - R)\cos^2\theta \Big] \Big\} \ , \end{aligned} \tag{3.55}$$

mit $R = 6(T + T^*)^n(S + S^*)$. Für das modulare Gewicht $n = -1$ kann man die gesamte Abhängigkeit von den S– und T–Feldern durch $\delta = \frac{\alpha(T+T^*)}{3(S+S^*)}$ parametrisieren, wobei δ im Grenzfall schwacher Kopplung klein wird:

$$m^2_{(-1)} = m^2_{3/2}\left\{1 - \frac{1}{(1+\delta)^2}\left[3\delta(\delta+2)\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\delta\sin\theta\cos\theta + (2\delta+1)\cos^2\theta\right]\right\} . \quad (3.56)$$

Gemäß der vereinfachenden Annahme (2.52) sind die A–Parameter proportional zu den Yukawa–Kopplungen. Den von den Yukawa–Kopplungen unabhängigen Anteil berechnet man wie folgt[10]:

$$A = F^k(\partial_k\hat{K} - 3Z^{-1}_{(n)}\partial_k Z_{(n)}) , \quad (3.57)$$

so daß für den A–Parameter im schwach gekoppelten Fall gilt

$$A_{(n)} = -\sqrt{3}m_{3/2}(\sin\theta + \sqrt{3}(n+1)\cos\theta) \quad (3.58)$$

und für starke Kopplung

$$A_{(n)} = -\sqrt{3}m_{3/2}\frac{1}{R+2\alpha}\left[(R-4\alpha)\sin\theta + \sqrt{3}(R(n+1)+2\alpha)\cos\theta\right] . \quad (3.59)$$

Auch hier läßt sich für $n = -1$ die Abhängigkeit von den S– und T–Feldern durch $\delta = \frac{\alpha(T+T^*)}{3(S+S^*)}$ parametrisieren und man erhält

$$A_{(-1)} = -\sqrt{3}m_{3/2}\frac{1}{1+\delta}\left[(1-2\delta)\sin\theta + \sqrt{3}\delta\cos\theta\right] . \quad (3.60)$$

Auch für den B– und den μ–Parameter werden in [7] Relationen angegeben, die aber stark modellabhängig sind. Deshalb wird in dieser Arbeit pragmatisch vorgegangen und die Werte dieser beiden Parameter werden, wie in Abschnitt 2.5 erläutert, durch die richtige Brechung der elektroschwachen Symmetrie bestimmt.

3.5 Diskussion von $M_{1/2}$, $m_{(n)}$ und $A_{(n)}$

Bevor man die im vorigen Abschnitt aufgeführten Relationen für $M_{1/2}$, $m^2_{(n)}$ und $A_{(n)}$ diskutieren kann, muß man sich überlegen, welche Werte die Realteile der S– und T–Felder annehmen können. Dazu steht einerseits die phänomenologische Beziehung (3.45)

$$\mathrm{Re}f_{E_6} = \frac{1}{2}[S + S^* + \alpha(T+T^*)] = \alpha^{-1}_{GUT} \approx 25 .$$

und andererseits die Ungleichung

$$\mathrm{Re}f_{E_8} = \frac{1}{2}[S + S^* - \alpha(T+T^*)] > 0 . \quad (3.61)$$

zur Verfügung, denn $\mathrm{Re}f_{E_8} = 0$ entspricht dem Grenzfall unendlich starker Eichkopplung auf der versteckten Wand. Außerdem stellen $S + S^*$ und $T + T^*$ Volumina dar und können somit nicht negativ sein. Aus (3.45) und (3.61) folgt dann

$$0 \leq \alpha(T+T^*) \lesssim 25 \quad \text{und} \quad 25 \lesssim S + S^* \lesssim 50 . \quad (3.62)$$

[10] Implizit ist die vereinfachende Annahme, daß die Yukawa–Kopplungen nicht von den Feldern S und T abhängen.

Im stark gekoppelten Fall benötigt man, außer für das modulare Gewicht $n = -1$, nicht nur $\alpha(T+T^*)$, sondern auch $T+T^*$. Wie schon erwähnt, ist α eine Konstante der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$, die von der Auslöschung der Anomalien abhängt. Um nun konkrete Aussagen machen zu können, wird in allen folgenden Berechnungen einfach $\alpha = 1$ gesetzt.

In Abbildung 3.5 ist die Gaugino–Masse $M_{1/2}$ in Einheiten der Gravitino–Masse $m_{3/2}$ in Abhängigkeit vom Goldstino–Winkel $\theta \in [0, 2\pi]$ dargestellt. Die verschiedenen Kurven beschreiben den schwach gekoppelten (3.51) bzw. den stark gekoppelten Fall mit $\alpha(T+T^*) \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$ (3.52). Daß die Gauginomasse für $\theta \gtrsim \pi$ (je nach Stärke der Kopplung) negativ wird, ist nicht weiter schlimm, weil die Gauginos Fermionen sind und so durch Redefinition der Phase das richtige Vorzeichen für den Massenterm erzeugt werden kann. Wichtig ist jedoch, daß die Gauginomasse in der Umgebung der Modulus–dominierten SUSY–Brechung, d.h. in der Nähe von $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ verschwindet. Die 1–loop Korrekturen bewirken also, daß die Nullstellen der Gauginomasse von diesen beiden Punkten nach links verschoben werden, und zwar umso mehr, je stärker die Stringkopplung ist. Wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt, werden die 1–loop Korrekturen im schwach gekoppelten Fall vernachlässigt, weshalb die Gauginomasse hier exakt an den Punkten $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ verschwindet. Berücksichtigt man die Korrekturen, so verschieben sich die Nullstellen auch im schwach gekoppelten Fall etwas nach links, allerdings würde sich diese Verschiebung in der Abbildung 3.5 kaum bemerkbar machen. Außerdem fällt auf, daß sich in zwei Punkten alle Kurven schneiden, d.h. dort ist die Gaugino–Masse unabhängig von der Stärke der Stringkopplung. Das liegt daran, daß sich in der Gleichung (3.52) für die Goldstino–Winkel $\theta_1 = \arctan(1/\sqrt{3})$ und $\theta_2 = \arctan(1/\sqrt{3}) + \pi$ die Abhängigkeit von den S– und T– Feldern herauskürzt und daraus die Beziehung (3.52) für den schwach gekoppelten Fall resultiert. Für $\theta < \theta_1$ ist $M_{1/2}$ umso kleiner, für $\theta > \theta_1$ umso größer, je schwächer die Kopplung ist. Im Bereich $2.6 \lesssim \theta \leq \pi$ liegen — je nach Kopplungsstärke — die Nullstellen der Gaugino–Masse und die obige Reihenfolge ist aufgrund der Bildung des Betrages nicht erhalten. Im Intervall $[\pi, 2\pi]$ um den Punkt θ_2 wiederholt sich alles.

Die Diskussion der skalaren Massen $m_{(n)}$ soll mit dem besonders interessanten Fall des modularen Gewichts $n = -1$ begonnen werden, siehe Abbildung 3.5. Auch hier ist aus dem gleichen Grund wie oben die Masse bei $\theta = \theta_{1,2}$ unabhängig von der Stärke der Stringkopplung. Der wesentliche Unterschied zum Verhalten der Gaugino–Masse ist, daß die skalare Masse für $\theta > \theta_1$ eine stärkere Abhängigkeit von der Stringkopplung aufweist und das Massenquadrat mit wachsender Stringkopplung für immer kleinere Goldstino–Winkel negativ wird. Das kann nun bedeuten, daß man sich nicht mehr am Minimum des Potentials befindet, d.h. die Parametrisierung (3.46) und (3.47) ist hier nicht mehr zulässig. Eine andere Möglichkeit wäre, daß man sich bei M_{GUT} in einer Phase befindet, in der die Eichladungen gebrochen sind und der Renormierungsfluß zu niedrigen Energien aus dieser Phase herausführt. Dies ist ein sehr interessantes Problem, auf das aber im Rahmen dieser Arbeit leider nicht näher eingegangen werden kann. Aus diesem Grund werden auch die modularen Gewichte $n \leq -2$ im Folgenden nicht diskutiert, denn die Bereiche der Goldstino–Winkel mit nichtnegativer skalarer Masse werden immer kleiner. Insbesondere bleibt unter Beachtung der im nächsten Kapitel diskutierten phänomenologischen Einschränkungen für diese modularen Gewichte so gut wie kein erlaubter Bereich mehr übrig.

Es ist interessant, das Verhältnis der skalaren Masse $m_{(-1)}$ zum Betrag der Gaugino–Masse $|M_{1/2}|$ zu betrachten, siehe Abb. 3.5. Zuerst erkennt man, daß immer $m_{(-1)} < M_{1/2}$ gilt. Außerdem ist für den schwach gekoppelten Fall das Verhältnis konstant $\sqrt{3}$, was auch unmittelbar aus den Gleichungen (3.50) und (3.54) folgt. Bei starker Stringkopplung kann nun, in Abhängigkeit vom Goldstino–Winkel, die skalare Masse im Verhältnis zur Gaugino–Masse beliebig klein werden. Diese Ergebnisse stimmen mit [10] überein.

Für die modularen Gewichte $n = 0$ (Abb. 3.5) und $n = 1$ (Abb. 3.5) ist die skalare Masse für alle Goldstino–Winkel positiv. Es fällt auf, daß die Massenunterschiede bei festem Goldstino–Winkel für unterschiedlich starke Kopplung sehr klein sind, nämlich weniger als 5% bei $n = 0$ und weniger als 2% bei $n = 1$. Für $n \geq 2$ werden die Unterschiede noch geringer. Man kann also für $n \geq 0$ in guter Näherung generell die skalaren Massen verwenden, die durch den schwach gekoppelten heterotischen String gegeben sind.

Der A–Parameter bei modularem Gewicht $n = -1$ (Abb. 3.5) weist ebenfalls eine starke Abhängigkeit von der Stringkopplung auf, die wieder an den Punkten θ_1 und θ_2 verschwindet. Bei modularem Gewicht $n = 0$ (Abb. 3.5) ist diese Abhängigkeit kaum noch vorhanden, so daß die Differenzen bei festem θ weniger als 2% betragen. Der verlauf von $A_{(1)}$ (Abb. 3.5) entspricht qualitativ dem von $A_{(0)}$, aber die Amplitude ist doppelt so groß. Auch hier kann man für $n \geq 0$ in guter Näherung die A–Parameter bei schwacher Kopplung verwenden.

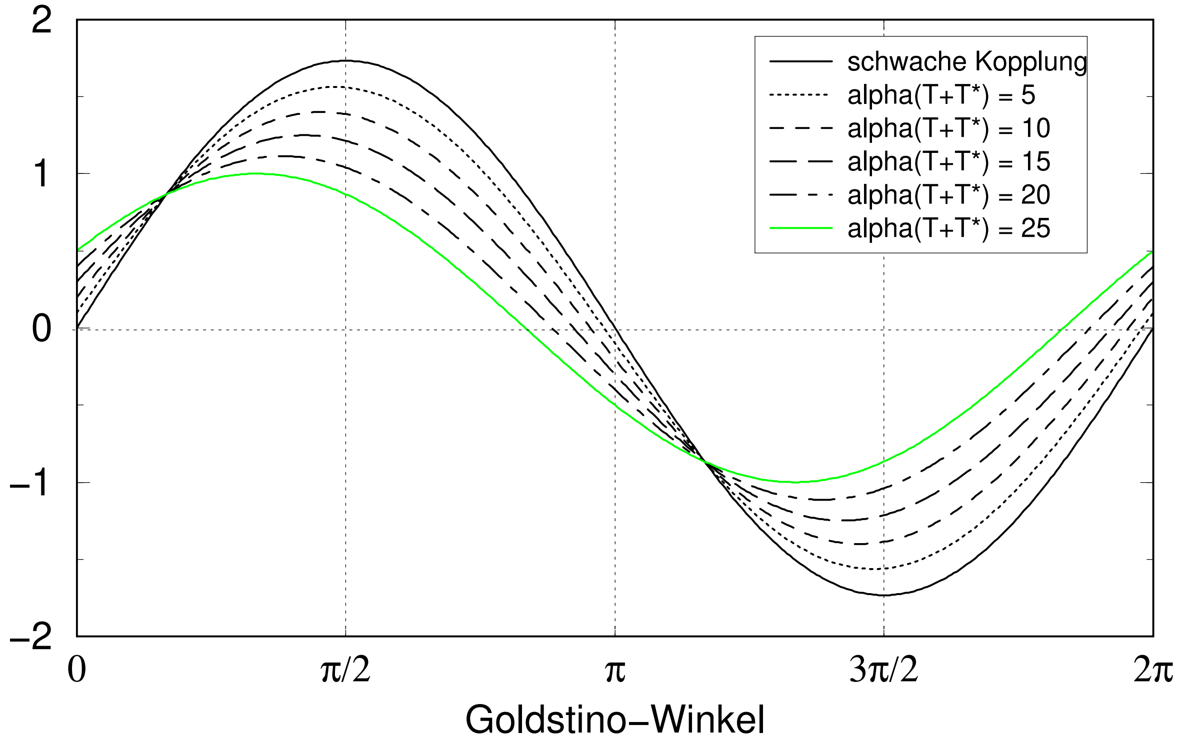

Abbildung 3.1: Gauginomasse $M_{1/2}$ in Einheiten der Gravitinomasse $m_{3/2}$

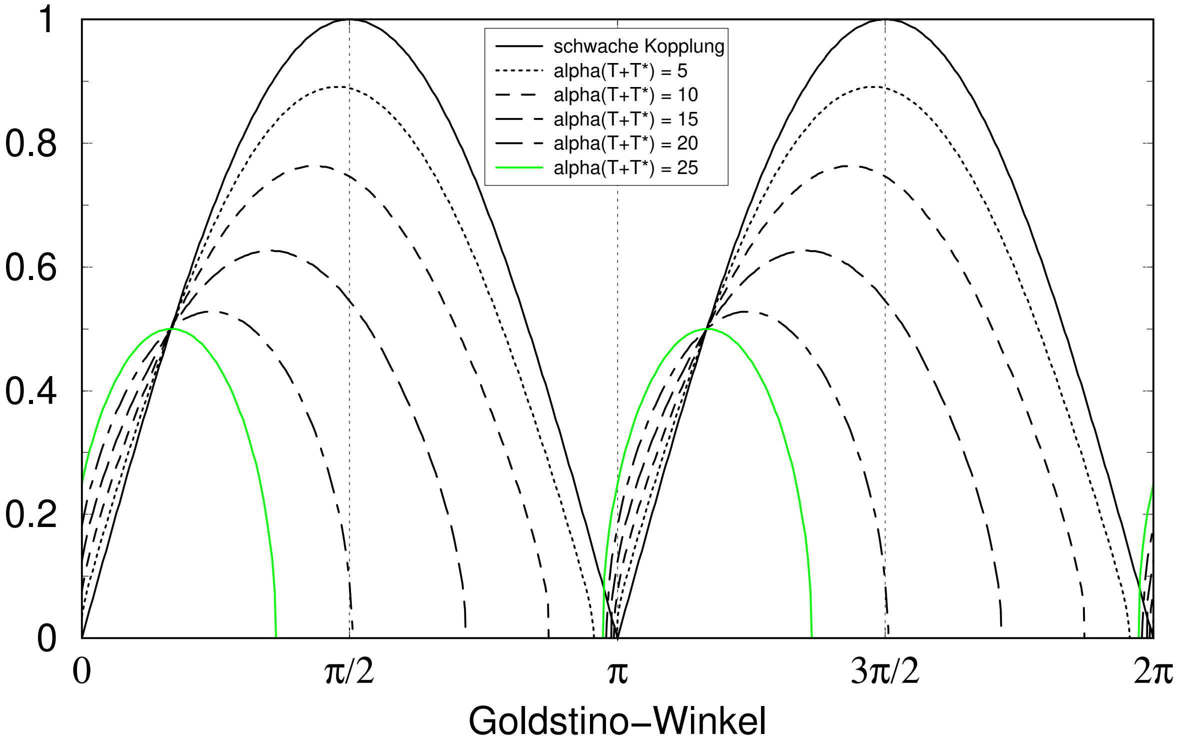

Abbildung 3.2: Skalare Masse $m_{(-1)}$ in Einheiten der Gravitinomasse $m_{3/2}$

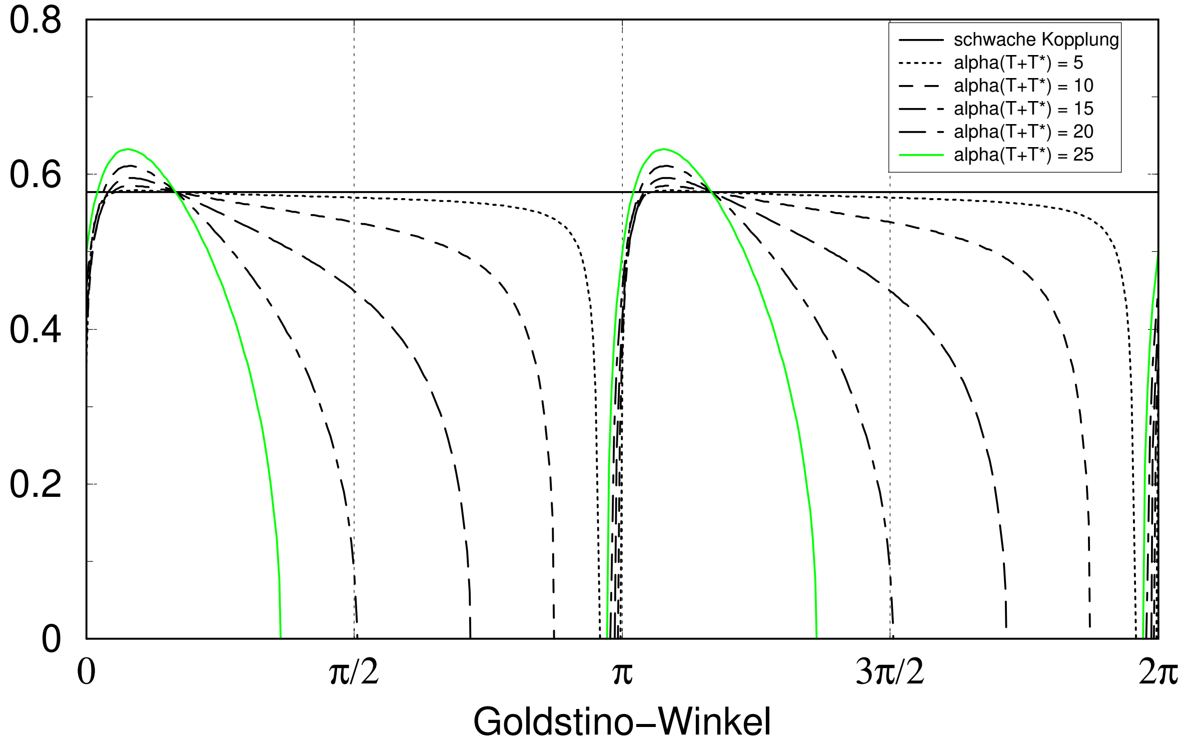

Abbildung 3.3: Verhältnis $\frac{m_{(-1)}}{|M_{1/2}|}$

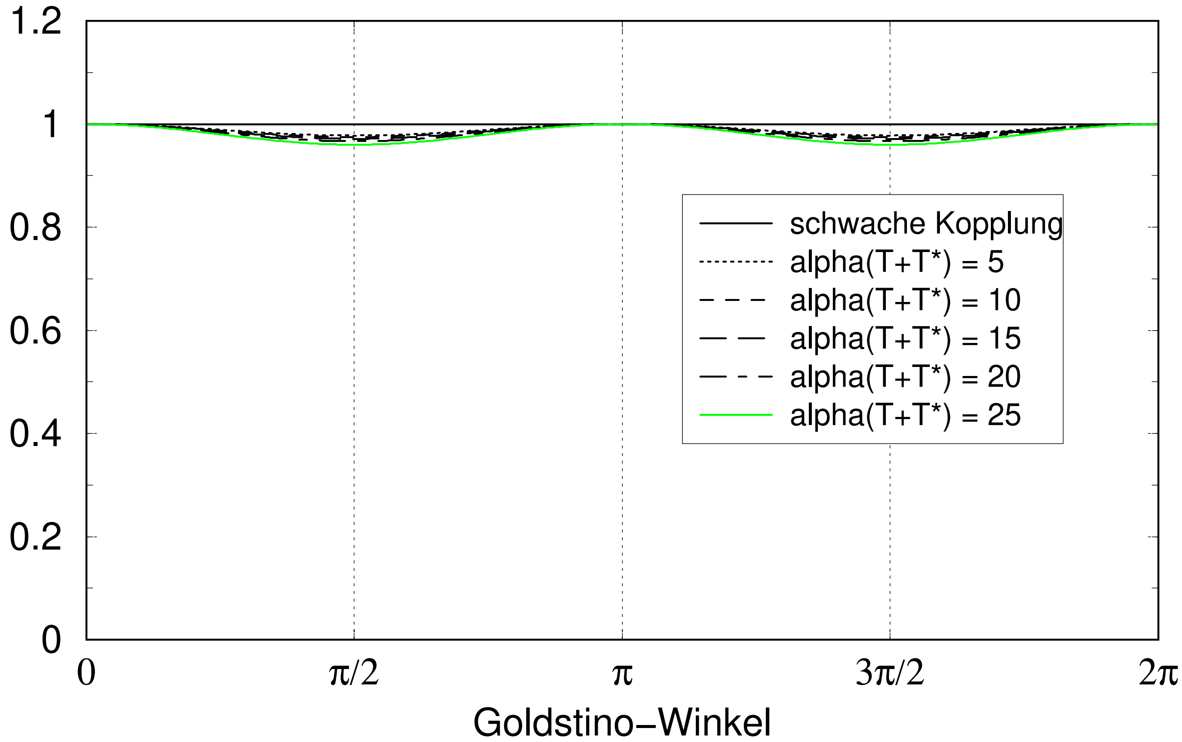

Abbildung 3.4: Skalare Masse $m_{(0)}$ in Einheiten der Gravitinomasse $m_{3/2}$

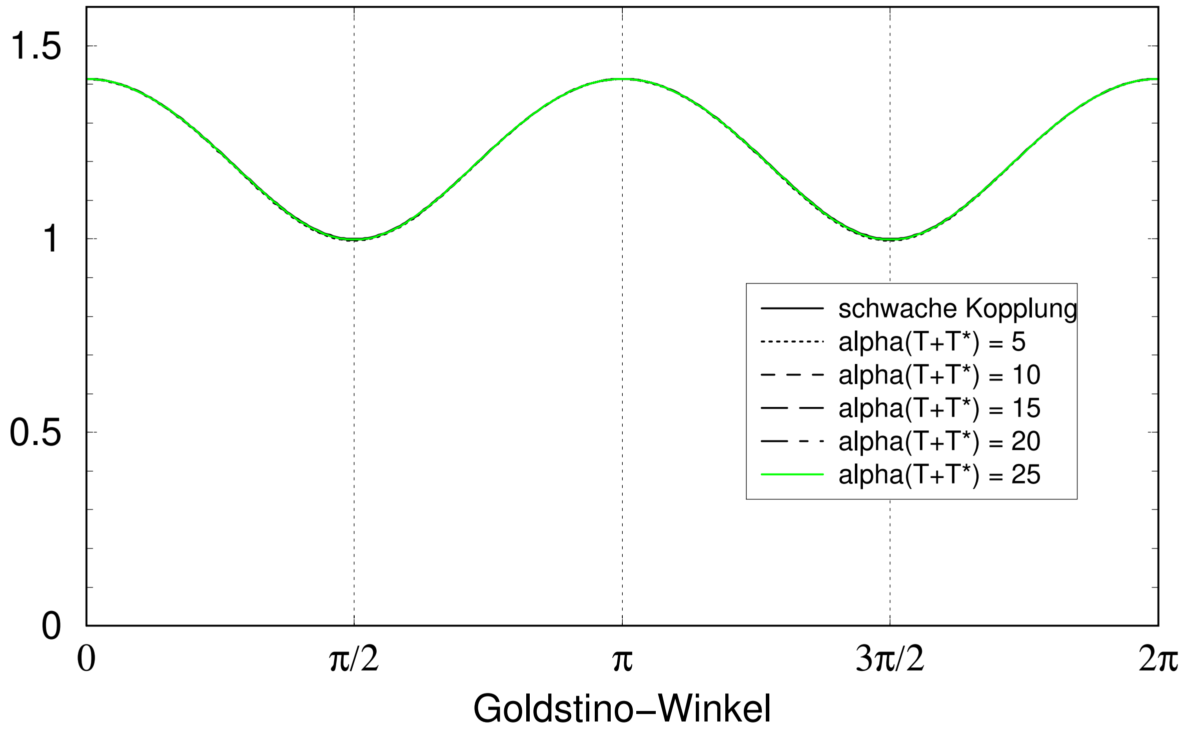

Abbildung 3.5: Skalare Masse $m_{(1)}$ in Einheiten der Gravitinomasse $m_{3/2}$

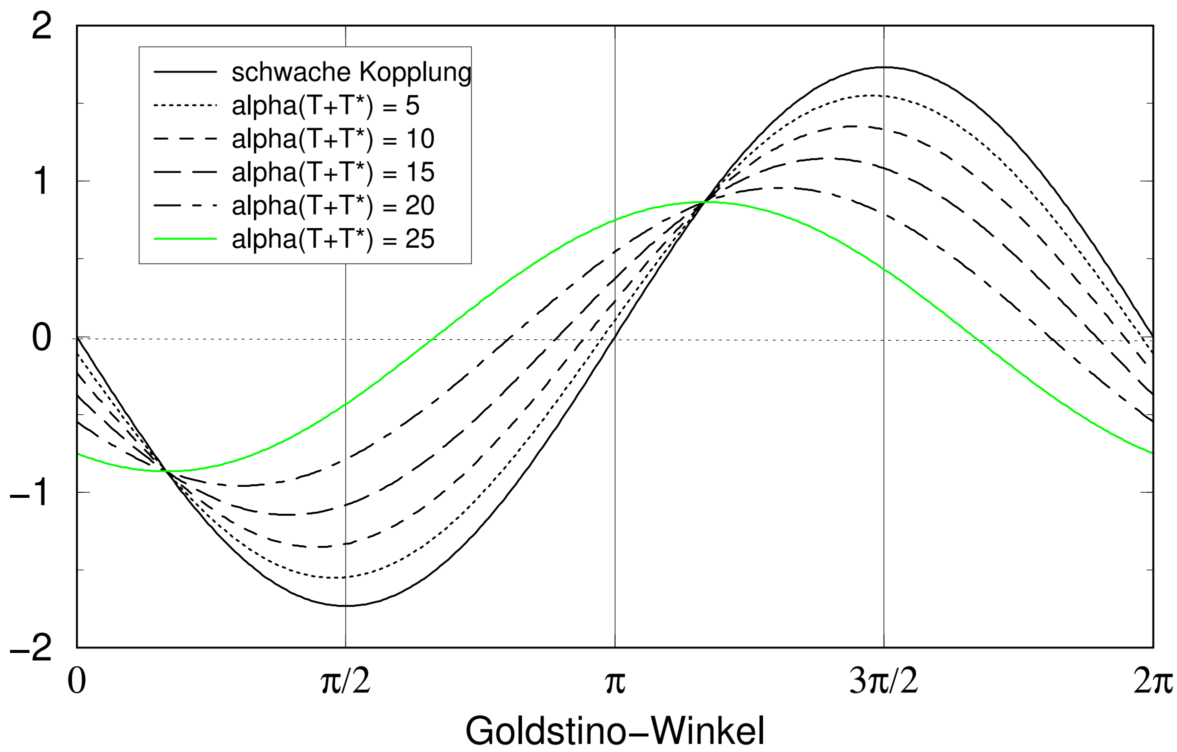

Abbildung 3.6: A–Parameter $A_{(-1)}$ in Einheiten der Gravitinomasse $m_{3/2}$

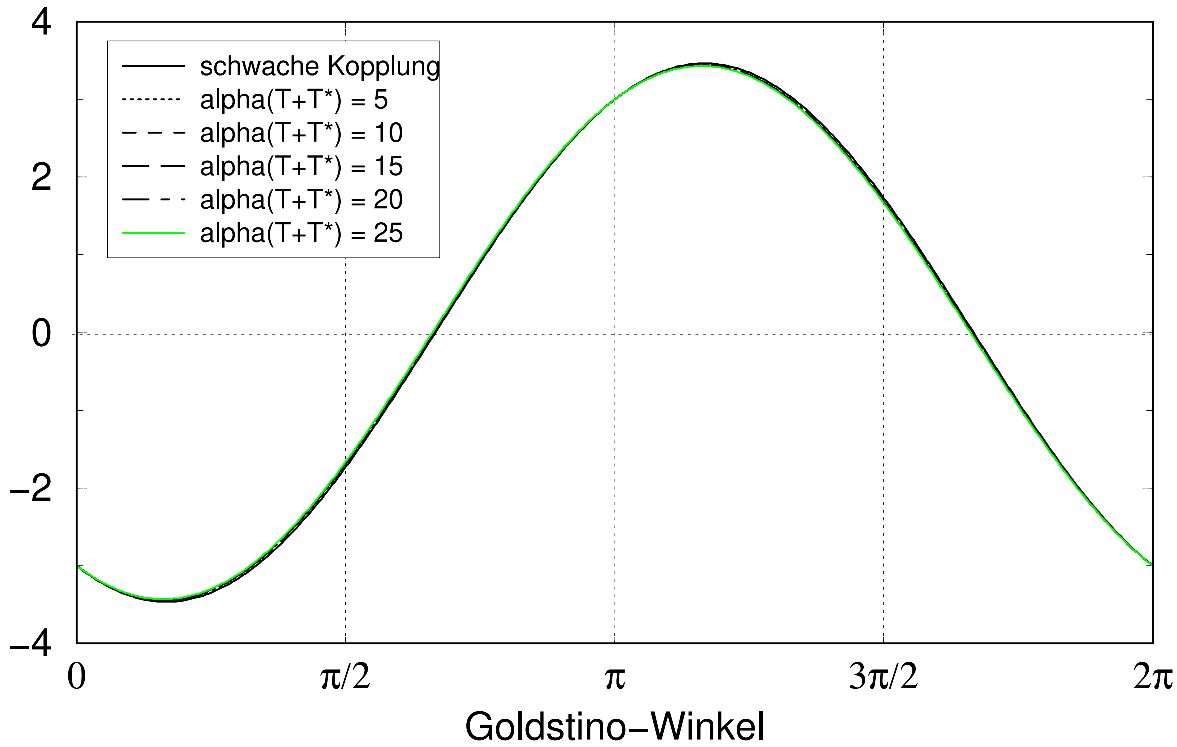

Abbildung 3.7: A–Parameter $A_{(0)}$ in Einheiten der Gravitinomasse $m_{3/2}$

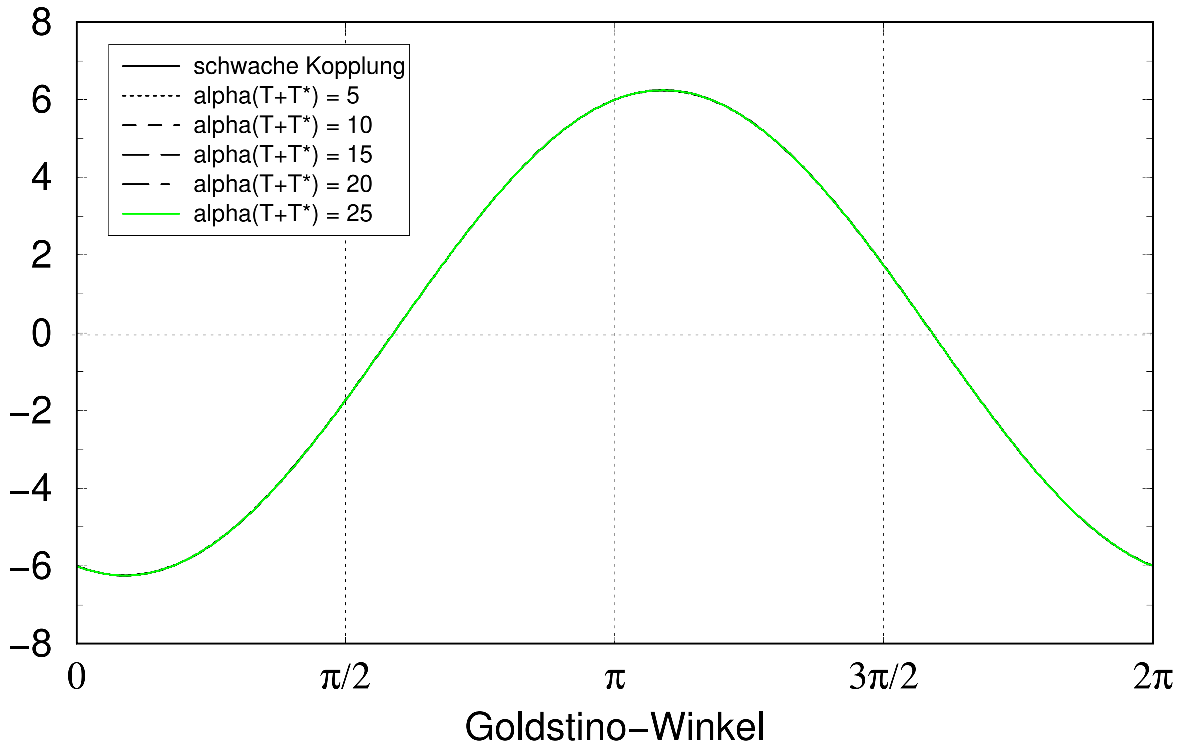

Abbildung 3.8: A–Parameter $A_{(1)}$ in Einheiten der Gravitinomasse $m_{3/2}$

Kapitel 4

Phänomenologische Analyse und Ergebnisse

4.1 Numerik und Methodik

Die RGE aus Abschnitt 2.7 werden mit einem Runge–Kutta 4–Schritt Verfahren [24] integriert, siehe auch Anhang D. Der relative numerische Fehler wird durch Einsetzen der errechneten Werte in die RGE abgeschätzt und ist mit $\mathcal{O}(10^{-5})$ erwartungsgemäß sehr klein, da sich sämtliche Parameter logarithmisch entwickeln. Weil die RGE aus Abschnitt 2.7 Differentialgleichungen erster Ordnung sind, benötigt man zur Integration jeder RGE eine Anfangsbedingung, die man auf verschiedene Arten einfließen lassen kann: Im „top–down Verfahren" wählt man die Anfangswerte der Parameter auf der hohen Energieskala M_{GUT} und läßt die RGE herunter zu M_Z laufen, im „bottom–up Verfahren" gibt man die Anfangswerte bei M_Z vor und integriert herauf zu M_{GUT}. Weil aber ein Teil der Parameter durch die Ergebnisse aus Kapitel 3 bei M_{GUT} und ein anderer Teil durch experimentelle Ergebnisse bei M_Z vorgegeben sind, wird hier eine Kombination aus beiden Verfahren verwendet. Mit der Wahl der Gravitino–Masse $m_{3/2}$ und der modularen Gewichte sind die skalaren Massen, die Gaugino–Masse $M_{1/2}$ und die A–Parameter A_t, A_b und A_τ bei M_{GUT} in Abhängigkeit vom Goldstino–Winkel θ und der Stärke der Stringkopplung — parametrisiert durch $\alpha(T+T^*)$ — gegeben. Durch Wahl von $\tan\beta$ fixiert man unter Verwendung der experimentellen Werte für die Top-Quark-Masse $M_t(M_Z) = 166$ GeV[1] und die Tau-Masse $M_\tau = 1.77$ GeV die Yukawa–Kopplungen y_t und y_τ bei M_Z. Außerdem sind dadurch gemäß Gleichung (2.55) die Higgs-VEVs v_u und v_d festgelegt. Um die Anzahl der freien Parameter zu reduzieren, wird hier die durch minimale $SU(5)$ GUT motivierte Vereinigung[2]

$$y_b(M_{GUT}) = y_\tau(M_{GUT}) \tag{4.1}$$

gefordert. Dies wird dadurch implementiert, daß ausgehend von den Werten $y_t(M_Z)$ und $y_\tau(M_Z)$ ein Wert für $y_b(M_Z)$ geschätzt wird, die RGE der Yukawa–Kopplungen (2.79) bis (2.81) nach M_{GUT} integriert werden und $y_b(M_Z)$ iterativ korrigiert wird, bis (4.1) erfüllt ist. Anschließend wird mit $m_b = y_b v_d$ die Bottom–Quark–Masse bei M_Z gefittet.

[1] Experimenteller Input ist der Wert $M_t(M_t) = 175$ GeV. Die Top-Quark-Masse ist natürlich ebenfalls energieskalenabhängig und man erhält den Wert bei M_Z gemäß: $M_t(M_Z) = M_t(M_t)(1 - \frac{4}{3\pi}\alpha_s(M_Z))$.

[2] Diese Beziehung gilt in minimaler $SU(5)$ GUT, in der die beiden Higgs–Dubletts die Darstellung 5 und $\overline{5}$ bilden [16]. In minimaler $SO(10)$ GUT, in der die beiden Higgs–Dubletts zusammen die 10 bilden, gilt sogar $y_t(M_{GUT}) = y_b(M_{GUT}) = y_\tau(M_{GUT})$ [32].

Es bleiben noch die Anfangswerte für die Parameter μ und B derart zu bestimmen, daß die Minimierungsbedingungen (2.43) und (2.44) bei M_Z für das Higgs–Potential auf dem tree–level bzw. (2.49) und (2.50) auf dem 1–loop–level erfüllt sind. Dazu werden alle RGE bis auf die für μ (2.85) und B (2.86) von M_{GUT} nach M_Z integriert und man erhält die beiden Parameter durch Lösung der Minimierungsbedingungen. Wie man sieht, ist lediglich das relative Vorzeichen von μ und B festgelegt, d.h. das Vorzeichen $sign(\mu)$ ist ein weiterer freier Parameter. Abschließend werden die beiden RGE für μ und B von M_Z nach M_{GUT} integriert. Durch Wahl der Gravitino–Masse $m_{3/2}$, der modularen Gewichte n_i, des Goldstino–Winkels θ und der Stärke der Kopplung der heterotischen Stringtheorie, parametrisiert durch $\alpha(T+T^*)$, fixiert man also schon einen großen Teil der zur Verfügung stehenden Parameter und man kann nur noch $\tan\beta$ und $sign(\mu)$ variieren.

4.2 Experimentelle Grenzen und andere Einschränkungen

Der in dieser Arbeit betrachtete Parameterraum, der durch

$$m_{3/2},\ n_i,\ \theta,\ \alpha(T+T^*),\ \tan\beta \text{ und } sign(\mu) \tag{4.2}$$

aufgespannt wird, ist durch verschiedene Kriterien eingeschränkt:

- Das Higgs–Potential soll stabil sein und die elektroschwache Symmetrie soll gebrochen sein. Gemäß Abschnitt 2.5 ist dies der Fall, wenn die beiden Ungleichungen

  $$m_u^2 + m_d^2 \geq 2|\mu B| \qquad \text{und} \qquad m_u^2 m_d^2 < (\mu B)^2 \tag{4.3}$$

  erfüllt sind.

- Im skalaren Potential dürfen keine Minima auftreten, die Farbe oder Ladung brechen. In der Literatur findet man dafür häufig Kriterien in Form von Ungleichungen für die A-Parameter, etwa [9]

  $$A_t^2 < 3(m_{\tilde{t}_L}^2 + m_{\tilde{t}_R}^2 + m_u^2). \tag{4.4}$$

  Diese sind aber nicht i.a. notwendig oder hinreichend für die Nicht-Existenz solcher Minima [29]. Pragmatischer ist die Forderung, daß die Massenquadrate der entsprechenden Teilchen durch den Fluß der RGE nicht negativ werden dürfen.

- Der Wertebereich von $\tan\beta$ ist dadurch eingeschränkt, daß y_t für $\tan\beta \lesssim 1.6$ und y_b und y_τ für $\tan\beta \gtrsim 61.5$ Landau-Pole unterhalb von M_{GUT} entwickeln[3]. Es darf also zunächst nur $1.6 \lesssim \tan\beta \lesssim 61.5$ gewählt werden. Außerdem wird, wie schon in Abschnitt 4.1 erwähnt, zum jeweiligen $\tan\beta$ die Bottom–Quark–Masse $m_b(M_Z)$ gefittet. Der Vergleich mit dem experimentellen Wert [8]

  $$m_b(M_Z) = 2.67 \pm 0.50 \text{ GeV} \tag{4.5}$$

  schränkt den erlaubten Bereich für $\tan\beta$ weiter ein. Wie in Abbildung 4.1 veranschaulicht, bleiben nur noch ein „Fenster“ für kleine und eines für große $\tan\beta$ übrig. Wie man

[3]Ohne die Forderung der Vereinigung von y_b und y_τ bei M_{GUT} wird diese Einschränkung aufgehoben. Die Rechnungen wurden auch ohne Yukawa–Vereinigung mit (4.5) als experimentellem Input durchgeführt. Dadurch konnten aber erstens keine qualitativ anderen Ergebnisse erzielt werden und zweitens wird die Diskussion der Phänomenologie durch den großen erlaubten Bereich für $\tan\beta$ aufwendiger.

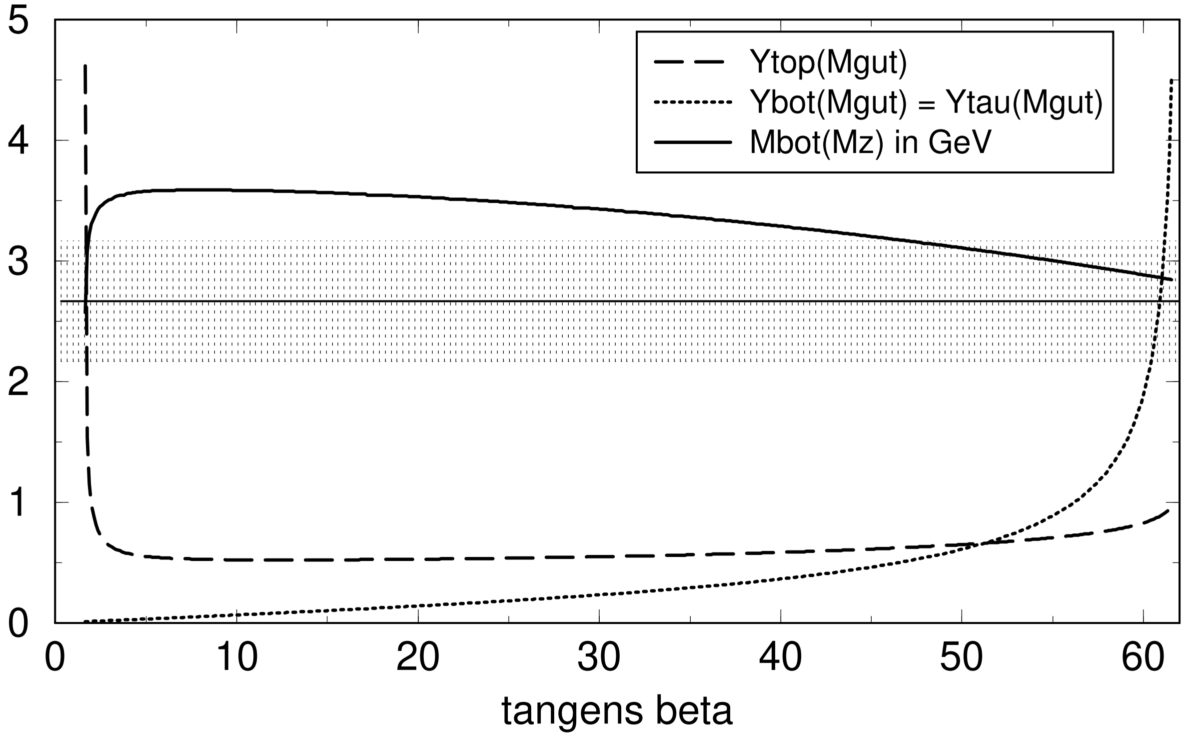

Abbildung 4.1: Bottom–Quark–Masse bei M_Z in GeV und Yukawa–Kopplungen bei M_{GUT} unter Forderung der Vereinigung von y_b und y_τ bei M_{GUT}. Der grau schraffierte Bereich stellt das experimentelle Ergebnis $m_b(M_Z) = 2.67 \pm 0.50$ GeV (4.5) dar.

sieht, ist $m_b(M_Z)$ empfindlich für den Pol von y_t bei M_{GUT} und es ist ein gewisses Feintuning in $\tan\beta$ nötig, damit m_b klein genug wird. Dies ist folgendermaßen zu verstehen: Bei fixierter Top–Quark–Masse ist $v_u(M_Z)$ wegen $M_t(M_Z) = v_u(M_Z) y_t(M_Z)$ umgekehrt proportional zu $y_t(M_Z)$. Damit $\tan\beta$ konstant bleibt, ist $v_d(M_Z)$ ebenso umgekehrt proportional zu $y_t(M_Z)$. Weil aber $y_b(M_Z)$ durch die Forderung der Vereinigung von y_b und y_τ bei M_{GUT} fixiert ist, wird $m_b(M_Z)$ wegen $m_b(M_Z) = v_d(M_Z) y_b(M_Z)$ entsprechend kleiner. In der anschließenden Diskussion der Ergebnisse werden aus dem Fenster „kleine $\tan\beta$“ und aus dem Fenster „große $\tan\beta$“ die folgenden Werte verwendet:

$$\begin{aligned} &\text{Fenster „kleine } \tan\beta\text{“:} \qquad && \tan\beta = 1.8 \\ &\text{Fenster „große } \tan\beta\text{“:} \qquad && \tan\beta = 51.5 \end{aligned}$$

Der Wert $\tan\beta = 1.8$ wird verwendet, damit einerseits y_t nicht zu nahe am Pol, andererseits aber $m_b(M_Z)$ nicht außerhalb des 1σ–Bereichs des Experiments liegt. Mit $\tan\beta = 51.5$ wird aus dem anderen Fenster der Punkt der Vereinigung der drei Yukawa–Kopplungen bei M_{GUT} gewählt. Auch hier steht $m_b(M_Z)$ nicht im Widerspruch zum Experiment. In der folgenden Tabelle sind die Zahlenwerte zusammengefaßt:

$\tan\beta$	$m_b(M_Z)[GeV]$	$y_t(M_{GUT})$	$y_b(M_{GUT})$	$y_\tau(M_{GUT})$
1.8	3.14	1.37	0.01	0.01
51.5	3.08	0.67	0.67	0.67

(4.6)

- Die physikalischen Massen dürfen, wie oben gefordert, durch den Fluß der RGE herunter zu M_Z nicht negativ werden, insbesondere aber müssen die in der folgenden Tabelle aufgeführten unteren experimentellen Grenzen beachtet werden [21, 20, 50][4]:

Teilchen		untere Grenze der Masse in GeV
Higgsbosonen	A	78
	h^0	77
	H^0	77
	$H^\pm$	60
Neutralinos	$\tilde{N}_1$	11
	$\tilde{N}_2$	45
	$\tilde{N}_3$	76
	$\tilde{N}_4$	127
Charginos	$\tilde{C}_1^\pm$	68
	$\tilde{C}_2^\pm$	68
Sneutrinos	$\tilde{\nu}$	43
Selektron	$\tilde{e}$	58
Smüon	$\tilde{\mu}$	55
Stau	$\tilde{\tau}$	45
Squarks	$\tilde{q}$	150
Gluinos	$\tilde{g}$	150

(4.7)

- Damit das Hierarchieproblem nicht von Neuem in die Theorie eingeführt wird, sollen die Teilchenmassen maximal im Bereich $\mathcal{O}$(einige TeV) liegen.

- Das LSP ist stabil und darf somit keine elektrische Ladung tragen.

Auf die experimentellen Grenzen durch FCNC wird später eingegangen.

4.3 Wahl der modularen Gewichte

Wie auch in Kapitel 3 werden die Ergebnisse dieser Arbeit in Abhängigkeit vom Goldstino-Winkel θ und der Stärke der Stringkopplung — parametrisiert durch $\alpha(T+T^*)$ — diskutiert. Deshalb wird versucht, die Parameter $m_{3/2}$, n_i, $\tan\beta$ und $sign(\mu)$ so zu wählen, daß unter Beachtung der oben genannten Einschränkungen möglichst viele phänomenologisch erlaubte Lösungen in der $\{\theta, \alpha(T+T^*)\}$–Ebene existieren, oder daß eine besonders interessante Phänomenologie auftritt. Für $sign(\mu)$ gibt es nur zwei Möglichkeiten. Für $\tan\beta$ sind — unter der Forderung der Vereinigung von y_b und y_τ bei M_{GUT} — nur zwei Bereiche mit dem Experiment verträglich, aus denen $\tan\beta = 1.8$ und $\tan\beta = 51.5$ betrachtet werden sollen, siehe Abschnitt 4.2. Wie sich später zeigen wird, kann auch die Gravitino–Masse nur über einen

[4] Alle hier angegebenen Grenzen sind gültig auf einem Confidence Level (CL) von 95%. Es wurden diejenigen Grenzen aus der Literatur ausgewählt, die möglichst wenig spezielle Annahmen beinhalten.

relativ kleinen Bereich variiert werden, wenn die Massen der supersymmetrischen Partnerteilchen nicht zu klein oder zu groß werden sollen.

Wie aber ordnet man den skalaren Teilchen die modularen Gewichte n_i zu? Verteilt man diese willkürlich, dann ergibt sich eine große Anzahl möglicher Kombinationen, die hier natürlich nicht alle untersucht werden können. Deshalb soll hier eine „Standardeinstellung“ gefunden werden, die sowohl eine interessante Phänomenologie aufweist als auch viele physikalische Lösungen in der $\{\theta, \alpha(T+T^*)\}$–Ebene besitzt. Wie schon in Abschnitt 3.5 erläutert, sollen deshalb modulare Gewichte $n_i \leq -2$ nicht betrachtet werden. Motiviert durch die Massenhierarchie der Quarks und Leptonen bietet es sich nun an, den 3 verschiedenen Generationen von Sfermionen verschiedene modulare Gewichte $n_i \in \{-1, 0, +1\}$ zuzuordnen. Es bleibt noch die Reihenfolge $n_1 = +1$, $n_2 = 0$, $n_3 = -1$ oder $n_1 = -1$, $n_2 = 0$, $n_3 = +1$ zu wählen[5]. Gemäß den Annahmen aus Abschnitt 2.6.1 trägt der A–Parameter nur zu den skalaren Massen der dritten Generation bei. Wählt man nun $n_3 = +1$, so führt das für große Bereiche des Goldstino–Winkels zu betragsmäßig großen A-Parametern (siehe Abschnitt 3.5) und deshalb häufig zur Entstehung farb– bzw. ladungsbrechender Minima. Aus diesem Grund wird die Kombination $n_1 = +1$, $n_2 = 0$, $n_3 = -1$ bevorzugt. Man beachte, daß dadurch die Massenhierarchie der Sfermionen gegenüber der ihrer Superpartner im SM umgedreht ist. Schließlich werden den skalaren Teilchen im Higgs-Sektor ebenfalls gleiche modulare Gewichte zugeordnet, wobei sich durch viele Tests gezeigt hat, daß die Wahl $n_H = -1$ die meisten phänomenologisch erlaubten Lösungen zuläßt. Es wird also, sofern nichts anderes gesagt wird, die folgende „Standardeinstellung“ verwendet:

skalare Massen	modulares Gewicht
1.Generation	$n_1 = +1$
2.Generation	$n_2 = 0$
3.Generation	$n_3 = -1$
Higgssektor	$n_H = -1$

(4.8)

Trotz der obigen Motivation ist diese Zuordnung natürlich nur eine von vielen möglichen.

4.4 Wie wichtig sind die 1–loop Korrekturen des Higgs–Potentials?

Im Folgenden sollen die in den Abschnitten 2.5.1 und 2.5.2 angegebenen Beziehungen für das Higgs–Potential und die Minimierungsbedingungen auf dem tree– und dem 1–loop–level verglichen und diskutiert werden.

In dieser Arbeit werden keine Präzisionsaussagen über Massenspektren gemacht. Wieso aber sollen dann 1–loop Korrekturen des Higgs–Potentials berücksichtigt werden? Die Gleichung (2.68), die hier noch einmal wiedergegeben ist

$$\begin{aligned} m_{h^0}^2 &= \frac{1}{2}\left(m_A^2 + M_Z^2 - \sqrt{(m_A^2+M_Z^2)^2 - 4m_A^2 M_Z^2 \cos^2 2\beta}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(m_A^2 + M_Z^2 - \sqrt{(m_A^2+M_Z^2)^2 - 4m_A^2 M_Z^2 (\cos^2\beta - \sin^2\beta)^2}\right) \ , \end{aligned} \tag{4.9}$$

[5] Der Index bezieht sich jeweils auf die Generation der Sfermionen

besagt, daß das leichte CP–gerade neutrale Higgs–Boson immer leichter als das Z–Boson sein muß. Allein diese Tatsache ist in Anbetracht der neuen unteren experimentellen Grenze von $m_{h^0} \gtrsim 77$ GeV schon beunruhigend, denn es bliebe nur noch ein kleiner Parameterraum für das MSSM. Durch Einbeziehen der 1–loop Korrekturen wird diese Einschränkung aufgehoben. Außerdem entnimmt man der Gleichung (4.9), daß für $\tan\beta \to 1$ die Masse m_{h^0} gegen Null geht. Ursache ist das Verschwinden des quartischen Terms in V_{Higgs}^{tree} (2.37) in der diagonalen Richtung der Higgs–VEVs. Das aber ist ebenfalls lediglich ein Artefakt der tree–level Rechnung und wird durch die Korrekturen aufgehoben. In diesem Fall werden also die Korrekturen im Verhältnis zum Beitrag der führenden Ordnung unendlich groß! In der Abbildung 4.2 werden diese Aussagen veranschaulicht. Es wird m_{h^0} auf dem tree–level und unter Berücksichtigung der 1–loop Korrekturen mit $m_{3/2} = 400$ GeV, $sign(\mu) = +1$ und $\tan\beta = 1.8$ dargestellt. Auch die experimentelle Grenze von $m_{h^0} \gtrsim 77$ GeV ist eingetragen. Der Goldstino–Winkel θ läuft in dieser und in allen folgenden Abbildungen nur von 0 bis π, weil sich die Ergebnisse auf dem Intervall $[\pi, 2\pi]$ wiederholen. Man sieht, wie groß die Korrekturen im Verhältnis zur führenden Ordnung für kleine $\tan\beta$ sind, so daß eine Vernachlässigung dieser Korrekturen ein völlig falsches Bild ergeben würde[6]. Ein MSSM nur unter Berücksichtigung der führenden Ordnung des Higgs–Potentials wäre nämlich für kleine $\tan\beta$ experimentell ausgeschlossen, während die 1–loop korrigierte Masse m_{h^0} für große Bereiche des $\{\theta, \alpha(T+T^*)\}$–Parameterraumes oberhalb der experimentellen Grenze liegt[7].

Weiterhin fällt auf, daß für $m_{h^0}^{1-loop}$ wieder der Schnittpunkt bei $\theta = \theta_1$ vorliegt. Das liegt daran, daß die Korrekturen u.a. (siehe Anhang C) durch skalare Massen erzeugt werden, die durch die Zuordnung des modularen Gewichtes -1 bei M_{GUT} ein solches Verhalten aufweisen. Außerdem tragen die Gauginomassen, die ebenfalls diesen Schnittpunkt besitzen, gemäß den RGE aus Abschnitt 2.7.6 zur Entwicklung der skalaren Massen bei.

Es ist vielleicht noch interessant zu klären, warum m_{h^0} auf dem tree–level so gut wie keine Abhängigkeit von θ oder $\alpha(T+T^*)$ zeigt. Formt man Gleichung (4.9) weiter um

$$m_{h^0}^2 = \frac{1}{2}\left(m_A^2 + M_Z^2 - (m_A^2 - M_Z^2)\sqrt{1 - \frac{4m_A^2 M_Z^2(\cos^2\beta - \sin^2\beta)^2}{(m_A^2 - M_Z^2)^2}}\right) \tag{4.10}$$

und macht für $m_A^2 \gg M_Z^2$ die Näherung $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$, so erhält man

$$m_{h^0}^2 \approx M_Z^2(\cos^2\beta - \sin^2\beta)^2\ . \tag{4.11}$$

Es tritt also keine Abhängigkeit mehr von m_A und somit keine Abhängigkeit von θ oder $\alpha(T+T^*)$ auf.

Vergrößert man nun $\tan\beta$, so wächst m_{h^0} schnell an und bei $\tan\beta \approx 10$ tritt eine Sättigung des Massenzuwachses auf[8]. Die Masse von h^0 auf dem tree–level bleibt natürlich unterhalb von M_Z und man beobachtet $m_{h^0}^{1-loop} \lesssim 135$ GeV. Bei $\tan\beta = 51.5$ schließlich wird ein großer Teil des $\{\theta, \alpha(T+T^*)\}$–Parameterraumes ausgeschlossen, weil die Masse von $\tilde{\tau}_1$ unterhalb der experimentellen Grenze liegt oder sogar dessen Massenquadrat negativ wird.

[6] 2–loop Korrekturen, die hier nicht berücksichtigt werden, verringern die Voraussagen der Higgs–Massen um bis zu 20% der 1–loop Korrekturen [31].

[7] Wie man sieht, laufen einige Kurven nicht über das gesamte Intervall $[0, \pi]$ des Goldstino–Winkels. Das liegt daran, daß für diese Punkte des Parameterraumes irgendwelche Bedingungen aus Abschnitt 4.2 verletzt sind, eine ausführliche Diskussion erfolgt im nächsten Abschnitt.

[8] Es sei daran erinnert, daß für diesen Wert von $\tan\beta$ gemäß Abschnitt 4.2 $m_b(M_Z)$ außerhalb der experimentellen Grenzen liegt.

Für große $\tan\beta$ stellt man fest, daß V_{Higgs}^{tree} sowohl für $sign(\mu) = +1$ als auch für $sign(\mu) = -1$ instabil wird, d.h. die Bedingung (2.41) ist verletzt. Durch die 1–loop Korrekturen wird das Higgs–Potential im Fall $sign(\mu) = +1$ stabilisiert, so daß auch bei $\tan\beta = 51.5$ physikalische Lösungen möglich sind. Im Fall $sign(\mu) = -1$ allerdings destabilisieren die Korrekturen das Higgs–Potential zusätzlich, so daß bei $\tan\beta = 51.5$ für keinen Punkt des $\{\theta, \alpha(T + T^*)\}$–Parameterraumes physikalische Lösungen gefunden werden können, unabhängig von der Wahl der Gravitino–Masse. Deshalb braucht im Folgenden der Fall $\tan\beta = 51.5$ mit $sign(\mu) = -1$ nicht mehr diskutiert zu werden.

Indem man die 1–loop Korrekturen in V_{Higgs} berücksichtigt, ändern sich nicht nur die Higgs–Massen, d.h. die Form der Minima, sondern auch deren Position. Die korrigierten Minimierungsbedingungen (2.49) und (2.50) besitzen also andere Lösungen für μ und B als die tree–level Relationen (2.43) und (2.44). Auch diese Unterschiede sollen im Folgenden anhand von Diagrammen mit den gleichen Parametereinstellungen wie oben diskutiert werden. Vergleicht man die Diagramme für μ^{tree} (Abb 4.3) und μ^{1-loop} (Abb 4.4), so erkennt man, daß sich die Lösungen qualitativ nicht unterscheiden. Die korrigierten Werte liegen aber etwas niedriger. Erhöht man $\tan\beta$, so werden die μ–Parameter größer und bei $\tan\beta \approx 10$ tritt wieder eine Sättigung des Zuwachses auf. Außerdem liegt wieder der Schnittpunkt bei $\theta = \theta_1$ vor. Das mag zunächst nicht verwundern. Zwar kann durch die RGE von μ (2.85) ein solches Verhalten nicht generiert werden, aber die Minimierungsbedingungen (2.43) und (2.49) enthalten skalare Massen mit modularem Gewicht -1. Setzt man versuchsweise alle modularen Gewichte Null, so bleibt die Struktur der Diagramme 4.3 und 4.4 und insbesondere der Schnittpunkt erhalten. Die einzige Möglichkeit ist nun, daß die Gaugino–Massen über dieRGE von m_{H_u} (2.98) und m_{H_d} (2.99) große Beiträge liefern und so das beobachtete Verhalten erzeugen.

Abschließend soll noch kurz auf den B–Parameter eingegangen werden. In Abb. 4.5 ist dieser für den tree–level mit $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ dargestellt. Unter Einbeziehung der 1–loop Korrekturen ist der B–Parameter betragsmäßig etwas größer, aber es treten keine qualitativen Unterschiede auf, so daß eine gesonderte Darstellung nicht nötig ist. Gemäß der gewählten Konvention für die Vorzeichen der Parameter im Higgs–Potential ist der B–Parameter für $sign(\mu) = +1$ negativ. Ab $\tan\beta \approx 30$ muß für den B–Parameter auf dem tree–level im Verhältnis zur Skala der Gravitino–Masse ein gewisses Feintuning vorgenommen werden, was bei Berücksichtigung der 1–loop Korrekturen nicht nötig ist.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß man die 1–loop Korrekturen des Higgs-Potentials miteinbeziehen muß, wenn man eine phänomenologische Dikussion durchführen möchte. Deshalb wird im Folgenden nur noch das korrigierte Higgs-Potential verwendet.

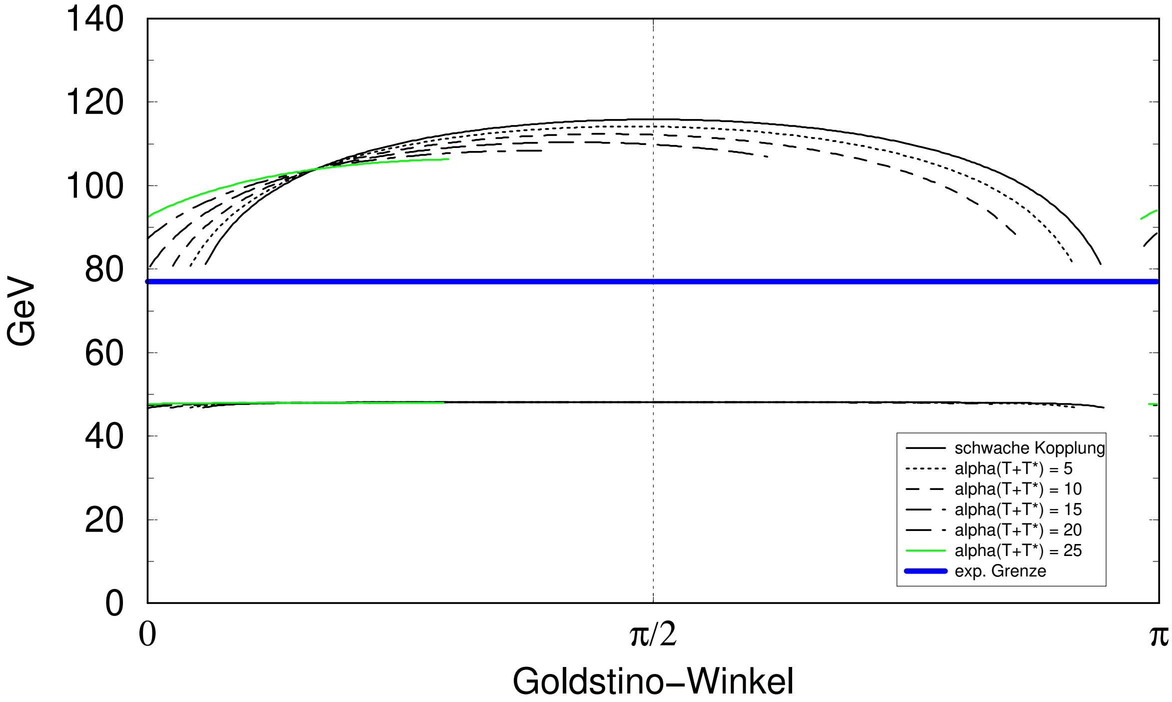

Abbildung 4.2: m_{h^0} auf dem tree–level (unten) und mit 1–loop Korrekturen (oben) für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$. Alle Werte von $m_{h^0}^{tree}$ liegen unterhalb der experimentellen Grenze.

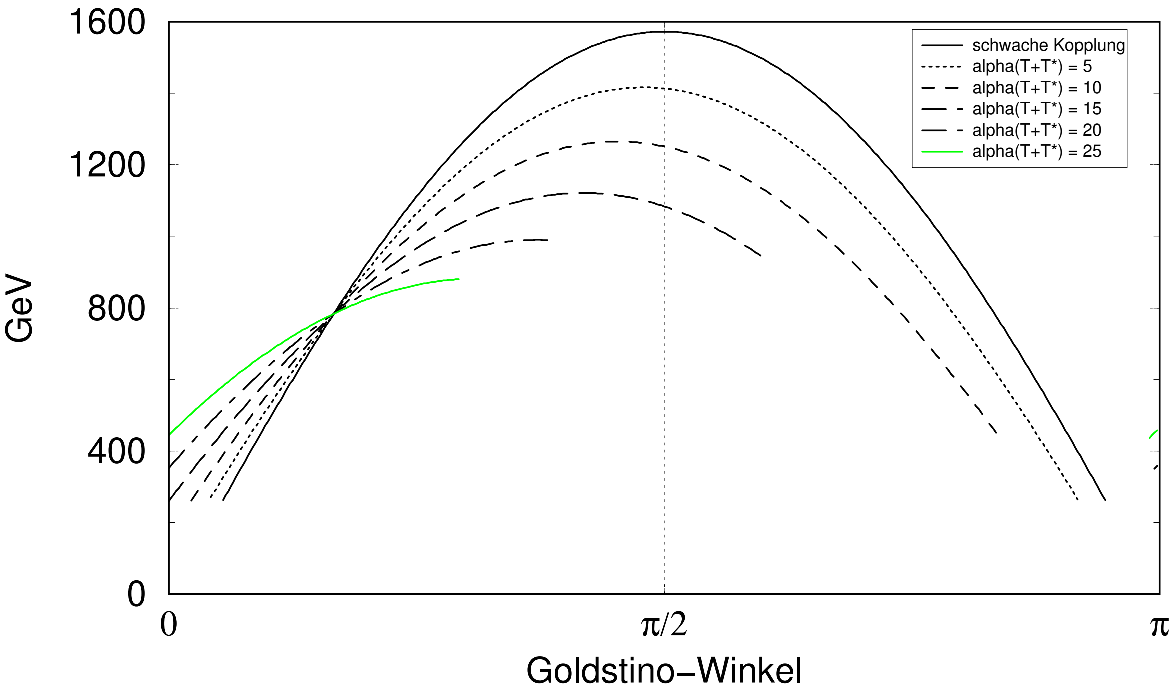

Abbildung 4.3: μ^{tree} für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

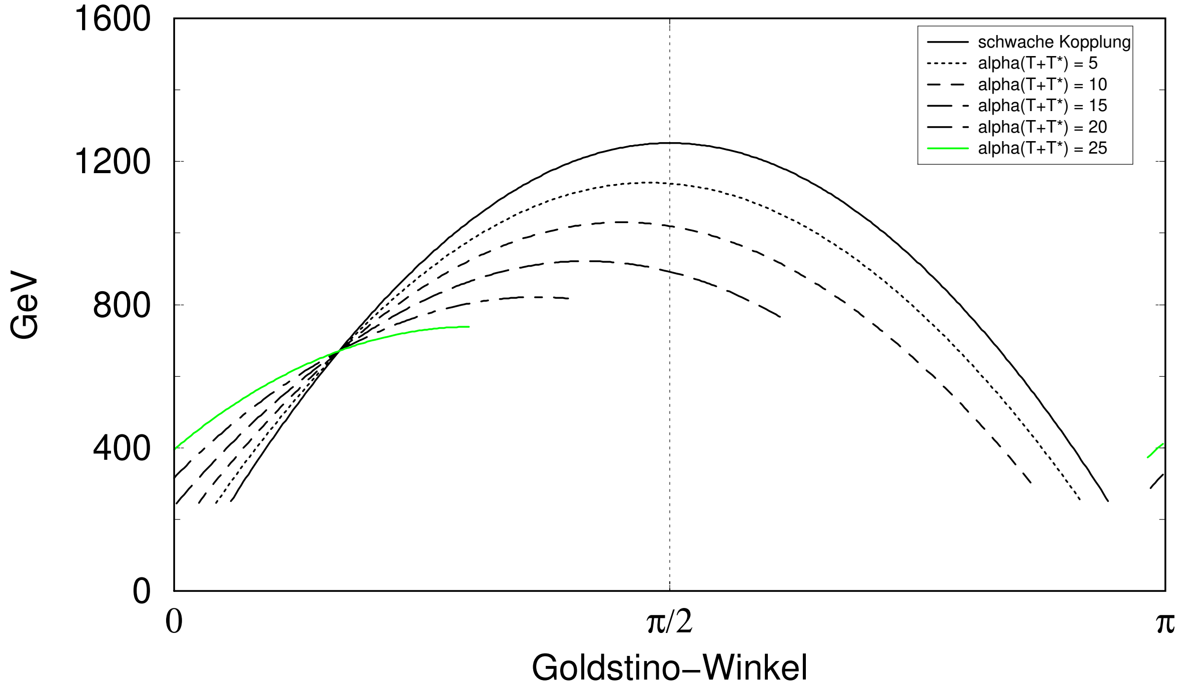

Abbildung 4.4: μ^{1-loop} für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

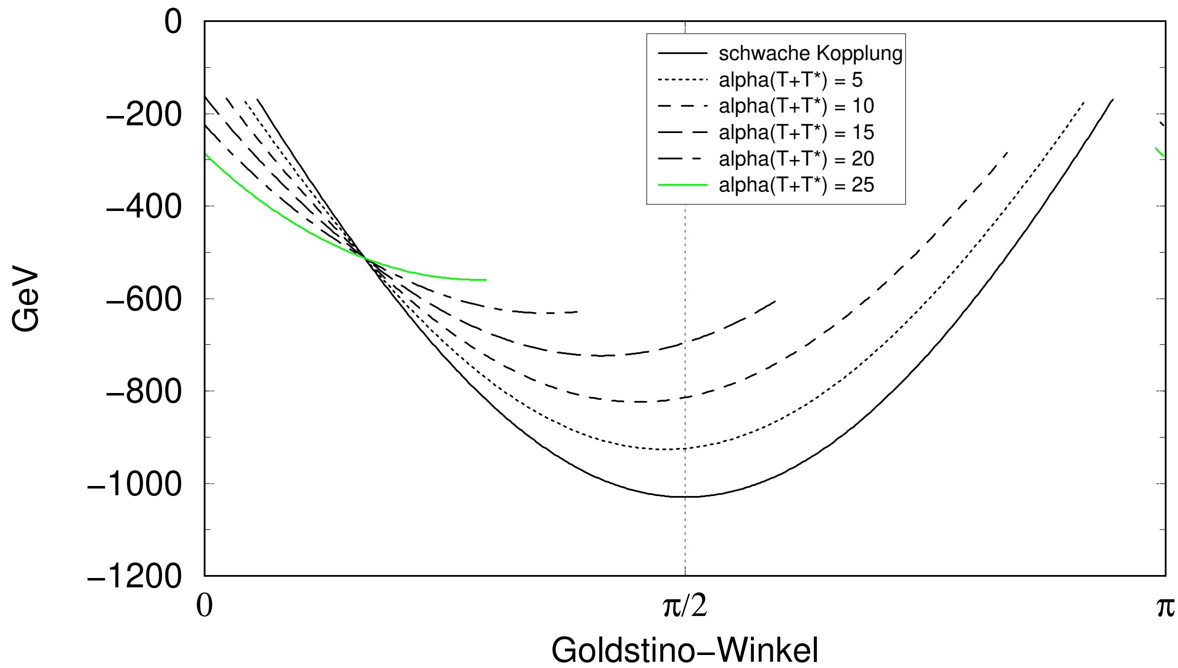

Abbildung 4.5: B^{tree} für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

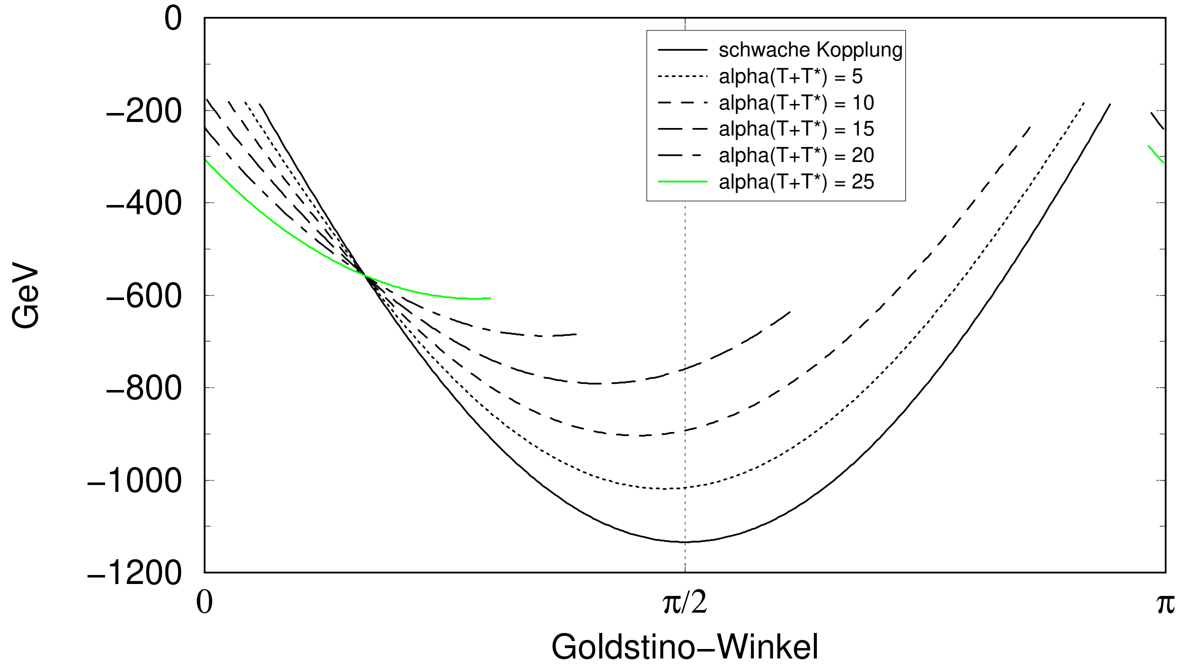

Abbildung 4.6: B^{1-loop} für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

4.5 Diskussion der Massenspektren

In diesem Abschnitt erfolgt eine Diskussion der Massenspektren für verschiedene $m_{3/2}$, $\tan\beta$ und $sign(\mu)$ mit den modularen Gewichten aus Tabelle 4.8. Eine kurze Diskussion des niederenergetischen Massenspektrums im M–Theorie–Fall findet man in [4]. Dort werden aber nur spezielle Fälle des Goldstino–Winkels betrachtet. Wie im vorigen Abschnitt erläutert, liefert der Fall $\tan\beta = 51.5$ mit $sign(\mu) = -1$ keine physikalischen Lösungen und wird deshalb im Folgenden nicht betrachtet.

- $\underline{m_{3/2} = 100 \text{ GeV:}}$

  Für $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ ist aufgrund der experimentellen Grenze an die Masse des leichten Charginos $\tilde{C}_1^{\pm}$ nur ein kleiner Teil des Parameterraumes, nämlich $1 \lesssim \theta \lesssim 2$ und $\alpha(T+T^*) \lesssim 10$ phänomenologisch erlaubt (Abb. 4.7).

  Bei negativem Vorzeichen für den μ–Parameter können keine erlaubten Lösungen gefunden werden, weil die eperimentelle Grenze für m_{h^0} immer verletzt ist.

  Die Kombination $\tan\beta = 51.5$ und $sign(\mu) = +1$ ist ebenfalls ausgeschlossen, denn das Massenquadrat von $\tilde{\tau}_1$ ist für fast den gesamten Parameterraum negativ, so daß ladungsbrechende Minima existieren. Dort, wo das Massenquadrat nicht negativ ist, wird dennoch die experimentelle Grenze für $m_{\tilde{\tau}_1}$ verletzt.

  Eine Gravitino–Masse von 100 GeV stellt sich also — bis auf wenige Ausnahmen — im gewählten Modell als zu leicht heraus.

- $\underline{m_{3/2} = 200 \text{ GeV:}}$

  Für $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ sind die Lösungen mit $\alpha(T+T^*) \lesssim 10$ wieder durch

$m_{\tilde{C}_1^\pm}$ beschränkt, aber es ist ein größeres Intervall $0.3 \lesssim \theta \lesssim 2.8$ erlaubt (Abb. 4.8). Auch für $\alpha(T+T^*) \gtrsim 15$ existieren nun Lösungen, die ebenfalls wegen der Chargino–Masse auf $\theta \gtrsim 0.3$ beschränkt sind. Zu größeren Goldstino–Winkeln hin sind diese Lösungen allerdings dadurch verboten, daß mit dem $\tilde{\tau}_1$ ein geladenes LSP auftritt. Dies passiert für $\alpha(T+T^*) \approx 25$ bei $\theta \approx 1$ und für $\alpha(T+T^*) \approx 15$ bei $\theta \approx 2$.

Bei negativem μ–Parameter beschränkt die Higgs–Masse m_{h^0} das Spektrum (Abb. 4.9). Für $\alpha(T+T^*) \lesssim 10$ sind jetzt die Goldstino–Winkel $0.5 \lesssim \theta \lesssim 2.3$ erlaubt. Für $\alpha(T+T^*) \gtrsim 15$ existieren nun auch erlaubte Lösungen bei $\theta \gtrsim 0.5$, die zu großen Goldstino–Winkeln hin — ebenso wie für $sign(\mu) = +1$ — durch das Kriterium eingeschränkt sind, daß das LSP neutral sein muß.

Für $\tan\beta = 51.5$ und $sign(\mu) = +1$ gilt im Prinzip dasgleiche wie bei $m_{3/2} = 100$ GeV. Bei schwacher Stringkopplung und $\theta \approx 2$ ist zwar die experimentelle Grenze für $m_{\tilde{\tau}_1}$ nicht verletzt, jedoch ist das $\tilde{\tau}_1$ dann wieder das LSP, so daß wieder der gesamte Parameterraum verboten ist.

- $m_{3/2} = 300$ GeV:

  Gegenüber $m_{3/2} = 200$ GeV ergeben sich nur wenige Veränderungen.

  Für $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ ist nun bei $\alpha(T+T^*) \lesssim 10$ der Bereich $0.3 \lesssim \theta \lesssim 2.8$ erlaubt, im Falle starker Stringkopplung ist sogar $\theta = 0$ möglich (Abb. 4.10).

  Bei negativem μ–Parameter gilt nun $\theta \gtrsim 0.3$ für alle $\alpha(T+T^*)$ und $\theta \lesssim 2.8$ bei $\alpha(T+T^*) \lesssim 10$ (Abb. 4.11).

  Bei $\tan\beta = 51.5$ tauchen nun erste erlaubte Lösungen für den Fall schwacher Stringkopplung im Intervall $1.2 \lesssim \theta \lesssim 2$ auf (Abb. 4.12).

- $m_{3/2} = 400$ GeV:

  Für $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ beschränkt die experimentelle Grenze für das leichte Chargino den erlaubten Bereich für den schwach gekoppelten String auf das Intervall $0.2 \lesssim \theta \lesssim 3$, es ist also fast der gesamte Bereich des Goldstino–Winkels erlaubt (Abb. 4.13). Bei stärkerer Kopplung $\alpha(T+T^*) \gtrsim 15$ ist das Spektrum für kleine Goldstino–Winkel nicht mehr durch $m_{\tilde{C}_1^\pm}$ beschränkt und es ist sogar $\theta = 0$ erlaubt. Zu großen θ hin sind die Fälle stärkerer Kopplung wieder dadurch beschränkt, daß mit dem $\tilde{\tau}_1$ ein geladenes LSP auftritt.

  Bei $sign(\mu) = -1$ ist nun h^0 schwer genug, so daß im stark gekoppelten Fall $\theta = 0$ möglich ist (Abb. 4.14). Gegenüber $m_{3/2} = 300$ GeV vergrößert sich das erlaubte Intervall der Goldstino–Winkel ein wenig, ansonsten ändert sich nicht viel.

  Bei $\tan\beta = 51.5$ sind nun Lösungen mit $\alpha(T+T^*) \lesssim 10$ möglich und im schwach gekoppelten Fall vergrößert sich das Intervall der erlaubten Goldstino–Winkel auf $0.8 \lesssim \theta \lesssim 2.5$ (Abb. 4.15).

Die aufgezeigten Entwicklungen setzen sich entsprechend fort, bei $m_{3/2} > 500$ GeV aber beginnen die skalaren Massen, 2 TeV deutlich zu überschreiten. Weil so nach und nach das Hierarchieproblem wieder erzeugt wird, ist der Bereich 200 GeV $\lesssim m_{3/2} \lesssim$ 500 GeV phänomenologisch zu bevorzugen.

Für den Fall $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ soll nun etwas genauer auf die Massenspektren eingegangen werden. Für dieses Vorzeichen des μ–Parameters sind gemäß der obigen Diskussion die Masse des leichten Charginos (Abb. 4.13) und bei starker Stringkopplung die Forderung, daß das LSP neutral sein soll, die einschränkenden Kriterien. Die zugehörigen Abbildungen befinden sich im Anhang E.

Zunächst zu den Squarks. Das leichteste Squark ist das $\tilde{t}_1$ (Abb. E.1), das schwerste das $\tilde{u}_L$ (Abb. E.2). Abgesehen von diesen Massenunterschieden gleichen sich die Spektren aller Squarks in ihrer Form. An der Stelle $\theta = \theta_1$ sind die Massen wieder unabhängig von der Stärke der Kopplung, für $\theta < \theta_1$ bilden die Massen bei schwacher Kopplung die untere und für $\theta > \theta_1$ die obere Grenze des Massenspektrums. Bedenkt man, daß die verschiedenen Generationen unterschiedliche modulare Gewichte besitzen und betrachtet man die daraus resultierenden quantitativen und insbesondere qualitativen Unterschiede der Massenspektren auf der Energieskala M_{GUT} (siehe Abschnitt 3.5), so mag die Ähnlichkeit der Spektren von $\tilde{t}_1$ und $\tilde{u}_L$ auf der elektroschwachen Energieskala zunächst verwundern. Sie läßt sich jedoch dadurch erklären, daß die Gauginomassen relativ groß sind und so durch ihre Beiträge in den RGE die Form der Spektren bei M_Z bestimmen. Genauer gesagt geschieht das überall dort, wo M_3 oder zumindest M_2 zu den RGE beitragen. Die Gauginomassen $M_{1,2,3}$ entwickeln sich nämlich gemäß ihrer RGE wie die Kopplungen $\alpha_{1,2,3}$, weshalb — bei ausreichend großen Startwerten — die Beiträge durch M_2 und insbesondere M_3 dominieren, während die Beiträge durch M_1 klein sind. Deshalb besitzen die Spektren der Squarkmassen bei M_Z nicht mehr die Form der Spektren ihrer Startwerte bei M_{GUT}, sondern die der Gauginomassen.

Deutlicher zeigen sich diese Aussagen bei den Massen der Sleptonen. In deren RGE treten nämlich nur M_1 und M_2, in denen der rechtshändigen Sleptonen sogar nur M_1 auf. Deshalb verwundert es nicht, daß sich die Massen von $\tilde{e}_R$ (Abb. E.3), von $\tilde{\mu}_R$ (Abb. E.4) bzw. von $\tilde{\tau}_1$ (Abb. E.5) so verhalten wie die skalaren Massen mit den modularen Gewichten -1, 0 bzw. $+1$ bei M_{GUT} (siehe Abschnitt 3.5). Bei den Massen von $\tilde{e}_L$ (Abb. E.6), von $\tilde{\mu}_L$ (Abb. E.7) und von $\tilde{\tau}_2$ (Abb. E.8) macht sich degegen der Einfluß von M_2 bemerkbar, der aber offensichtlich nicht so dominant ist, wie der von M_3 bei den Squarks. Die Massen der Sneutrinos gleichen im Wesentlichen denen der entsprechenden linkshändigen $SU(2)$ Partner.

Abschließend ist noch das Massenspektrum des leichtesten Neutralinos $\tilde{N}_1$ (Abb. E.9) dargestellt. Im gesamten erlaubten Bereich des $\{\theta, \alpha(T+T^*)\}$–Parameterraumes ist das Neutralino $\tilde{N}_1$ das LSP.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß im Bereich 200 GeV $\lesssim m_{3/2} \lesssim$ 500 GeV für $\tan\beta = 1.8$ ein großer Teil des $(\theta, \alpha(T+T^*))$–Parameterraumes phänomenologisch erlaubt ist, und zwar um so mehr, je schwächer die Stringkopplung ist. Bei positivem μ–Parameter liefert die experimentelle Grenze von $m_{\tilde{C}_1^\pm}$, bei negativen μ die von m_{h^0} eine wichtige Einschränkung. Für $\tan\beta = 51.5$ und $sign(\mu) = +1$ sind weniger Lösungen erlaubt, weil in diesem Fall für einen großen Teil des Parameterraumes das $\tilde{\tau}_1$ zu leicht ist. Bei $\tan\beta = 51.5$ und $sign(\mu) = -1$ ist V_{higgs} instabil und man findet keine physikalischen Lösungen. Grundsätzlich sind die Spektren, sobald Beiträge von M_2 oder insbesondere M_3 in den RGE vorhanden sind, durch die Gauginomassen dominiert.

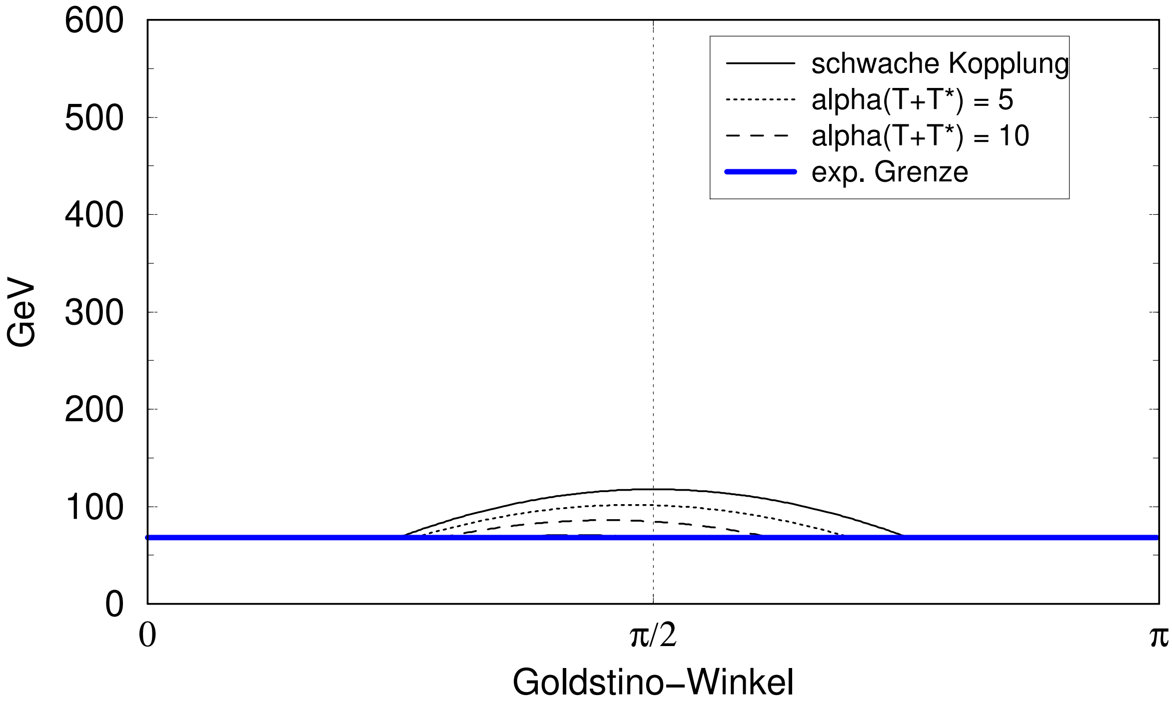

Abbildung 4.7: $m_{\tilde{C}_1^{\pm}}$ für $m_{3/2} = 100$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

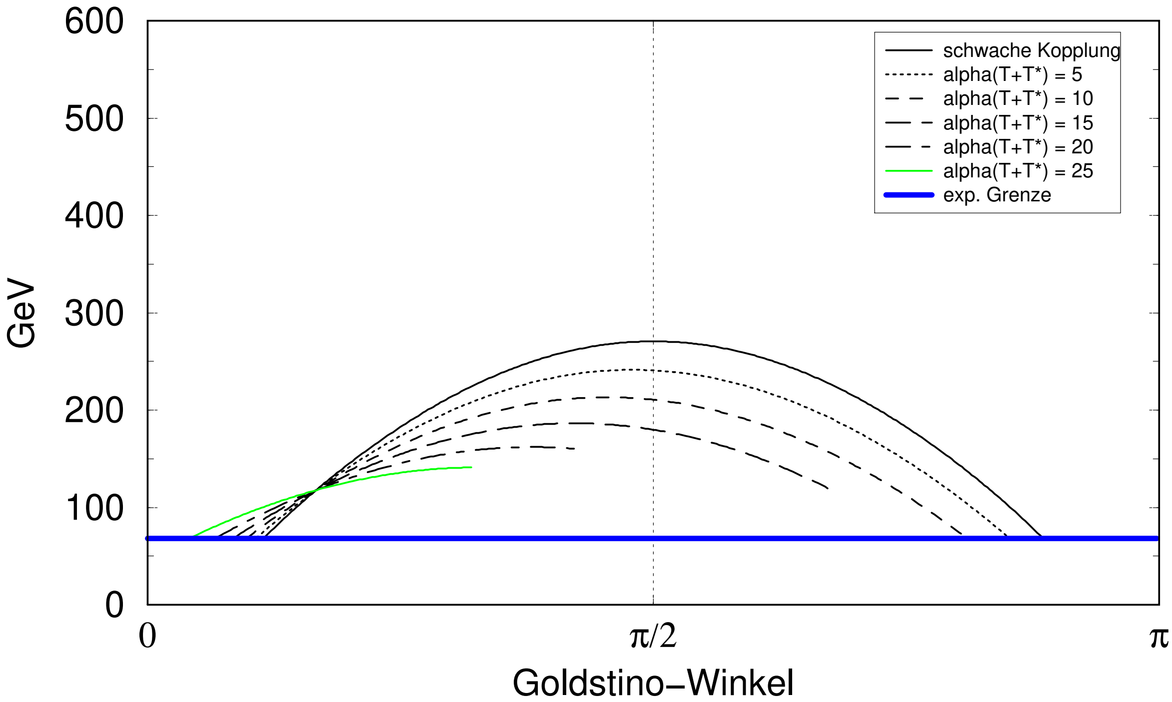

Abbildung 4.8: $m_{\tilde{C}_1^{\pm}}$ für $m_{3/2} = 200$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

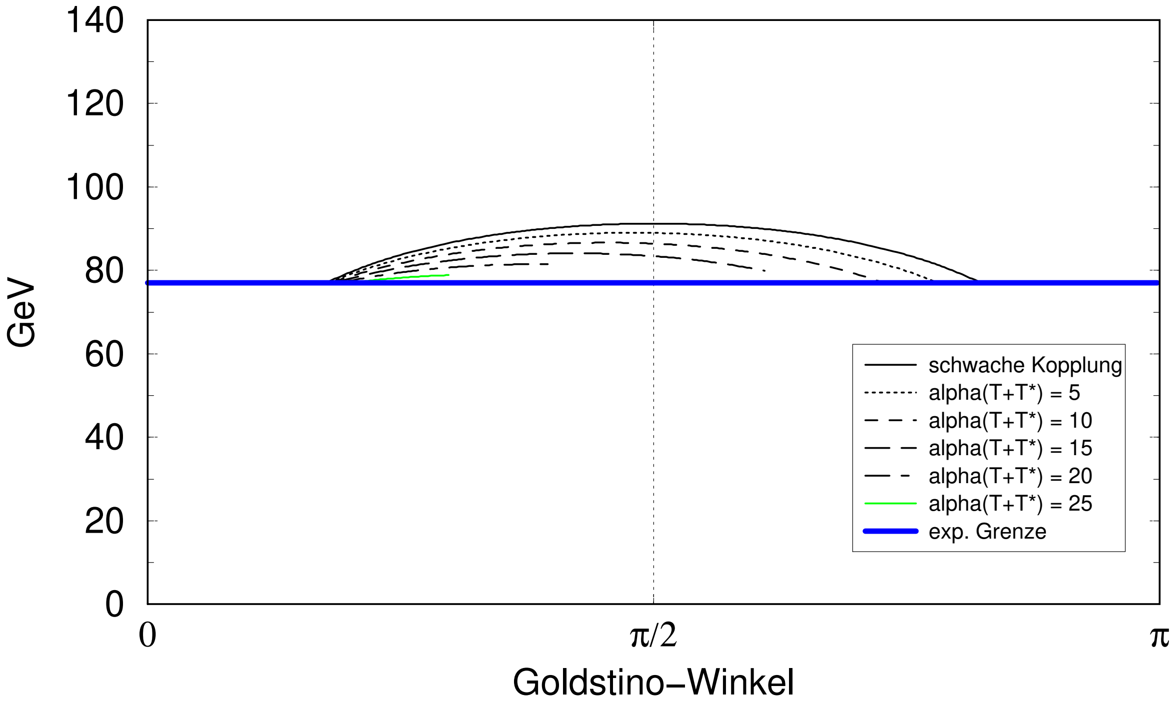

Abbildung 4.9: m_{h^0} für $m_{3/2} = 200$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = -1$.

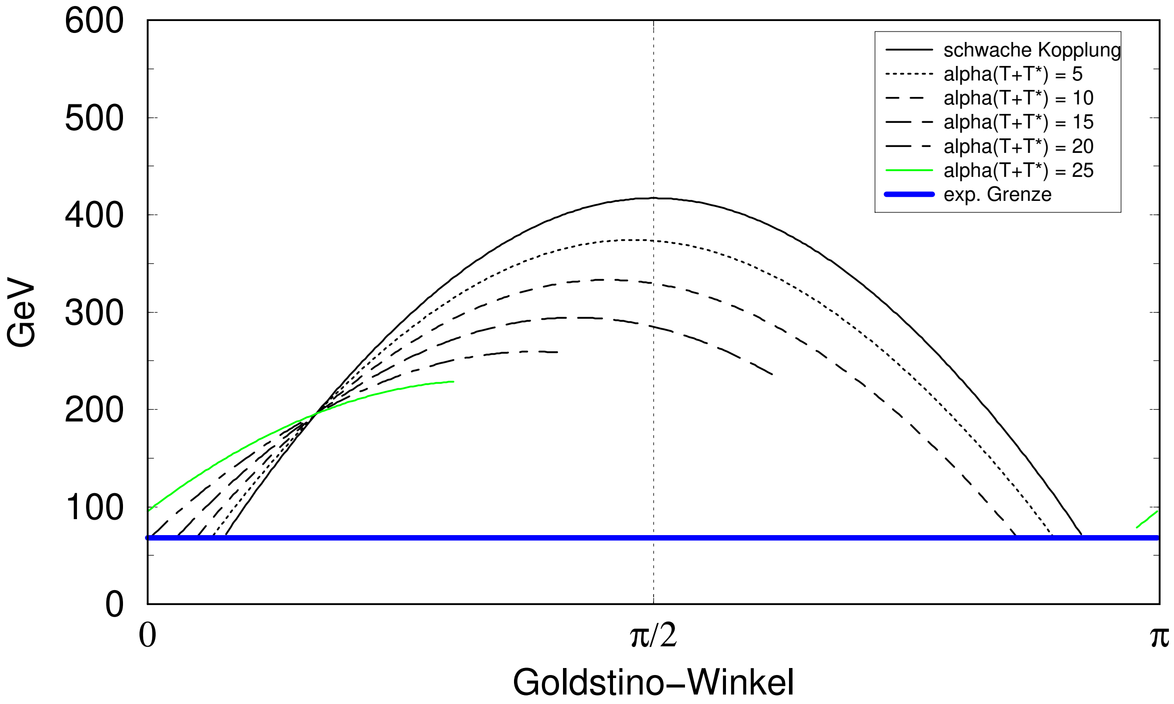

Abbildung 4.10: $m_{\tilde{C}_1^\pm}$ für $m_{3/2} = 300$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

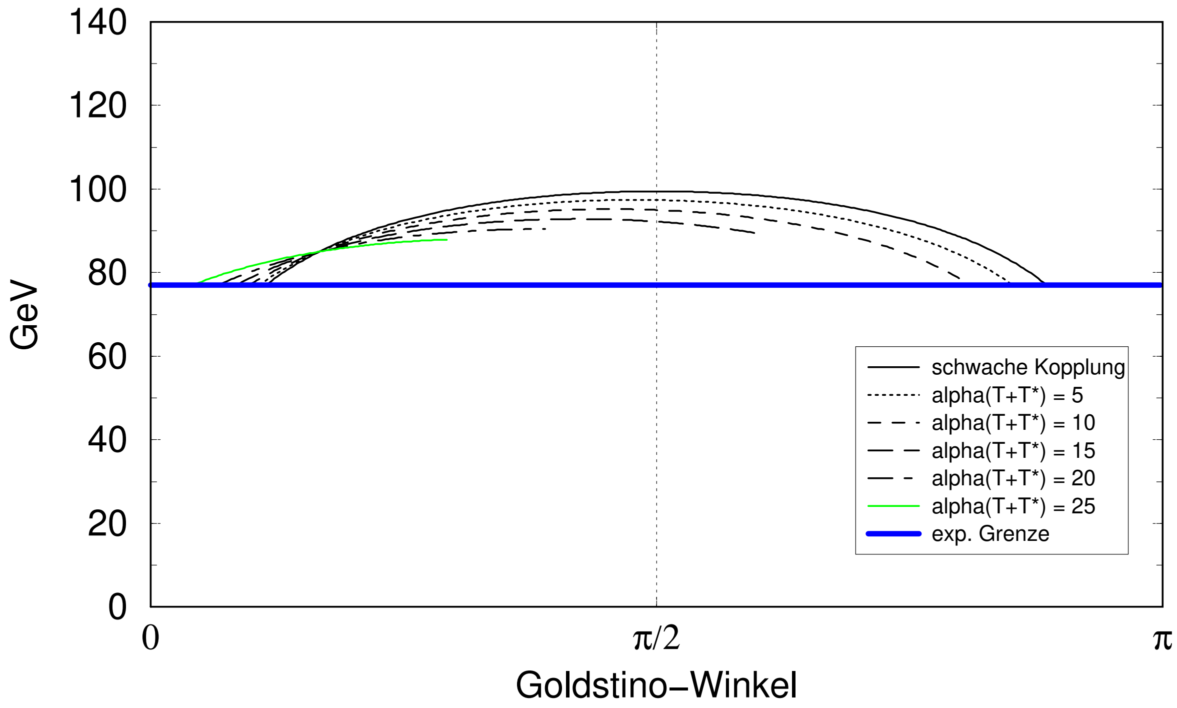

Abbildung 4.11: m_{h^0} für $m_{3/2} = 300$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = -1$.

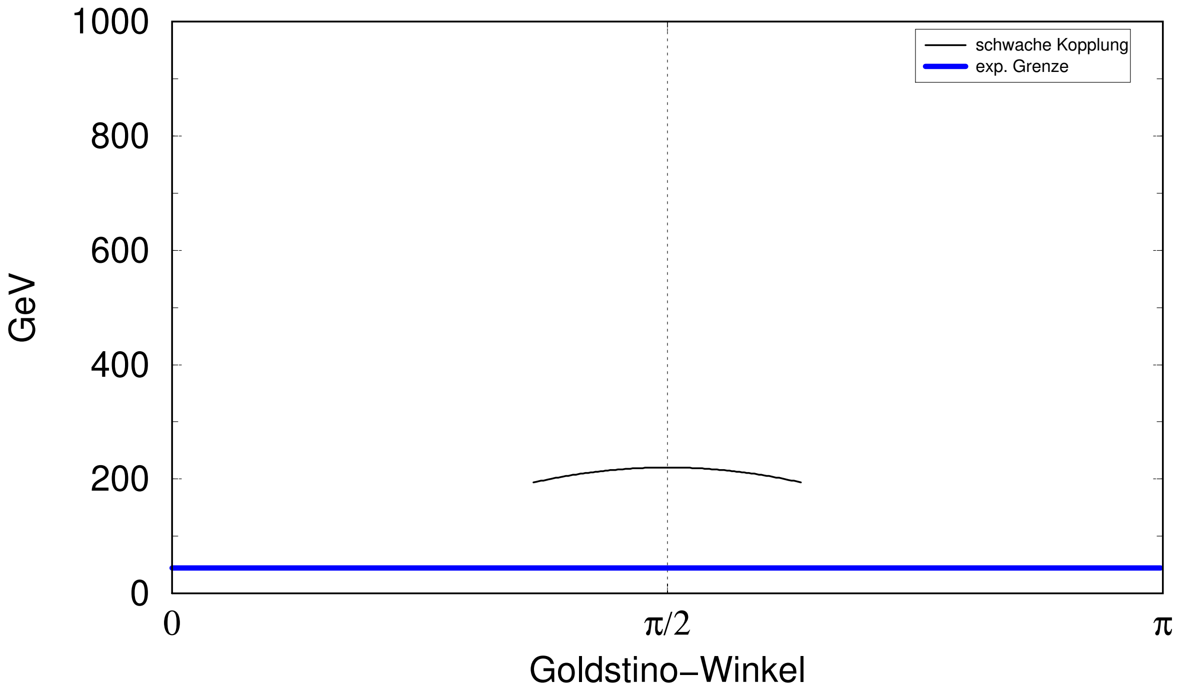

Abbildung 4.12: $m_{\tilde{\tau}_1}$ für $m_{3/2} = 300$ GeV, $\tan\beta = 51.5$ und $sign(\mu) = +1$.

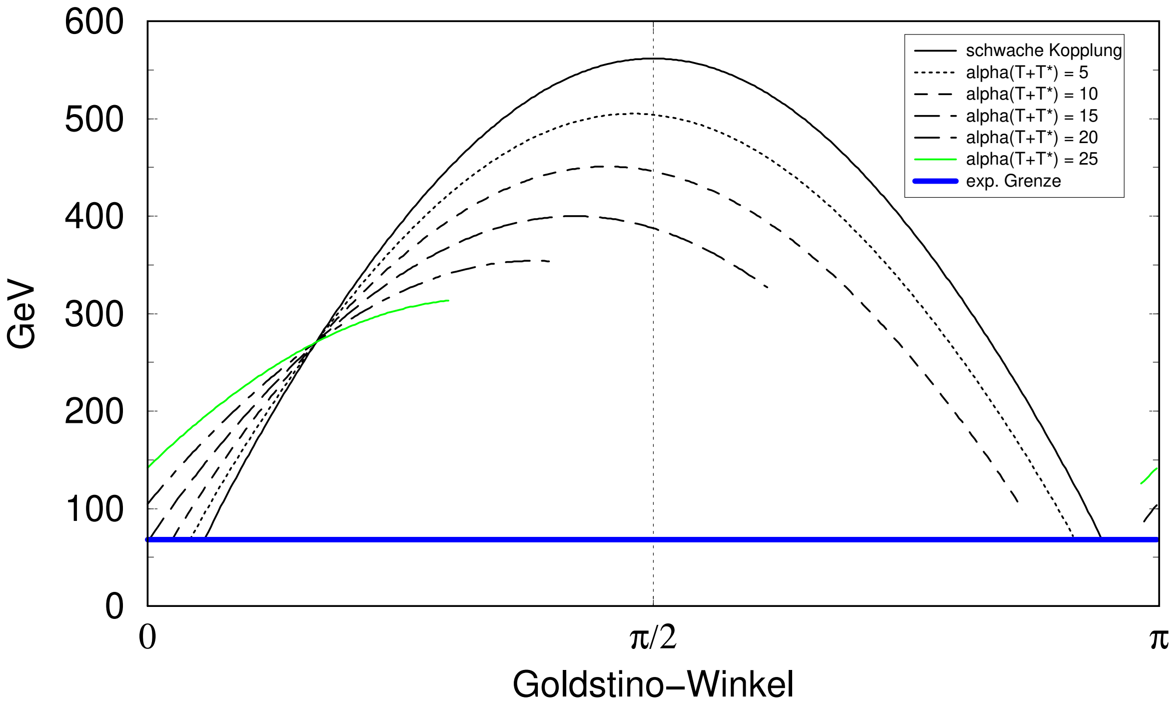

Abbildung 4.13: $m_{\tilde{C}_1^\pm}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

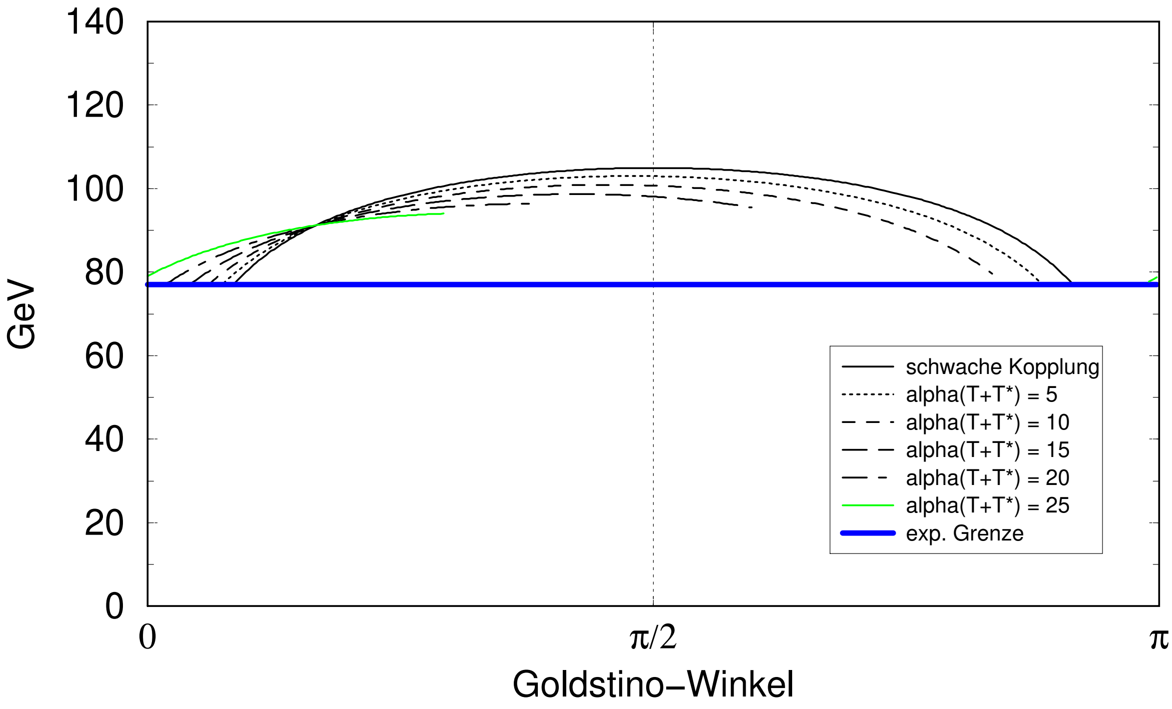

Abbildung 4.14: m_{h^0} für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = -1$.

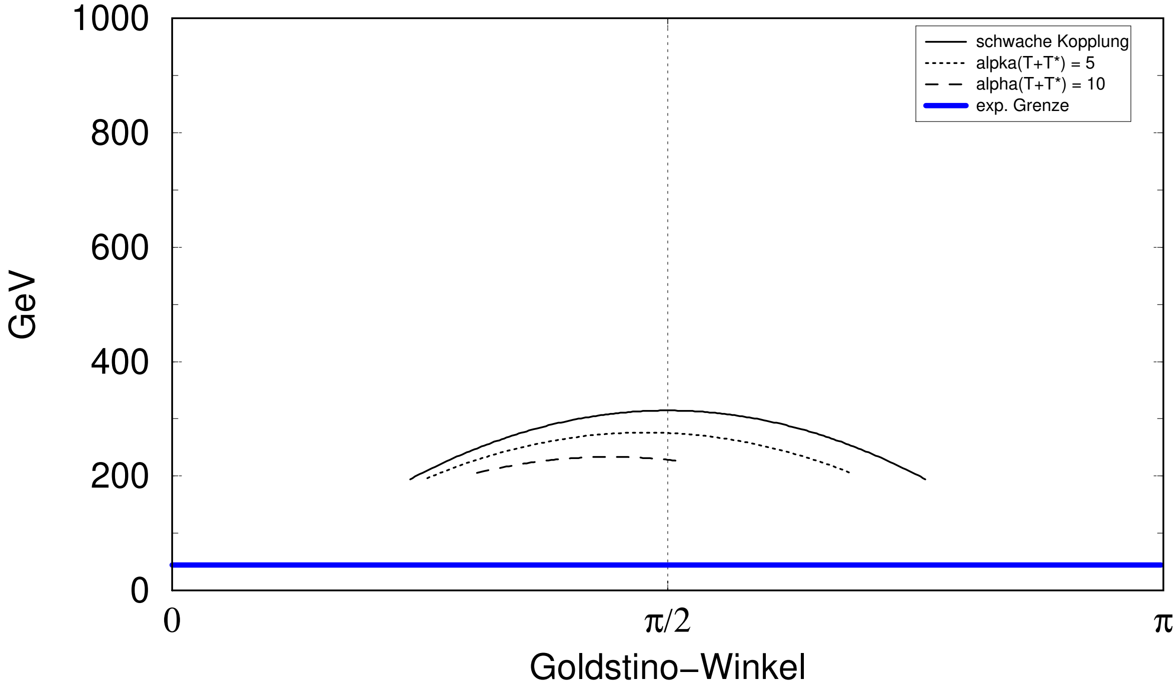

Abbildung 4.15: $m_{\tilde{\tau}_1}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 51.5$ und $sign(\mu) = +1$.

4.6 Flavour–changing neutral currents (FCNC)

In diesem Abschnitt werden die FCNC diskutiert, die sich aus der Nicht–Universalität der skalaren Massen durch die unterschiedlichen modularen Gewichte ergeben. Doch zunächst eine kurze Wiederholung des Glashow–Iliopoulos–Maiani (GIM)–Mechanismus [26].

4.6.1 Der GIM-Mechanismus

Anhand eines kleinen Beispiels, der Einfachheit halber mit 2 Quark–Generationen, soll hier der GIM–Mechanismus im SM rekapituliert werden.

Es ist eine experimetelle Frage, zu klären, ob die Masseneigenzustände gleich den elektroschwachen Eigenzuständen sind. Die experimentelle Antwort ist, daß sie nicht gleich sind. Seien also $\binom{d}{s}_L$ elektroschwache und $\binom{d'}{s'}_L$ Masseneigenzustände[9]. Die allgemeinste Transformation

$$\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L = \mathbf{K} \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}_L \tag{4.12}$$

ist die mit einer unitären 2×2 Matrix $\mathbf{K}$, die i.a. durch drei Winkel θ, α und γ parametrisiert werden kann:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\alpha} & \sin\theta e^{i\gamma} \\ -\sin\theta e^{-i\gamma} & \cos\theta e^{-i\alpha} \end{pmatrix} . \tag{4.13}$$

[9]In diesem Beispiel werden nur die linkshändigen down–Typ Quarks rotiert. Man könnte auch die linshändigen up–Typ Quarks oder beide rotieren, dies führt aber zu keinem anderen Ergebnis. Die Transformation der rechtshändigen Quarks ist davon unabhängig und kann analog durchgeführt werden.

Daraus folgt

$$d_L = e^{i\alpha}\left(d'_L \cos\theta + s'_L \sin\theta e^{i(\gamma-\alpha)}\right) , \tag{4.14}$$

$$s_L = e^{-i\gamma}\left(-d'_L \sin\theta + s'_L \cos\theta e^{i(\gamma-\alpha)}\right) . \tag{4.15}$$

Die relativen Phasen der Quarks kann man redefinieren, ohne die Observablen zu ändern. Multipliziert man also d'_L mit $e^{-i\alpha}$, s'_L mit $e^{i\gamma}$ und s_L mit $e^{-i(\gamma-\alpha)}$, so erhält man

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

und

$$d_L = d'_L \cos\theta + s'_L \sin\theta , \tag{4.17}$$

$$s_L = -d'_L \sin\theta + s'_L \cos\theta . \tag{4.18}$$

$\mathbf{K}$ ist die CKM–Matrix und θ der Cabbibo–Winkel für 2 Quark–Generationen. Der geladene Strom, der an das W-Boson koppelt, lautet

$$\begin{aligned} J^\mu_{charg} &= (\bar{u}_L \;\; \bar{c}_L)\gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} \\ &= \bar{u}_L\gamma^\mu d'_L \cos\theta + \bar{u}_L\gamma^\mu s'_L \sin\theta - \bar{c}_L\gamma^\mu d'_L \sin\theta + \bar{c}_L\gamma^\mu s'_L \cos\theta , \end{aligned} \tag{4.19}$$

so daß durch geladene Ströme — „flavour–changing charged currents“ (FCCC) — die Generation auf dem tree–level geändert werden kann. Dies darf aber aufgrund der experimentellen Ergebnisse bei neutralen Strömen nicht auftreten. Das Z–Boson koppelt an

$$J^\mu_{neutr} = \sum_{f=u,c,d,s} \left(\bar{f}_L\gamma^\mu[T_3 - Q\sin^2\theta_W]f_L + \bar{f}_R\gamma^\mu[-Q\sin^2\theta_W]f_R\right) . \tag{4.20}$$

Nun ersetzt man wieder d_L und s_L gemäß den Gleichungen (4.17) und (4.18) und betrachtet nur die Terme, die sich ändern

$$\begin{aligned} &(\bar{d}'_L\cos\theta + \bar{s}'_L\sin\theta)\gamma^\mu[T_3 - Q\sin^2\theta_W](d'_L\cos\theta + s'_L\sin\theta) \\ &\qquad + (-\bar{d}'_L\sin\theta + \bar{s}'_L\cos\theta)\gamma^\mu[T_3 - Q\sin^2\theta_W](-d'_L\sin\theta + s'_L\cos\theta) \\ &= \bar{d}'_L\gamma^\mu[T_3 - Q\sin^2\theta_W]d'_L(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &\qquad + \bar{s}'_L\gamma^\mu[T_3 - Q\sin^2\theta_W]s'_L(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &\qquad + \bar{d}'_L\gamma^\mu[T_3 - Q\sin^2\theta_W]s'_L(\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta) \\ &\qquad + \bar{s}'_L\gamma^\mu[T_3 - Q\sin^2\theta_W]d'_L(\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta) \\ &= \sum_{f=d',s'} \left(\bar{f}_L\gamma^\mu[T_3 - Q\sin^2\theta_W]f_L + \bar{f}_R\gamma^\mu[-Q\sin^2\theta_W]f_R\right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

und man erkennt, daß der neutrale Strom sowohl in der elektroschwachen, als auch in der Massenbasis diagonal ist, daß also die FCNC auf dem tree–level verschwinden. Das Ganze funktioniert genauso für 3 Generationen. Dies nennt man den GIM–Mechanismus[10].

[10] Den GIM–Mechanismus muß man im historischen Zusammenhang betrachten: Als nur die drei Quarks u, d, s bekannt waren, war der GIM–Mechanismus ein wichtiges Argument, die Existenz eines vierten Quarks zu vermuten.

4.6.2 FCNC und SUSY

In diesem Abschnitt erfolgt eine Diskussion der FCNC, wenn man SUSY einführt, anhand der Quarks und Squarks. Analoge Aussagen gelten für die Leptonen und Sleptonen.

Möchte man beide Quark–Massenmatrizen $\mathbf{m}_u$ und $\mathbf{m}_d$ simultan diagonalisieren[11], so benötigt man i.a. zwei unterschiedliche biunitäre Transformationen

$$\mathbf{U}_R^{u\dagger}\mathbf{m}_u\mathbf{U}_L^u = diag\,(m_u, m_c, m_t) \ , \qquad \mathbf{U}_R^{d\dagger}\mathbf{m}_d\mathbf{U}_L^d = diag\,(m_d, m_s, m_b) \ , \tag{4.22}$$

dies entspricht wieder einer Rotation der Quark–Felder

$$d_{L,R} = \mathbf{U}_{L,R}^d d'_{L,R} \ , \qquad u_{L,R} = \mathbf{U}_{L,R}^u u'_{L,R} \ , \tag{4.23}$$

die, wie im vorigen Abschnitt gezeigt, den neutralen Strom diagonal läßt. Die CKM (Cabbibo–Kobayashi–Maskawa)–Matrix lautet $\mathbf{K} = \mathbf{U}_L^{u\dagger}\mathbf{U}_L^d$. Durch die Einführung von SUSY erhält man nun neutrale Vertizes mit Quarks, Squarks und Gauginos, so z.B. q — $\tilde{q}$ — $\tilde{g}$, die in der elektroschwachen Basis diagonal bzgl. der Familien sind. Rotiert man nun die Quarks mittels den Transformationen (4.23) in die Massenbasis, dann muß man die Squarks simultan transformieren, damit die neutralen Vertizes diagonal bleiben:

$$\tilde{d}_{L,R} = \mathbf{U}_{L,R}^d \tilde{d}'_{L,R} \ , \qquad \tilde{u}_{L,R} = \mathbf{U}_{L,R}^u \tilde{u}'_{L,R} \ . \tag{4.24}$$

Dadurch transformieren sich die Massenmatrizen der Squarks in den weich brechenden Termen aus (2.29) analog und sind gegeben durch

$$\mathbf{U}_{L,R}^{q\dagger}\tilde{\mathbf{m}}^2_{\tilde{q}_{L,R}}\mathbf{U}_{L,R}^q. \tag{4.25}$$

Diese sind nicht mehr diagonal in den Generationen, außer in zwei Spezialfällen: $\tilde{\mathbf{m}}^2_{\tilde{q}_{L,R}} \propto \mathbb{1}$ („Universalität“) oder die Quark– und Squark–Massenmatrizen sind in der gleichen Basis diagonal („Alignment“). Im allgemeinen erhält man Matrixelemente $(\Delta_{ij})_{AB}$ außerhalb der Diagonalen, die Übergänge zwischen Squarks der Generation i und Händigkeit A und Squarks der Generation j und Händigkeit B erzeugen. Für diese Δ's existieren starke experimentelle Grenzen aus FCNC–Prozessen [25, 41]. Möchte man aber die Δ's aus dem Massenspektrum berechnen, so muß man die Yukawa–Matrizen und Mischungswinkel aus der fundamentalen Theorie berechnen. Dies ist aber nicht ohne größeren Aufwand möglich, so daß eine solche Berechnung hier zu weit führen würde. Man kann lediglich feststellen, daß man ohne Universalität der skalaren Massen eine besondere Konstellation der Mischungswinkel benötigt, um nicht mit den starken experimentellen Grenzen an die Nicht–Diagonalelemente in Konflikt zu geraten (siehe Beispiel unten).

Bei Nicht–Universalität der skalaren Massen werden aber auch FCNC durch Differenzen der Diagonalelemente erzeugt, die weniger stark von den Mischungswinkeln abhängen. Für diese existieren ebenfalls experimentelle Grenzen [41]

$$\frac{|m^2_{\tilde{q}_{1L}} - m^2_{\tilde{q}_{2L}}|}{\frac{1}{2}(m^2_{\tilde{q}_{1L}} + m^2_{\tilde{q}_{2L}})} \times \frac{1\mathrm{TeV}}{m_{max}} \lesssim 1 \ , \tag{4.26}$$

wobei m_{max} das Maximum aus den jeweiligen Squarkmassen und der Gluinomasse ist. Solche Grenzen existieren auch für die relativen Massenunterschiede zur 3. Generation, sie sind aber wesentlich schwächer.

[11] „u“ und „d“ stehen hier für up–Typ und down–Typ Quarks.

Zur Verdeutlichung eine kleines Beispiel: Angenommen, die fundamentale Theorie liefere eine Basis, so daß $\mathbf{U}_L^d = \mathbf{K}$, die CKM–Matrix. Man betrachte nun die transformierte Massenmatrix der linkshändigen Squarks (der Index „LL“ wird weggelassen)

$$\mathbf{M}_d^2 = \mathbf{K}^\dagger \tilde{\mathbf{m}}_{\tilde{q}_L}^2 \mathbf{K} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{d}_1}^2 & \Delta_d^{12} & \Delta_d^{13} \\ \Delta_d^{21} & m_{\tilde{d}_2}^2 & \Delta_d^{23} \\ \Delta_d^{31} & \Delta_d^{32} & m_{\tilde{d}_3}^2 \end{pmatrix} . \tag{4.27}$$

Es liege die Konstellation $\tilde{\mathbf{m}}_{\tilde{q}_L} = \mathrm{diag}(700\ \mathrm{GeV},\ 600\ \mathrm{GeV},\ 500\ \mathrm{GeV})$ vor, die die experimentelle Grenze (4.26) respektiert. Für das Nicht–Diagonalelement Δ_d^{12} existert z.B. die experimentelle Grenze [41]

$$\delta_d^{12} = \frac{\Delta_d^{12}}{m_{\tilde{d}_1} m_{\tilde{d}_2}} \times \frac{1\mathrm{TeV}}{m_{max}} \lesssim 0.08 . \tag{4.28}$$

In der vorliegenden Konstellation ergibt sich $\delta_d^{12} \approx 0.4$, d.h. (4.28) wird deutlich verletzt. Weil aber im Rahmen dieser Arbeit die tatsächlich vorliegenden Mischungswinkel nicht berechnet werden können, soll im Folgenden die experimentelle Grenze (4.26) diskutiert werden. Das Beispiel verdeutlicht aber, daß eine besondere Konstellation der Mischungswinkel vorliegen muß, damit bei Nicht–Universalität der skalaren Massen die Nicht–Diagonalelemente der rotierten skalaren Massen–Matrizen ausreichend klein sind.

4.6.3 Diskussion der FCNC durch verschiedene modulare Gewichte

In diesem Abschnitt wird diskutiert, inwiefern die experimentelle Grenze (4.26) eine Einschränkung an den Parameterraum darstellt. Zunächst wird wieder die Zuordnung der modularen Gewichte aus Tabelle 4.8 gewählt. Außerdem wird die Diskussion auf $m_{3/2} = 200$ und 500 GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ beschränkt, weil für diese Wahl von $\tan\beta$ und $sign(\mu)$, wie in Abschnitt 4.5 herausgestellt, die meisten phänomenologisch erlaubten Lösungen im $\{\theta, \alpha(T+T^*)\}$–Parameterraum existieren.

Man betrachte zunächst die FCNC für $m_{3/2} = 200$ GeV (Abb. 4.16). Die experimentelle Grenze ist gemäß (4.26) auf 1 normiert. Man erkennt wieder eine leichte Auffächerung bzgl. der Stringkopplung und den Schnittpunkt bei $\theta = \theta_1$. Für $\theta < \theta_1$ sind die FCNC umso kleiner, je größer die Stringkopplung ist. Das liegt daran, daß für diese Goldstino–Winkel bei starker Stringkopplung $m_{\tilde{q}_{1L}}$ und $m_{\tilde{q}_{2L}}$ größer sind und somit der relative Unterschied der Massenquadrate kleiner ist. Bedenkt man aber, daß diese beiden Skalare die modularen Gewichte +1 bzw. 0 besitzen und deshalb bei M_{GUT} so gut wie keine Abhängigkeit von der Stärke der Stringkopplung besitzen, so ist klar, daß dieses Verhalten wieder durch die Gaugino–Massen erzeugt sein muß.

Außerdem sieht man, daß die FCNC im Dilaton–dominierten Fall ($\theta = \pi/2$) stark unterdrückt sind. Dieser Effekt ist darauf zurückzuführen, daß das Dilaton universell koppelt. Im Falle schwacher Stringkopplung sind die skalaren Massen verschiedener modularer Gewichte bei $\cos\theta = 0$ sogar gleich und die FCNC verschwinden. Im Falle starker Stringkopplung unterscheiden sich die skalaren Massen mit modularem Gewicht 0 und +1 bei M_{GUT} nur sehr wenig, so daß hier die FCNC fast verschwinden. Für $\theta \searrow 0$ und $\theta \nearrow \pi$ steigen die FCNC entsprechend stark an — ohne aber die experimentelle Grenze zu verletzen — denn dort sind die skalaren Massen mit modularem Gewicht 0 und +1 bei M_{GUT} verschieden und die

Gaugino–Masse ist relativ klein. Rein Modulus–dominierte SUSY–Brechung tritt hier wegen der Einschränkungen aus Abschnitt 4.2 nicht auf und nur für $\theta \lesssim 1$ sind Lösungen für alle Kopplungsstärken erlaubt.

Betrachtet man nun die FCNC bei einer Gravitino–Masse von $m_{3/2} = 500$ GeV (Abb. 4.17), so erkennt man, daß aufgrund der allgemein größeren Massen die FCNC für jeden Goldstino–Winkel stärker unterdrückt sind. Der erlaubte Parameterraum ist nun größer als bei $m_{3/2} = 200$ GeV, so daß z.B. im Falle starker Kopplung $\theta = 0$ erlaubt ist. Dennoch wird die experimentelle Grenze für die FCNC nicht überschritten, weil die kritischen Bereiche des Parameterraumes bei schwacher Stringkopplung schon durch andere experimentelle Grenzen verboten sind. Man macht dabei die interessante Beobachtung, daß für $\theta = 0$ im Falle starker Stringkopplung die Massendifferenz zwischen den ersten beiden Generationen durch die relativ große Gaugino–Masse ausreichend unterdrückt wird.

Für größere Gravitino–Massen setzt sich diese Entwicklung fort, ohne daß die experimentelle Grenze für die FCNC überschritten wird. Man kann also feststellen, daß die FCNC durch (4.26) keine weitere Einschränkung an den hier diskutierten Parameterraum liefern.

Dazu müßte eine größere Massendifferenz zwischen den skalaren Massen der ersten beiden Familien vorliegen. Um dies zu erreichen, kann man statt der Zuordnung der modularen Gewichte gemäß Tabelle (4.8) z.B. die folgende Zuordnung wählen[12]:

skalare Massen	modulares Gewicht
1.Familie	$n_1 = +1$
2.Familie	$n_2 = -1$
3.Familie	$n_3 = -1$
Higgs	$n_H = -1$

, (4.29)

womit die Massenhierarchie aufgegeben wird. In diesem Fall können die skalaren Massen der zweiten Generation im Vergleich zur ersten Generation sehr klein werden.

Man betrachte zunächst die Ergebnisse für $m_{3/2} = 200$ GeV (Abb. 4.18). Wie erwartet, sind die FCNC nun größer und die experimentelle Grenze ist für $\theta \searrow 0$ und $\theta \nearrow \pi$ verletzt.

Bei schwacher Kopplung verschwinden die FCNC im Dilaton–dominierten Fall wieder, weil die skalaren Massen verschiedener modularer Gewichte gleich sind. Bei starker Stringkopplung aber können nun im Dilaton–dominierten Fall große Massenunterschiede zwischen den Skalaren der ersten beiden Generationen auftreten. Dennoch werden die FCNC ausreichend unterdrückt, weil die Gauginomassen dort relativ groß sind und durch ihre Beiträge in den RGE den relativen Unterschied der Massenquadrate der ersten beiden Generationen genügend verkleinern.

Für $\theta \searrow 0$ werden nun — besonders bei schwacher Stringkopplung — die Massenunterschiede der ersten beiden Generationen bei M_{GUT} sehr groß. Weil gleichzeitig — besonders bei schwacher Stringkopplung — die Gaugino–Massen relativ klein werden und somit entsprechend weniger in den RGE der skalaren Massen beitragen, steigen die FCNC stark an und die experimentelle Grenze wird überschritten.

Deutlicher wird dieses Verhalten bei einer größeren Gravitino–Masse von $m_{3/2} = 500$ GeV (Abb. 4.19). Wegen der allgemein schwereren Teilchen sind die FCNC für jeden Goldstino–Winkel im Vergleich zu $m_{3/2} = 200$ GeV wieder stärker unterdrückt. Aber der erlaubte

[12] Diese Wahl ist motiviert durch den möglichst großen Massenunterschied zwischen den Skalaren der 1. und 2. Generation und wieder durch einen möglichst großen erlaubten Bereich des $\{\theta, \alpha(T+T^*)\}$–Parameterraumes.

Parameterraum ist nun größer, so daß für $\theta \searrow 0$ und $\theta \nearrow \pi$ größere FCNC auftreten, die die experimentelle Grenze deutlicher verletzen. Interessant ist, daß bei $\theta = 0$ im Falle starker Stringkopplung die skalaren Massen mit modularem Gewicht -1 und die Gaugino–Massen groß genug sind, um die FCNC ausreichend zu unterdrücken.

Mit der Zuordnung der modularen Gewichte gemäß Tabelle 4.29 konnte also eine Konstellation gefunden werden, in der die experimentelle Grenze (4.26) eine weitere Einschränkung des Parametrraumes liefert.

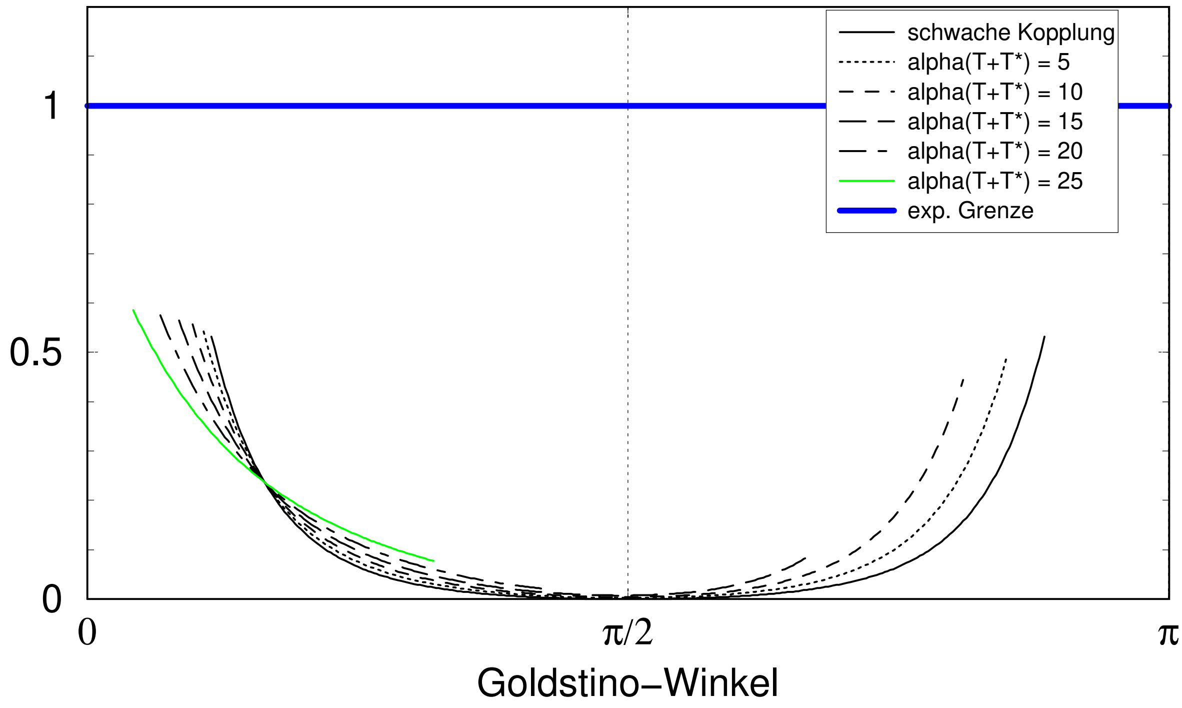

Abbildung 4.16: FCNC für $m_{3/2} = 200$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

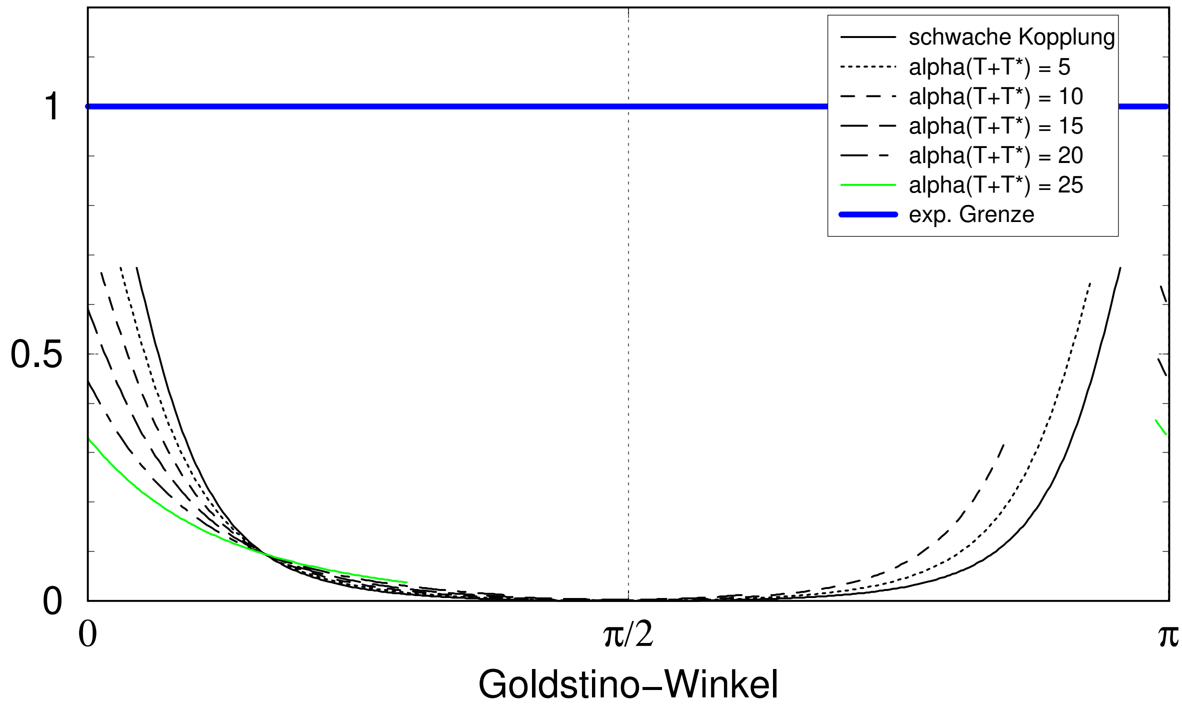

Abbildung 4.17: FCNC für $m_{3/2} = 500$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

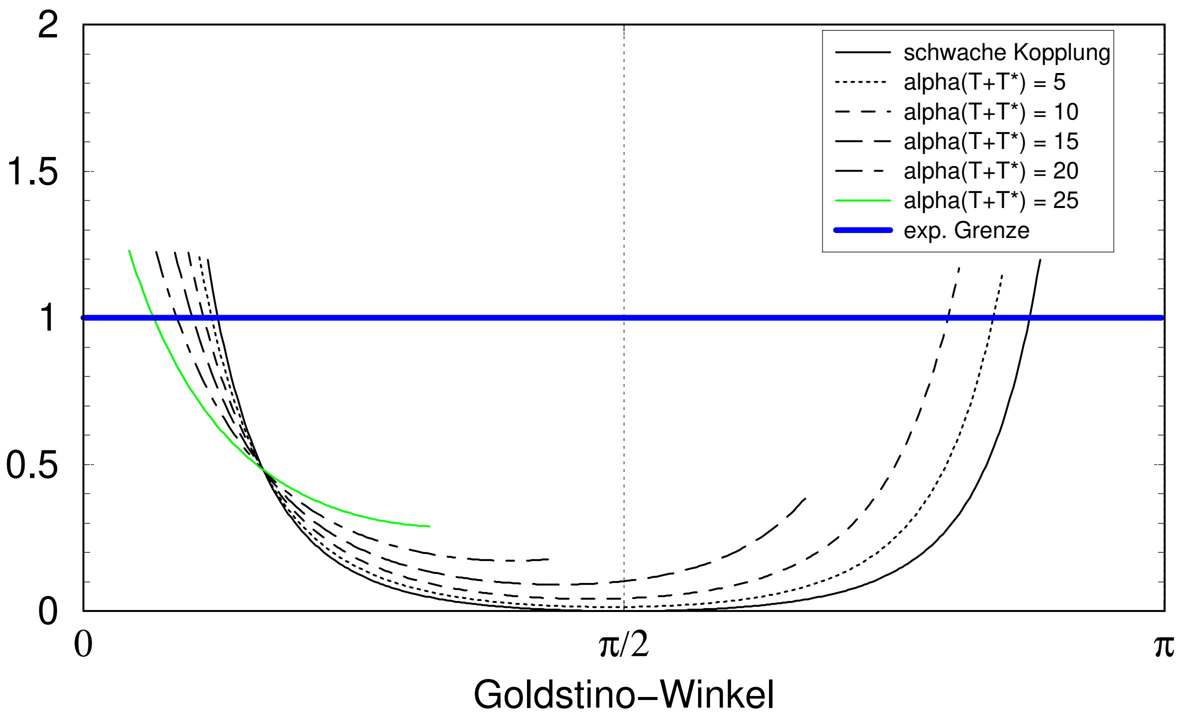

Abbildung 4.18: FCNC für $m_{3/2} = 200$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ mit modularen Gewichten $(n_1, n_2, n_3, n_H) = (+1, -1, -1, -1)$.

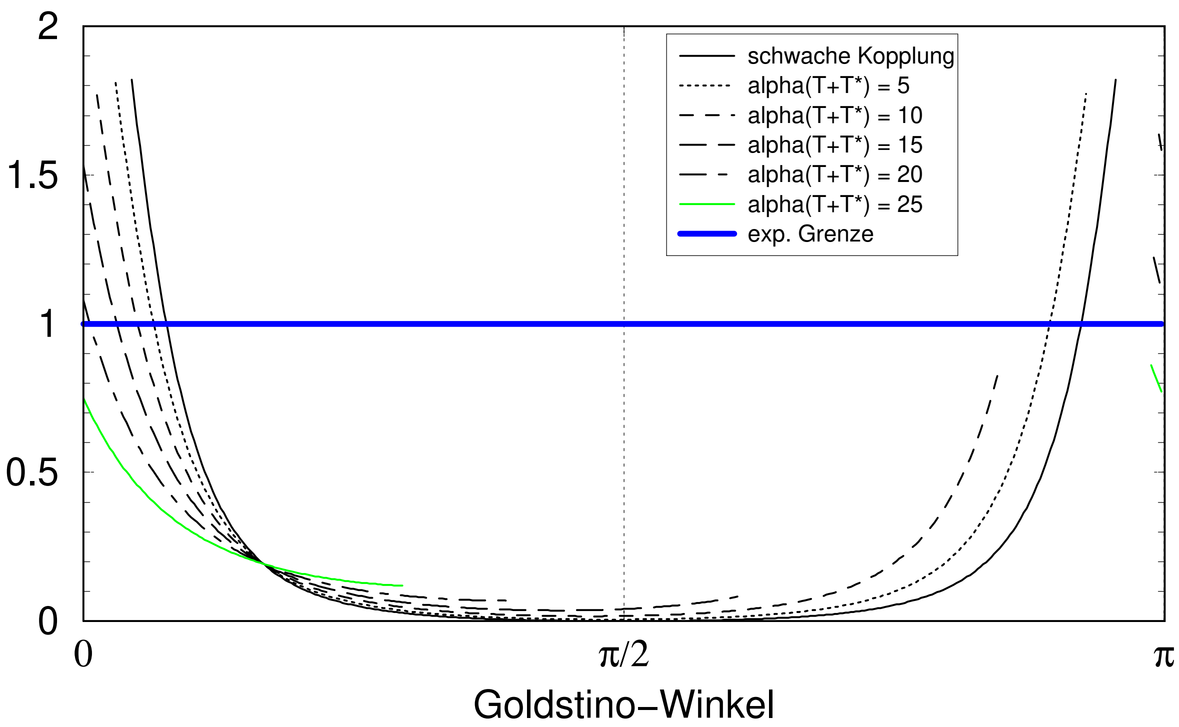

Abbildung 4.19: FCNC für $m_{3/2} = 500$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ mit modularen Gewichten $(n_1, n_2, n_3, n_H) = (+1, -1, -1, -1)$.

4.7 Zusammenfassung

Die Diskussion der phänomenologischen Aspekte des in dieser Arbeit betrachteten Modells läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Die niederenergetischen Massenspektren werden durch die großen Beiträge der Gaugino–Massen dominiert. Die modularen Gewichte werden gemäß $(n_1, n_2, n_3, n_H) = (+1, 0, -1, -1)$ auf die Skalare der drei Generationen bzw. des Higgs–Sektors verteilt. Dabei tritt auf der Energieskala M_{GUT} eine nennenswerte Abhängigkeit von der Stärke der String–Kopplung nur für das modulare Gewicht -1 und die Gaugino–Masse auf. Beiträge der Gaugino–Massen M_2 und insbesondere M_3 in den RGE erzeugen eine solche Abhängigkeit auf der schwachen Energieskala auch für die anderen Teilchenmassen.

- Um überhaupt phänomenologisch erlaubte Lösungen zu erhalten, sollte die Gravitino–Masse $m_{3/2}$ größer als ca. 200 GeV sein. Wenn man andererseits — wegen einer Wiedereinführung des Hierarchie–Problems — keine Teilchenmassen erhalten möchte, die $\mathcal{O}(1\text{TeV})$ deutlich überschreiten, sollte $m_{3/2}$ nicht wesentlich größer als 500 GeV sein.

- Bei $\theta = \arctan(1/\sqrt{3})$ ist die Phänomenologie (fast) unabhängig von der Stärke der Stringkopplung. Das läßt sich dadurch erkären, daß dieses Verhalten für die Gaugino–Masse und für die skalaren Massen mit modularem Gewicht -1 auftritt und die skalaren Massen mit modularem Gewicht 0 und $+1$ kaum eine Abhängigkeit von der Stringkopplung aufweisen. Es ist aber fraglich, ob dieser Effekt auch bei Berücksichtigung der 2–loop Korrekturen des Kähler–Potentials erhalten bleibt.

- Für $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ ist der erlaubte Parameterraum besonders groß. Die stärksten Einschränkungen liefern hier die experimentelle Grenze für die Masse des leichten Charginos $m_{\tilde{C}_1^\pm}$ sowie — bei starker Stringkopplung — die Forderung der Neutralität des LSP.

- Für $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = -1$ ist der erlaubte Parameterraum etwas kleiner. Die wesentlichen Einschränkungen sind hier die Masse des leichten Higgs–Bososns m_{h^0} und wieder die Neutralität des LSP.

- Für $\tan\beta = 51.5$ und $sign(\mu) = +1$ sind wesentlich weniger Lösungen erlaubt, weil in diesem Fall das leichte Stau $\tilde{\tau}_1$ für große Bereiche des Parameterraumes das LSP bildet. Damit wäre aber das LSP elektrisch geladen.

- Für $\tan\beta = 51.5$ und $sign(\mu) = -1$ können keine Lösungen gefunden werden, weil das Higgs–Potential instabil ist.

- Im gesamten erlaubten Parameterraum ist das leichte Neutralino $\tilde{N}_1$ das LSP.

- Grundsätzlich gilt: Für eine sinnvolle Diskussion der Phänomenologie müssen die 1–loop–Korrekturen des Higgs–Potentials berücksichtigt werden.

Abschließend wird untersucht, inwiefern die experimentelle Grenze durch FCNC für die Differenz der Diagonalelemente der Squark–Massenmatrix

$$\frac{|m^2_{\tilde{q}_{1L}} - m^2_{\tilde{q}_{2L}}|}{\frac{1}{2}(m^2_{\tilde{q}_{1L}} + m^2_{\tilde{q}_{2L}})} \times \frac{1\text{TeV}}{m_{max}} \lesssim 1$$

weitere Einschränkungen des Parameterraumes liefert.

- Bei der Zuordnung der modularen Gewichte gemäß $(n_1, n_2, n_3, n_H) = (+1, 0, -1, -1)$ bedeutet diese Grenze keine weitere Einschränkung, weil die kritischen Bereiche des Parameterraumes bei Modulus–dominierter SUSY–Brechung ($\sin\theta = 0$) und schwacher Stringkopplung schon durch andere experimentelle Grenzen ausgeschlossen sind.
- Erzeugt man aber durch die Zuordnung $(n_1, n_2, n_3, n_H) = (+1, -1, -1, -1)$ eine noch größere Massendifferenz zwischen den ersten beiden Generationen der Skalare, dann übersteigen die FCNC die experimentelle Grenze und der Parameterraum wird zusätzlich in der Umgebung der Modulus–dominierten SUSY–Brechung eingeschränkt. Bei einer genügend großen Gravitino–Masse von $m_{3/2} = 500$ GeV stellt man fest, daß für starke Stringkopplung auch bei $\sin\theta = 0$ die FCNC ausreichend unterdrückt sind.

Abschließend sei nochmals darauf hingewiesen, daß ein realistisches Modell u.a. die Mischungswinkel zwischen elektroschwacher und Massenbasis vorhersagen müßte. Bei nichtvorhandenener Universalität der skalaren Massen — so wie im betrachteten Modell — werden dann aber i.a. Probleme durch FCNC aus den Nicht–Diagonalelementen der skalaren Massenmatrizen auftreten, es sei denn, es liegt eine besondere Konstellation der Mischungswinkel vor (Alignment).

Anhang A

Notation 2–komponentiger Spinoren

In diesem Anhang soll die Notation 2–komponentiger Spinoren zusammengefaßt werden, denn diese sind die natürliche Darstellung der Lorentz–Gruppe in Theorien mit chiralen Fermionen, wie z.B. im SM oder in SUSY-Theorien. Der Grund dafür ist, daß die Gruppe $SL(2,C)$ die Überdeckungsgruppe der Lorentzgruppe $SO(1,3)$ ist. Die Notation in diesem Anhang entspricht der in [3]. Die Komponenten von Spinoren sind antikommutierende Objekte, auch Grassmann–Zahlen genannt. Für die im Folgenden verwendeten Indizes gilt α, β, $\ldots \in \{1,2\}$ und μ, ν, $\ldots \in \{1,\ldots,4\}$.

Sei also M eine 2×2 Matrix aus $SL(2,C)$. Dann sind auch die komplex konjugierte M^*, die inverse transponierte $(M^T)^{-1}$ und die inverse hermitesch konjugierte $(M^\dagger)^{-1}$ Darstellungen der $SL(2,C)$. 2–komponentige Spinoren mit oberen und unteren gepunkteten und ungepunkteten Indizes sind nun über ihr Transformationsverhalten unter der Gruppe $SL(2,C)$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha &= M_\alpha{}^\beta\,\psi_\beta & \bar\psi'_{\dot\alpha} &= M^*{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\,\bar\psi_{\dot\beta}\ , \\ \psi'^\alpha &= M^{-1}{}_\beta{}^\alpha\,\psi^\beta & \bar\psi'^{\dot\alpha} &= (M^*)^{-1}{}_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha}\,\bar\psi^{\dot\beta}\ . \end{aligned} \tag{A.1}$$

Spinoren mit gepunkteten Indizes transformieren also in der $(0,\frac{1}{2})$, die mit ungepunkteten Indizes in der $(\frac{1}{2},0)$ — der konjugierten — Darstellung der Lorentz–Gruppe. Der Zusammenhang mit der Lorentz–Gruppe ist gegeben durch die σ–Matrizen

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Die σ–Matrizen bilden eine Basis der hermiteschen 2×2–Matrizen, also

$$P \equiv (p_\mu \sigma^\mu) = \begin{pmatrix} -p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_0 - p_3 \end{pmatrix}\ , \tag{A.3}$$

so daß jede hermitesche Matrix mit reellen p_μ entwickelt werden kann. Für jede hermitesche Matrix P erhält man durch die folgende Transformation eine weitere hermitesche Matrix

$$P' = MPM^\dagger \ . \tag{A.4}$$

Die Darstellung dieser Gleichung in der Basis der σ–Matrizen lautet

$$(\sigma^\mu p'_\mu) = M(\sigma^\mu p_\mu)M^\dagger \tag{A.5}$$

mit reellen p_μ und p'_μ. Aus det $M = 1$ folgt, daß die Koeffizienten p_μ und p'_μ über eine Lorentz-Transformation zusammenhängen

$$\det(\sigma^\mu p'_\mu) = \det(\sigma^\mu p_\mu) = {p'_0}^2 - \vec{p}\,'^{\,2} = p_0^2 - \vec{p}^{\,2} \ . \tag{A.6}$$

Die Index–Struktur der σ–Matrizen lautet explizit $\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}$ und die Größen $\psi^\alpha\psi_\alpha$, $\bar\psi_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha}$ und $\psi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\psi^{\dot\alpha}$ sind offensichtlich Lorentz–Skalare. Außerdem sind die antisymmetrischen Tensoren $\epsilon^{\alpha\beta}$ und $\epsilon_{\alpha\beta}$ mit $\epsilon_{21} = \epsilon^{12} = 1$, $\epsilon_{12} = \epsilon^{21} = -1$ und $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$ invariant unter Lorentz–Transformationen

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\alpha\beta} &= M_\alpha{}^\gamma M_\beta{}^\delta \epsilon_{\gamma\delta} = \epsilon_{\alpha\beta} \ , \\ \epsilon'^{\,\alpha\beta} &= M_\gamma{}^\alpha M_\delta{}^\beta \epsilon^{\gamma\delta} = \epsilon^{\alpha\beta} \ , \end{aligned} \tag{A.7}$$

woraus folgt, daß Spinoren mit oberen und unteren Indizes über die ϵ–Tensoren zusammenhängen

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \ , \qquad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \ , \tag{A.8}$$

analog für die gepunkteten Indizes. Ebenso können die Indizes der σ–Matrizen herauf– und heruntergezogen werden

$$\bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot\beta} \ . \tag{A.9}$$

Aus der Definition der σ–Matrizen erhält man

$$\begin{aligned} (\sigma^\mu\bar\sigma^\nu + \sigma^\nu\bar\sigma^\mu)_\alpha{}^\beta &= -2g^{\mu\nu}\delta_\alpha{}^\beta \ , \\ (\bar\sigma^\mu\sigma^\nu + \bar\sigma^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &= -2g^{\mu\nu}\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{aligned} \tag{A.10}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\sigma^\mu\bar\sigma^\nu &= -2g^{\mu\nu} \ , \\ \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma_\mu{}^{\dot\beta\beta} &= -2\delta_\alpha{}^\beta\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \ , \end{aligned} \tag{A.11}$$

mit $g_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)$. Mit Hilfe dieser Relationen kann man Vektoren in Bispinoren umwandeln und umgekehrt:

$$v_{\alpha\dot\alpha} = \sigma^m_{\alpha\dot\alpha}v_m \ , \qquad v^m = -\frac{1}{2}\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}v_{\alpha\dot\alpha} \ . \tag{A.12}$$

Die Generatoren der Lorentz–Gruppe in der Spinor–Darstellung sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta &= \frac{1}{4}(\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{\nu\dot\alpha\beta} - \sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{\mu\dot\alpha\beta}) \ , \\ \bar\sigma^{\mu\nu\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &= \frac{1}{4}(\bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}\sigma^\nu_{\alpha\dot\beta} - \bar\sigma^{\nu\dot\alpha\alpha}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}) \ . \end{aligned} \tag{A.13}$$

Der Zusammenhang zwischen zwei–komponentigen und vier–komponentigen Spinoren ist gegeben durch die Darstellung der Diracschen γ–Matrizen in der Weyl–Basis:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} . \tag{A.14}$$

In dieser Basis enthalten Dirac-Spinoren zwei Weyl-Spinoren

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} , \tag{A.15}$$

während Majorana–Spinoren nur einen Weyl–Spinor enthalten

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} . \tag{A.16}$$

Die hier verwendete Summenkonvention für zwei–komponentige Spinoren lautet:

$$\begin{aligned} \psi\chi &= \psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\alpha \chi^\alpha = \chi^\alpha \psi_\alpha = \chi\psi , \\ \bar{\psi}\bar{\chi} &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi} . \end{aligned} \tag{A.17}$$

Die Definition von $\bar{\psi}\bar{\chi}$ ist dabei so gewählt, daß

$$(\chi\psi)^\dagger = (\chi^\alpha \psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi} . \tag{A.18}$$

Wegen ihrer antikommutierenden Eigenschaften müssen Grassmann–Variablen diskrete Objekte sein. Deshalb macht die übliche Definition der Ableitung als Verhältnis zweier infinitesimaler Größen, die im Grenzwert verschwinden, keinen Sinn. Formal aber wird die Ableitung nach Grassmann–Variablen definiert durch:

$$\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \theta_\beta} = \delta^\beta{}_\alpha , \tag{A.19}$$

$$\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^\beta} = \delta_\beta{}^\alpha , \tag{A.20}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\beta}}} = \delta^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} , \tag{A.21}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\beta}}} = \delta_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}} . \tag{A.22}$$

Ebenso kann die Integration im formalen Sinne definiert werden. Dazu gehe man zunächst von nur einer Grassmann–Variablen ζ aus. Wegen $\zeta^n = 0$ für $n \geq 2$ besitzt jede Funktion $f(\zeta)$ die Entwicklung

$$f(\zeta) = f^{(0)} + f^{(1)}\zeta . \tag{A.23}$$

Deshalb reicht es aus, $\int d\zeta$ und $\int d\zeta\ \zeta$ zu definieren, damit $\int d\zeta\ f(\zeta)$ wohldefiniert ist. Dies ist gewährleistet durch

$$\int d\zeta = 0 , \tag{A.24}$$

$$\int d\zeta\ \zeta = 1 , \tag{A.25}$$

woraus folgt

$$\int d\zeta \; f(\zeta) = f^{(1)} \; , \tag{A.26}$$

so daß Differentiation und Integration bzgl. Grassmann–Variablen formal identisch sind. Auf zweikomponentige Spinoren verallgemeinert lautet die Definition der Integration

$$\int d\theta_1 d\theta_2 = 0 \; , \tag{A.27}$$

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \; \theta_1 = \int d\theta_1 d\theta_2 \; \theta_2 = 0 \; , \tag{A.28}$$

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \; \theta_1 \theta_2 = -1 \; . \tag{A.29}$$

Definiert man nun die Volumenelemente des antikommutierenden Teils des Superraumes formal durch

$$d^2\theta = -\frac{1}{4} d\theta^\alpha d\theta_\alpha \; , \tag{A.30}$$

$$d^2\bar\theta = -\frac{1}{4} d\bar\theta_{\dot\alpha} d\bar\theta^{\dot\alpha} \; , \tag{A.31}$$

$$d^4\theta = d^2\theta d^2\bar\theta \; , \tag{A.32}$$

so erhält man

$$\int d^2\theta = \int d^2\bar\theta = 0 \; , \tag{A.33}$$

$$\int d^2\theta \; \theta^\alpha = \int d^2\bar\theta \; \bar\theta_{\dot\alpha} = 0 \; , \tag{A.34}$$

$$\int d^2\theta \; \theta\theta = 1 \; , \tag{A.35}$$

$$\int d^2\bar\theta \; \bar\theta\bar\theta = 1 \; , \tag{A.36}$$

$$\int d^4\theta \; \theta\theta \, \bar\theta\bar\theta = 1 \; . \tag{A.37}$$

Daraus folgt die wichtige Eigenschaft, daß bei Integration über den antikommutierenden Teil des Superraumes die $\theta\theta\,\bar\theta\bar\theta$–Komponenten des Integranden herausprojeziert werden.

Anhang B

1–loop Korrekturen der Minimierungsbedingungen

Die Minimierungsbedingungen des Higgs–Potentials auf dem tree–level (2.43) und (2.44)

$$\mu^2 = \frac{m_{h_d}^2 - m_{h_u}^2 \tan^2\beta}{\tan^2\beta - 1} - \frac{1}{2} M_Z^2 \ ,$$
$$\mu B = -\frac{1}{2}\left(m_d^2 + m_u^2\right)\sin 2\beta$$

werden 1–loop korrigiert, indem man $m_{h_{u,d}}^2$ bzw. $m_{u,d}^2$ durch $\overline{m}_{h_{u,d}}^2 = m_{h_{u,d}}^2 + \Sigma_{u,d}$ bzw. $\overline{m}_{u,d}^2 = m_{u,d}^2 + \Sigma_{u,d}$ ersetzt, wobei (2.48) [2]

$$\Sigma_{u,d} \equiv \frac{\partial \Delta V}{\partial v_{u,d}^2} = \frac{1}{32\pi^2} \sum_p (-1)^{2s_p}(2s_p+1) m_p^2 (\ln\frac{m_p^2}{\Lambda^2} - 1)\frac{\partial m_p^2}{\partial v_{u,d}^2} \ .$$

Häufig werden nur die Beiträge aus dem Top–/Stop–Sektor berücksichtigt. Für große $\tan\beta$ aber werden die Beiträge aus dem Bottom–/Sbottom–Sektor immer wichtiger. Die Tau–/Stau–Beiträge sind kleiner, werden aber ebenfalls berücksichtigt. Die Terme lauten [15]:

$$\begin{aligned}
\Sigma_d^t &= 0 \\
\Sigma_u^t &= -\frac{3g^2}{16\pi\cos^2\theta_W}\frac{M_t^2}{M_Z^2\sin^2\beta} f(M_t^2) \\
\Sigma_d^{\tilde{t}_{1,2}} &= \frac{3g^2}{32\pi^2\cos^2\theta_W} f(m_{\tilde{t}_{1,2}}^2)\Bigg\{\frac{1}{4} \mp \frac{1}{m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2} \\
&\quad \times \left[\frac{M_t^2\mu}{M_Z^2\sin^2\beta}(A_t\tan\beta + \mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)\left(m_{\tilde{t}_L}^2 - m_{\tilde{t}_R}^2\right)\right]\Bigg\} \\
\Sigma_u^{\tilde{t}_{1,2}} &= \frac{3g^2}{32\pi^2\cos^2\theta_W} f(m_{\tilde{t}_{1,2}}^2)\Bigg\{\frac{M_t^2}{M_Z^2\sin^2\beta} - \frac{1}{4} \mp \frac{1}{m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2} \\
&\quad \times \left[\frac{M_t^2 A_t}{M_Z^2\sin^2\beta}(A_t + \mu\cot\beta) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)\left(m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2\right)\right]\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma_d^b &= -\frac{3g^2}{16\pi\cos^2\theta_W}\frac{M_b^2}{M_Z^2\cos^2\beta}f(M_b^2)\\
\Sigma_u^b &= 0\\
\Sigma_d^{\tilde{b}_{1,2}} &= \frac{3g^2}{32\pi^2\cos^2\theta_W}f(m^2_{\tilde{b}_{1,2}})\left\{\frac{M_b^2}{M_Z^2\cos^2\beta}-\frac{1}{4}\mp\frac{1}{m^2_{\tilde{b}_2}-m^2_{\tilde{b}_1}}\right.\\
&\quad\times\left.\left[\frac{M_b^2A_b}{M_Z^2\cos^2\beta}(A_b+\mu\tan\beta)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\left(m^2_{\tilde{b}_L}-m^2_{\tilde{b}_R}\right)\right]\right\}\\
\Sigma_u^{\tilde{b}_{1,2}} &= \frac{3g^2}{32\pi^2\cos^2\theta_W}f(m^2_{\tilde{b}_{1,2}})\left\{\frac{1}{4}\mp\frac{1}{m^2_{\tilde{b}_2}-m^2_{\tilde{b}_1}}\right.\\
&\quad\times\left.\left[\frac{M_b^2\mu}{M_Z^2\cos^2\beta}(A_b\cot\beta+\mu)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\left(m^2_{\tilde{b}_L}-m^2_{\tilde{b}_R}\right)\right]\right\}\\
\Sigma_d^\tau &= -\frac{g^2}{16\pi\cos^2\theta_W}\frac{M_\tau^2}{M_Z^2\cos^2\beta}f(M_\tau^2)\\
\Sigma_u^\tau &= 0\\
\Sigma_d^{\tilde{\tau}_{1,2}} &= \frac{g^2}{32\pi^2\cos^2\theta_W}f(m^2_{\tilde{\tau}_{1,2}})\left\{\frac{M_\tau^2}{M_Z^2\cos^2\beta}-\frac{1}{4}\mp\frac{1}{m^2_{\tilde{\tau}_2}-m^2_{\tilde{\tau}_1}}\right.\\
&\quad\times\left.\left[\frac{M_\tau^2A_\tau}{M_Z^2\cos^2\beta}(A_\tau+\mu\tan\beta)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\sin^2\theta_W\right)(m^2_{\tilde{\tau}_L}-m^2_{\tilde{\tau}_R})\right]\right\}\\
\Sigma_u^{\tilde{\tau}_{1,2}} &= \frac{g^2}{32\pi^2\cos^2\theta_W}f(m^2_{\tilde{\tau}_{1,2}})\left\{\frac{1}{4}\mp\frac{1}{m^2_{\tilde{\tau}_2}-m^2_{\tilde{\tau}_1}}\right.\\
&\quad\times\left.\left[\frac{M_\tau^2\mu}{M_Z^2\cos^2\beta}(A_\tau\cot\beta+\mu)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\sin^2\theta_W\right)(m^2_{\tilde{\tau}_L}-m^2_{\tilde{\tau}_R})\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$f(m^2) = m^2\left(\ln\frac{m^2}{M_Z^2}-1\right)$$

Anhang C

1–loop–Korrekturen der neutralen Higgsboson–Massen

Die korrigierten Massen der neutralen Higgsbosonen lauten [18]:

$$m_A^2 = -\frac{2\mu B + \Delta}{\sin 2\beta} \quad ,$$

$$m_{h^0,H^0}^2 = \frac{1}{2}\Bigg(M_Z^2 + m_A^2 + \Delta_{11} + \Delta_{22}$$

$$\mp \sqrt{[\cos 2\beta(M_Z^2 - m_A^2) + \Delta_{11} - \Delta_{22}]^2 + [\sin 2\beta(M_Z^2 + m_A^2) - \Delta_{12}]^2}\Bigg)$$

mit

$$\Delta = \frac{1}{32\pi^2}\Bigg[3y_t^2 \frac{A_t\mu}{m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2}\left(f(m_{\tilde{t}_2}^2) - f(m_{\tilde{t}_1}^2)\right)$$

$$+3y_b^2 \frac{A_b\mu}{m_{\tilde{b}_2}^2 - m_{\tilde{b}_1}^2}\left(f(m_{\tilde{b}_2}^2) - f(m_{\tilde{b}_1}^2)\right) + y_\tau^2 \frac{A_\tau\mu}{m_{\tilde{\tau}_2}^2 - m_{\tilde{\tau}_1}^2}\left(f(m_{\tilde{\tau}_2}^2) - f(m_{\tilde{\tau}_1}^2)\right)\Bigg]$$

$$\Delta_{11} = \frac{1}{8\pi^2}\Bigg[3M_t^2 y_t^2 \mu^2 R_t^2 g(m_{\tilde{t}_2}^2, m_{\tilde{t}_1}^2) + 3M_b^2 y_b^2 \left(\ln\frac{m_{\tilde{b}_1}^2 m_{\tilde{b}_2}^2}{M_b^4} + 2A_b R_b \ln\frac{m_{\tilde{b}_2}^2}{m_{\tilde{b}_1}^2} + A_b^2 R_b^2 g(m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{b}_1}^2)\right)$$

$$+M_\tau^2 y_\tau^2 \left(\ln\frac{m_{\tilde{\tau}_1}^2 m_{\tilde{\tau}_2}^2}{M_\tau^4} + 2A_\tau R_\tau \ln\frac{m_{\tilde{\tau}_2}^2}{m_{\tilde{\tau}_1}^2} + A_\tau^2 R_\tau^2 g(m_{\tilde{\tau}_2}^2, m_{\tilde{\tau}_1}^2)\right)\Bigg]$$

$$\Delta_{12} = \frac{\mu}{8\pi^2}\Bigg[3M_t^2 y_t^2 R_t \left(\ln\frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2} + A_t R_t g(m_{\tilde{t}_2}^2, m_{\tilde{t}_1}^2)\right) + 3M_b^2 y_b^2 R_b \left(\ln\frac{m_{\tilde{b}_2}^2}{m_{\tilde{b}_1}^2} + A_b R_b g(m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{b}_1}^2)\right)$$

$$+M_\tau^2 y_\tau^2 R_\tau \left(\ln\frac{m_{\tilde{\tau}_2}^2}{m_{\tilde{\tau}_1}^2} + A_\tau R_\tau g(m_{\tilde{\tau}_2}^2, m_{\tilde{\tau}_1}^2)\right)\Bigg]$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{8\pi^2}\Bigg[3M_t^2 y_t^2 \left(\ln\frac{m_{\tilde{t}_1}^2 m_{\tilde{t}_2}^2}{M_t^4} + 2A_t R_t \ln\frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2} + A_t^2 R_t^2 g(m_{\tilde{t}_2}^2, m_{\tilde{t}_1}^2)\right) + 3M_b^2 y_b^2 \mu^2 R_b^2 g(m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{b}_1}^2)$$

$$+M_\tau^2 y_\tau^2 \mu^2 R_\tau^2 g(m_{\tilde{\tau}_2}^2, m_{\tilde{\tau}_1}^2)\Bigg]$$

wobei

$$f(m^2) = m^2 \left(\ln \frac{m^2}{M_Z^2} - 1 \right)$$
$$g(m_1^2, m_2^2) = 2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1^2 - m_2^2} \ln \frac{m_1^2}{m_2^2}$$

und

$$R_t = \frac{A_t + \mu \cot\beta}{m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2} \quad , \quad R_b = \frac{A_b + \mu \tan\beta}{m_{\tilde{b}_2}^2 - m_{\tilde{b}_1}^2} \quad , \quad R_\tau = \frac{A_\tau + \mu \tan\beta}{m_{\tilde{\tau}_2}^2 - m_{\tilde{\tau}_1}^2}$$

Anhang D

Runge–Kutta–Verfahren

Dieser Anhang entspricht der Beschreibung in [24]. Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen können immer zu einem System von N gekoppelten linearen Differentialgleichungen erster Ordnung umgewandelt werden

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f'_i(x, y_1, \ldots, y_N) \ , \tag{D.1}$$

mit $i = 1, \ldots, N$. Im Folgenden wird $N = 1$ betrachtet.

Das einfachste Verfahren, gewöhnliche Differentialgleichungen numerisch zu integrieren, ist das Euler–Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + hf'(x_n, y_n) \ , \tag{D.2}$$

das die Lösung vom Punkt x_n zum Punkt x_{n+1} transportiert. Diese Methode ist zwar sehr einfach, besitzt aber dafür einige Nachteile: Gleichung (D.2) ist unsymmetrisch, denn die Lösung wird durch das Intervall h transportiert, aber nur am Anfang des Intervalls wird der Wert der Ableitung verwendet. Der Fehler bei diesem Schritt ist somit nur eine Potenz von h kleiner als die Korrektur selbst. Es muß also noch $\mathcal{O}(h^2)$ auf der rechten Seite von Gleichung (D.2) addiert werden. Außerdem ist das Euler–Verfahren verglichen mit anspruchsvolleren Verfahren weniger exakt und nicht besonders stabil, so daß es in der Praxis nicht verwendet wird.

Eine bessere Methode ist es, mit einem Euler–Schritt einen „versuchsweisen“ Schritt in die Mitte des Intervalls zu machen, um dort den Schritt über das ganze Intervall zu berechnen. Der Algorithmus lautet

$$\begin{aligned} k_1 &= hf'(x_n, y_n) \ , \\ k_2 &= hf'(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \ , \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 + \mathcal{O}(h^3) \ . \end{aligned} \tag{D.3}$$

Diese Symmetrisierung eliminiert den Fehler der Ordnung[1] $\mathcal{O}(h^2)$, weshalb dieses Verfahren Runge–Kutta–Verfahren zweiter Ordnung genannt wird (Eine andere Bezeichnung ist Mittelpunkt–Verfahren).

[1] Ein Verfahren ist ein Verfahren n–ter Ordnung, wenn der Fehler $\mathcal{O}(h^{n+1})$ ist.

In dieser Arbeit wird das Runge–Kutta–Verfahren vierter Ordnung verwendet:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf'(x_n, y_n) \ , \\
k_2 &= hf'(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \ , \\
k_3 &= hf'(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \ , \\
k_4 &= hf'(x_n + h, y_n + k_3) \ , \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + \mathcal{O}(h^5) \ .
\end{aligned}
\tag{D.4}
$$

Hier wird der Runge–Kutta–Schritt aus dem Wert der Ableitung am Startpunkt, den Ableitungen an zwei versuchsweisen Mittelpunkten, sowie der Ableitung am versuchsweisen Endpunkt des Intervalls berechnet. Das Besondere am Runge–Kutta–Verfahren vierter Ordnung ist, daß für höhere Ordnung m mehr als m Funktionsauswertungen durchgeführt werden müssen, so daß die vierte Ordnung einen guten Kompromiß aus Genauigkeit und Rechenaufwand bedeutet. Deshalb und wegen seiner Einfachheit ist dieses Verfahren in der Praxis am weitesten verbreitet.

Anhang E

Abbildungen

In diesem Anhang befinden sich die Abbildungen zur Diskussion des Massenspektrums für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$ aus Abschnitt 4.5.

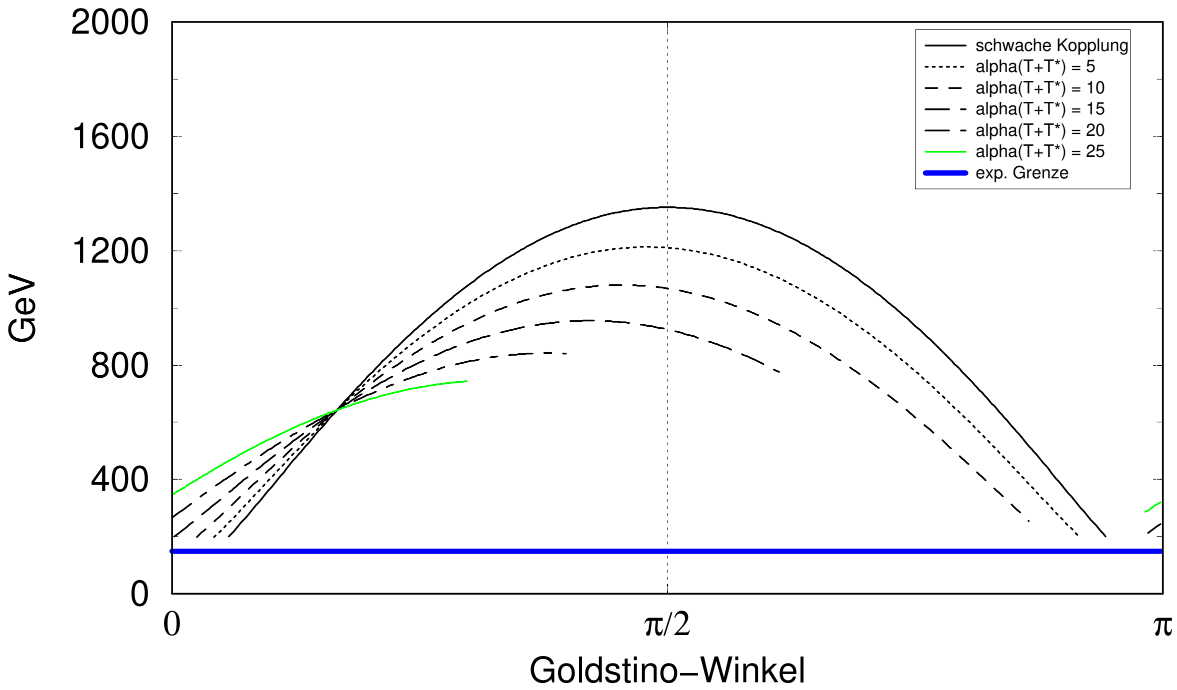

Abbildung E.1: $m_{\tilde{t}_1}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

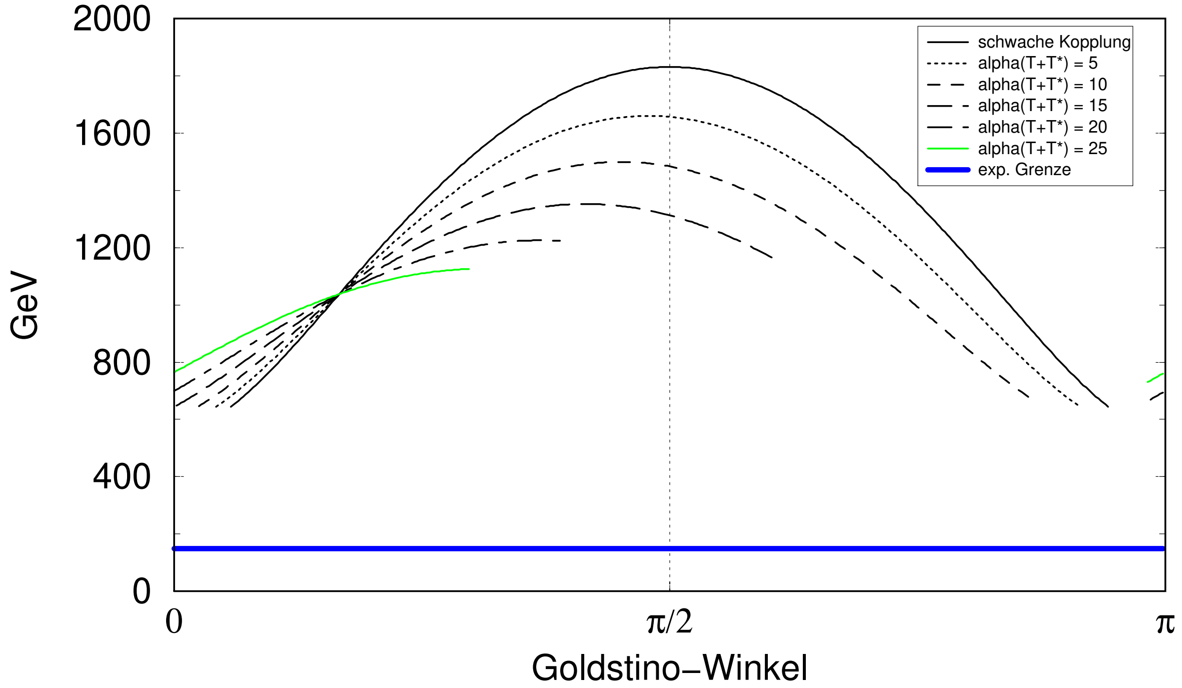

Abbildung E.2: $m_{\tilde{u}_L}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

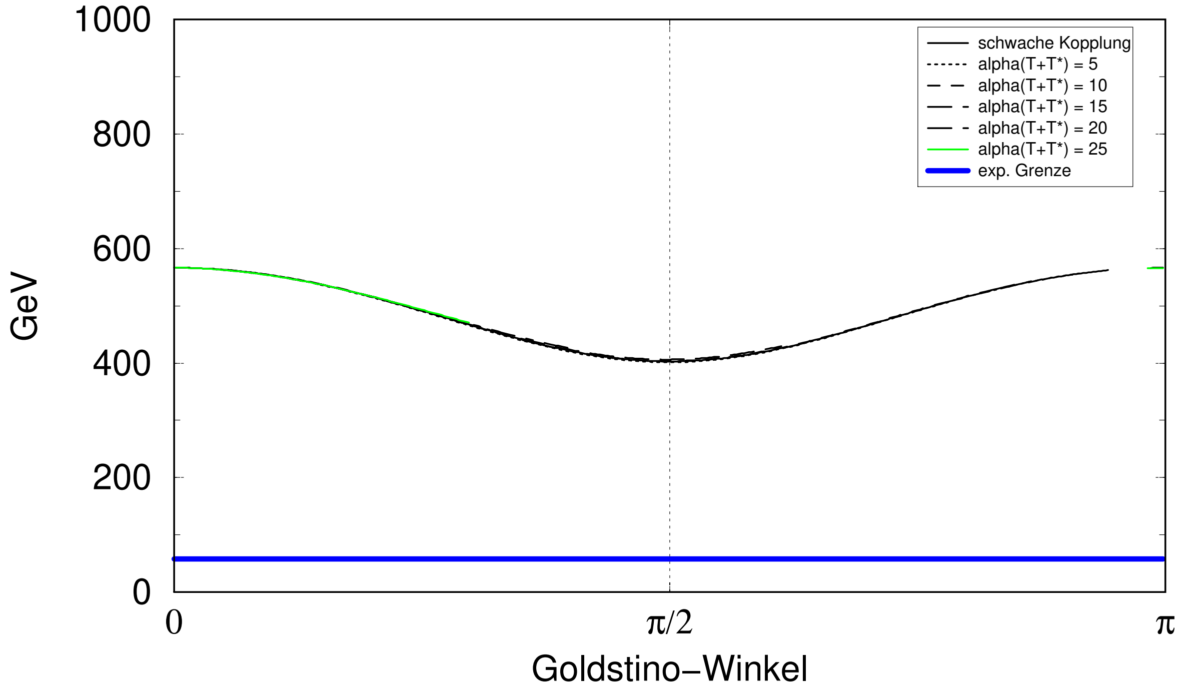

Abbildung E.3: $m_{\tilde{e}_R}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

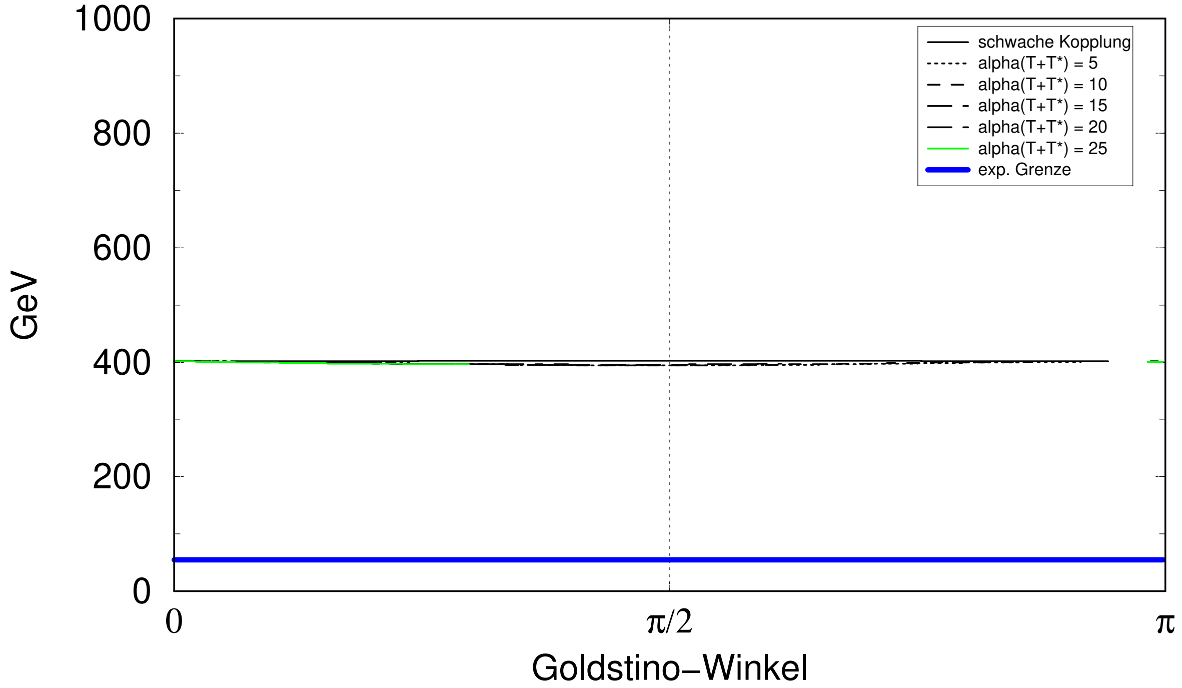

Abbildung E.4: $m_{\tilde{\mu}_R}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

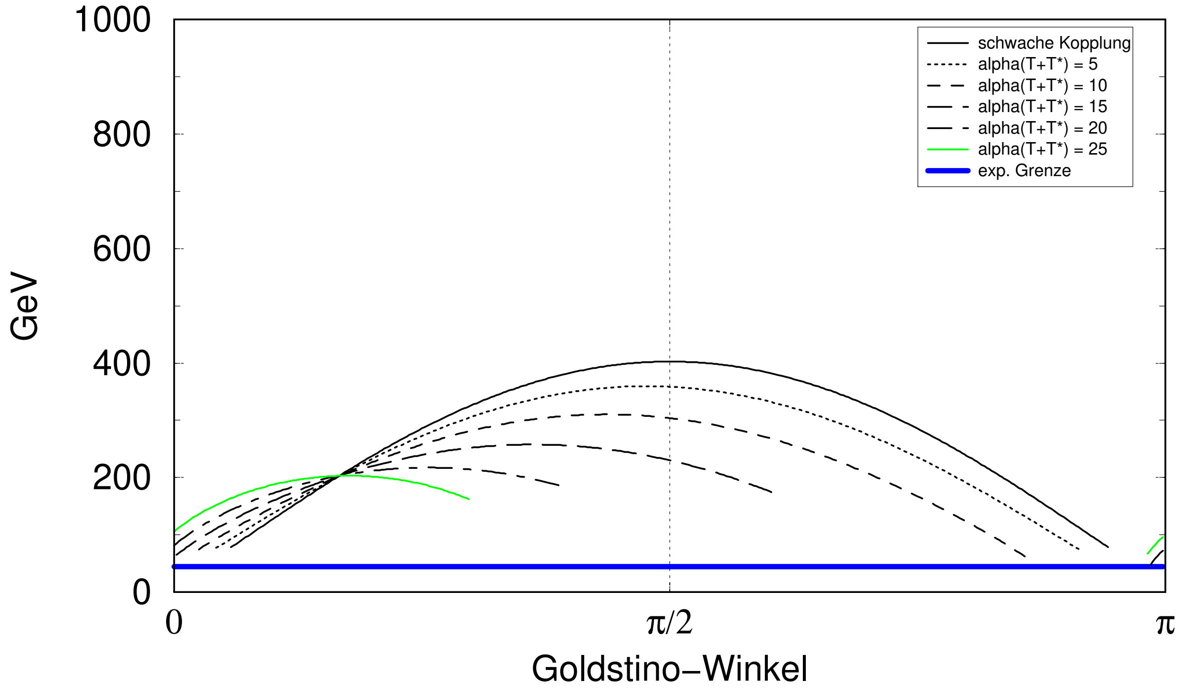

Abbildung E.5: $m_{\tilde{\tau}_1}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

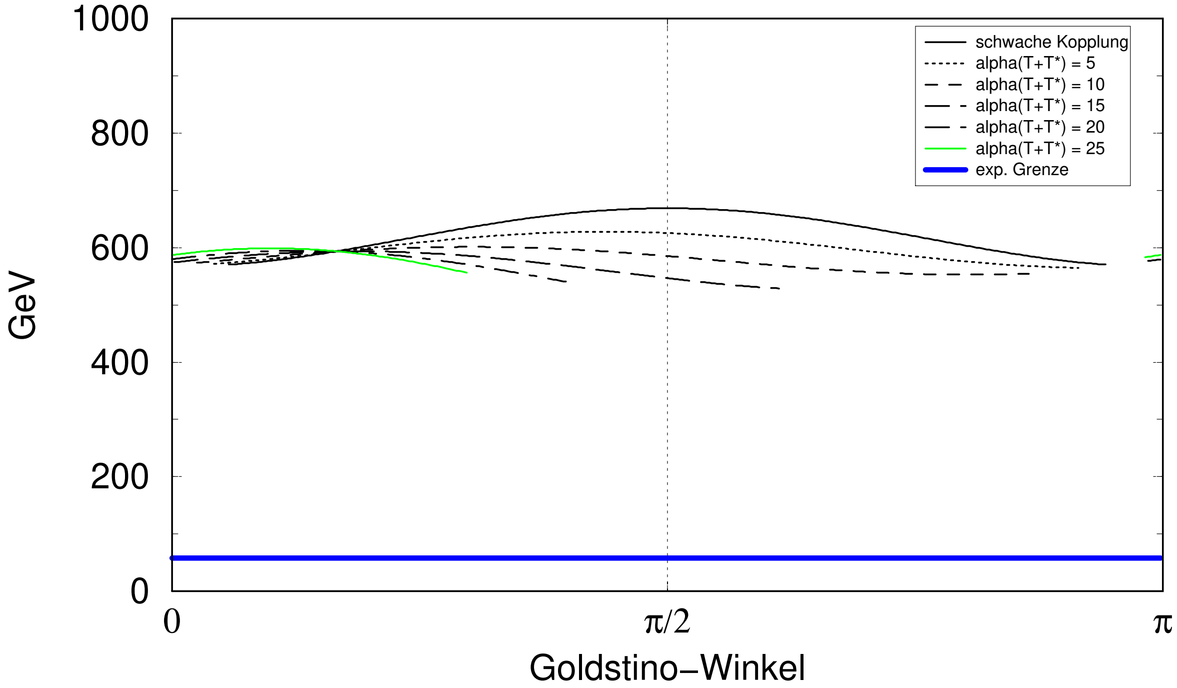

Abbildung E.6: $m_{\tilde{e}_L}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

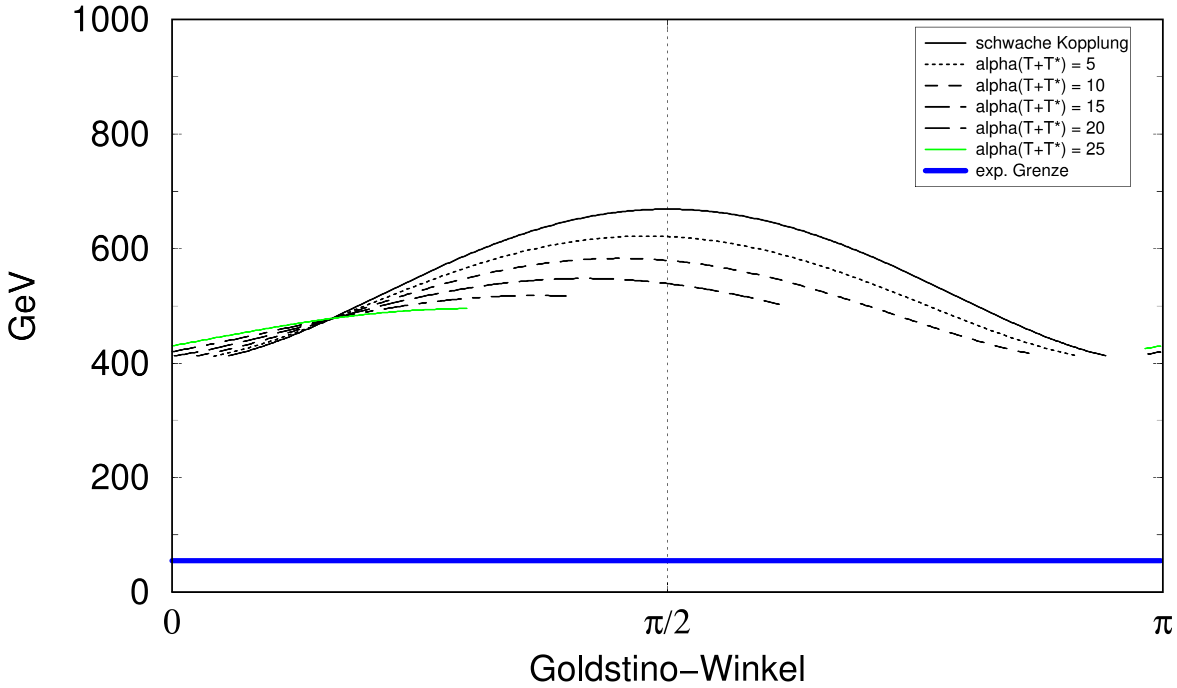

Abbildung E.7: $m_{\tilde{\mu}_L}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

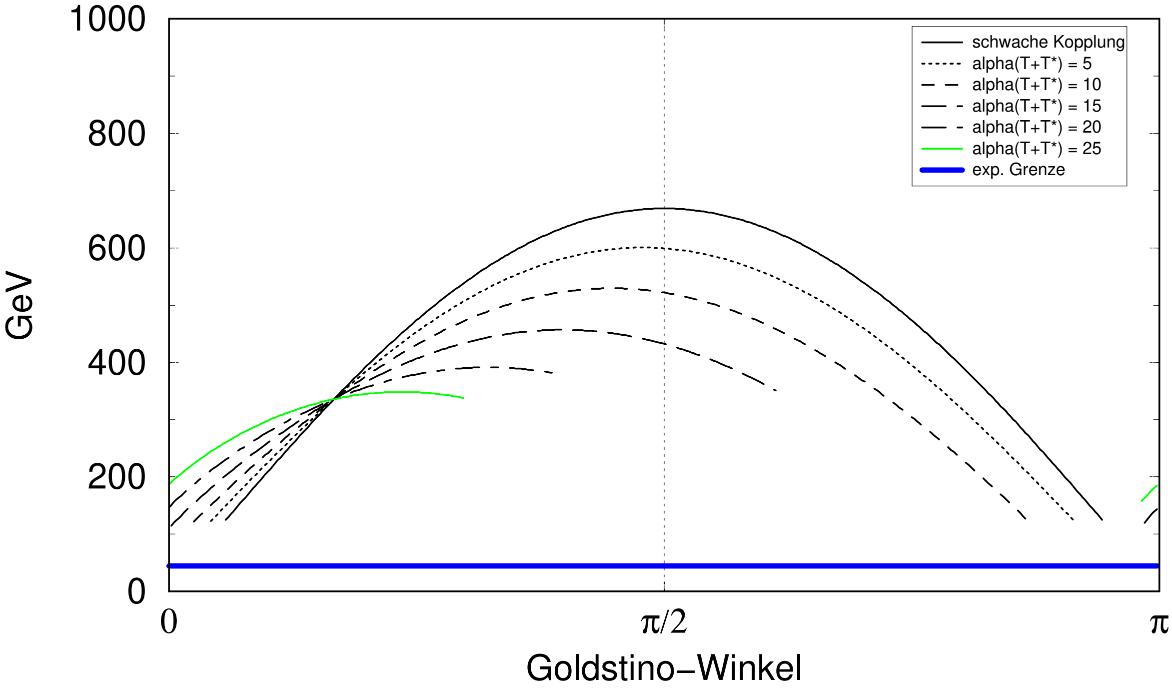

Abbildung E.8: $m_{\tilde{\tau}_2}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

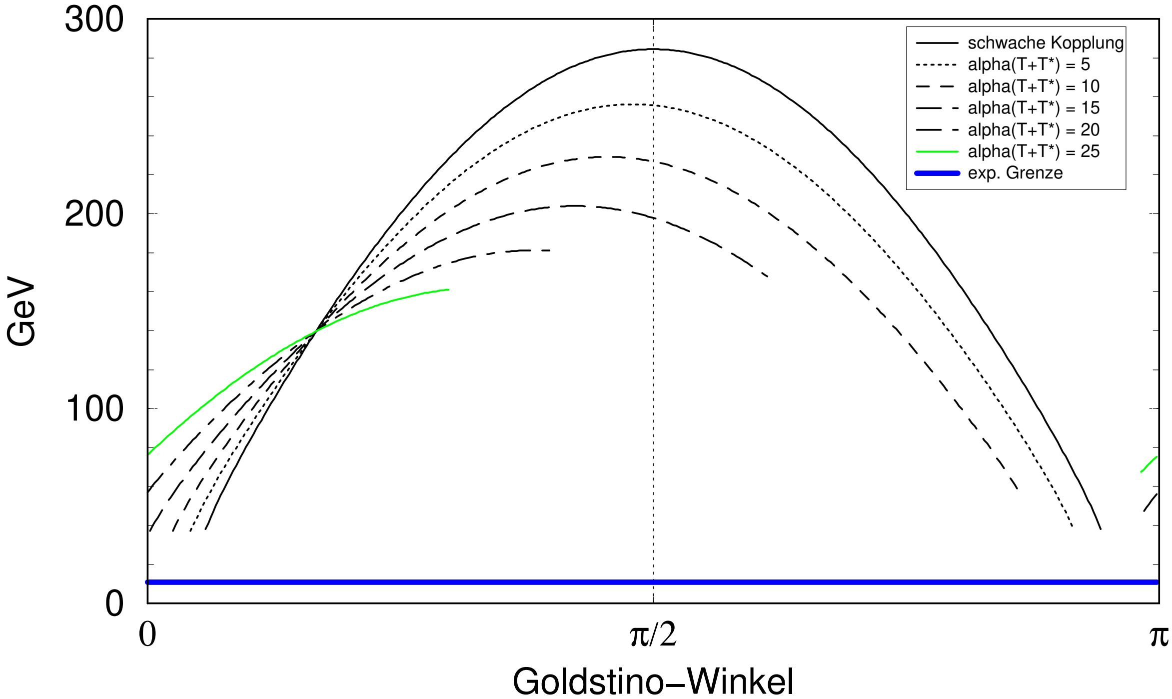

Abbildung E.9: $m_{\tilde{N}_1}$ für $m_{3/2} = 400$ GeV, $\tan\beta = 1.8$ und $sign(\mu) = +1$.

Literaturverzeichnis

[1] L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, *Gravitational anomalies*, Nucl. Phys. **B234** (1983), 269.

[2] R. Arnowitt and P. Nath, *Loop corrections to radiative breaking of elektroweak symmetry in supersymmetry*, Phys. Rev. **D46** (1992), 3981.

[3] J. Bagger and J. Wess, *Supersymmetry and supergravity*, second ed., Princeton University Press, 1992.

[4] D. Bailin, G.V. Kraniotis, and A. Love, *Sparticle spectrum and dark matter in M–theorie*, Phys. Lett. **B432** (1998), 90.

[5] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, first ed., IOP Publishing, 1994.

[6] V. Barger, M.S. Berger, and P. Ohmann, *Supersymmetric particle spectrum*, Phys. Rev. **D49** (1994), 4908.

[7] A. Brignole and L.E. Ibáñez, *Towards a theory of soft terms for the supersymmetric standard model*, Nucl. Phys. **B422** (1994), 125.

[8] S. Cabrera, J. Fuster, and S. Martí i Garcia, *Experimental determination of $m_b(M_Z)$ in DELPHI*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **64** (1998), 376.

[9] D.J. Castaño, E.J. Pirard, and P. Ramond, *Renormalization group study of the standard model and its extensions: II. The minimal supersymmetric standard model*, Phys. Rev. **D49** (1994), 4882.

[10] K. Choi, H.B. Kim, and C. Muñoz, *Four–dimensional effective supergravity and soft terms in M–theory*, Phys. Rev. **D57** (1998), 7521.

[11] K. Choi and J.E. Kim, *Compactification and axions in $E_8 \times E_8'$ superstring models*, Phys. Lett. **165B** (1985), 71.

[12] J.O. Conrad, *Brane tensions and coupling constants from within M–theory*, Phys. Lett. **B421** (1998), 119.

[13] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, *Supergravity in 11 dimensions*, Phys. Lett. **76B** (1978), 409.

[14] M. Cvetic, J. Louis, and B.A. Ovrut, *A string calculation of the Kaehler potentials for moduli of Z(N) orbifolds*, Phys. Lett. **206B** (1988), 227.

[15] W. de Boer, G. Burkhart, R. Ehret, A.V. Gladyshev, and D.I. Kazakov, *MSSM predictions of the neutral higgs boson masses and LEP II production cross sections*, Nucl. Phys. **B498** (1997), 3.

[16] A. Dedes and K. Tamvakis, *$b-\tau$ unification and neutrino masses in SU(5) extensions of the MSSM with radiative electroweak breaking*, Phys. Rev. **D56** (1997), 1496.

[17] M. Drees, *An introduction to supersymmetry*, hep-ph/9611409.

[18] M. Drees and M.M. Nojiri, *One–loop corrections to the higgs sector in minimal supergravity models*, Phys. Rev. **D45** (1992), 2482.

[19] J. Ellis, J. Hagelin, D.V. Nanopoulos, K. Olive, and M. Srednicki, *Supersymmetric relics from the big bang*, Nucl. Phys. **B238** (1984), 453.

[20] C. Caso et al, *Review of particle physics*, Europ. Phys. Jour. **C3** (1998), 1.

[21] R.M. Barnett et al., *Review of particle physics*, Phys. Rev. **D54** (1996), 1.

[22] P. Fayet, *Supergauge invariant extension of the Higgs mechanism and a model for the electron and its neutrino*, Nucl. Phys. **B90** (1975), 104.

[23] S. Ferrara, L. Girardello, and H.P. Nilles, *Breakdown of local supersymmetry through gauge fermion condensates*, Phys. Lett. **125B** (1983), 457.

[24] B.P. Flannery, W.H. Press, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling, *Numerical recipies in C*, second ed., Cambridge University Press, 1992.

[25] F. Gabbiani, A. Masiero E. Gabrielli, and L. Silvestrini, *A complete analysis of FCNC and CP constraints in general SUSY extensions of the standard model*, Nucl. Phys. **B477** (1996), 321.

[26] S.L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, *Weak interactions with lepton–hadron symmetry*, Phys. Rev. **D2** (1970), 1285.

[27] M.B. Green and J.H. Schwarz, *Anomaly cancellations in supersymmetric $d = 10$ gauge theory and superstring theory*, Phys. Lett. **B149** (1983), 117.

[28] D.J. Gross and J.H. Sloan, *The quartic effective action for the heterotic string*, Nucl. Phys. **B291** (1987), 41.

[29] J.F. Gunion, H.E. Haber, and M. Sher, *Charge/color breaking minima and A–parameter bounds in supersymmetric models*, Nucl. Phys. **B306** (1988), 1.

[30] H.E. Haber and G.L.Kane, *The search for supersymmetry: Probing physics beyond the standard model*, Phys. Rept. **117** (1985), 75.

[31] S. Heinemeyer, W. Hollik, and G. Weiglein, *Two–loop results for the masses of the neutral CP–even Higgs bosons in the MSSM*, hep-ph/9806250.

[32] H.Murayama, M. Olechowski, and S. Pokorski, *Viable $t-b-\tau$ Yukawa unification in SUSY SO(10)*, Phys. Lett. **B371** (1996), 57.

[33] P. Hořava and E. Witten, *Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary*, Nucl. Phys. **B475** (1996), 94.

[34] P. Hořava and E. Witten, *Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions*, Nucl. Phys. **B460** (1996), 506.

[35] S. Huber, *Der Parameterraum des Supersymmetrischen Standardmodells bei Supersymmetriebrechung durch das Dilaton*, Master's thesis, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1996.

[36] L. Ibáñez and C. López, *$N = 1$ supergravity, the weak scale and the low–energy particle spectrum*, Nucl. Phys. **B233** (1983), 511.

[37] L. Ibáñez and G.G. Ross, *$SU(2) \times U(1)$ symmetry breaking as a radiative effect of supersymmetry breaking in GUTs*, Phys. Lett. **110B** (1982), 215.

[38] L.E. Ibáñez and D. Lüst, *Duality anomaly cancellation, minimal string unification and the effective low–energy lagrangian of 4–D strings*, Nucl. Phys. **B382** (1992), 305.

[39] L.E. Ibáñez and H.P. Nilles, *Low–energy remnants of superstring anomaly cancellation terms*, Phys. Lett. **169B** (1986), 354.

[40] S.P. Martin, *A supersymmetry primer*, hep-ph/9709356.

[41] M. Misiak, S. Pokorski, and J. Rosiek, *Supersymmetry and FCNC effects*, hep-ph/9703442.

[42] W. Nahm, *Supersymmetries and their representations*, Nucl. Phys. **B135** (1978), 149.

[43] H.P. Nilles, *Supersymmetry, supergravity and particle physics*, Phys. Rept. **110** (1984), 1.

[44] H.P. Nilles, *The role of classical symmetries in the low–energy limit fo superstring theories*, Phys. Lett. **180B** (1986), 240.

[45] H.P. Nilles, *Supergravity and the low–energy limit of superstring theories*, Trieste spring school on Supersymmetry, Supergravity and Superstrings '86, proceedings (P. Fayet, B. de Wit, and M. Grisaru, eds.), World Scientific, 1986, p. 37.

[46] H.P. Nilles, M. Olechowski, and M. Yamaguchi, *Supersymmetry breakdown at a hidden wall*, hep-th/9801030.

[47] H.P. Nilles, M. Olechowski, and M. Yamaguchi, *Supersymmetry breaking and soft terms in M–theory*, Phys. Lett. **B415** (1997), 24.

[48] R.D. Peccei and H.R. Quinn, *Constraints imposed by CP conservation in the presence of instantons*, Phys. Rev. **D16** (1977), 1791.

[49] J.H. Schwarz, *Lectures on superstring and M–theory dualities*, hep-th/9607201.

[50] A. Sopczak, *Aspects of higgs boson searches at LEP2*, hep-ph/9807566.

[51] P.K. Townsend, *Four lectures on M–theory*, hep-th/9612121.

[52] E. Witten, *Dimensional reduction of superstring models*, Phys. Lett. **155B** (1985), 151.

[53] E. Witten, *Strong coupling expansion of Calabi–Yau compactification*, Nucl. Phys. **B471** (1996), 135.