Die Rolle von antisymmetrischen Hintergrundfeldern in Superstringtheorien

von
MARTIN WALTER

Diplomarbeit in Physik
angefertigt im
Physikalischen Institut

vorgelegt der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität
Bonn

im November 2000

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. Hans–Peter Nilles
Korreferent: Prof. Rainald Flume

Zuallererst möchte ich Herrn Prof. Hans-Peter Nilles für seine ständige Hilfsbereitschaft und die Aufnahme in seine Gruppe danken, die es mir ermöglicht hat, in einer sehr guten Atmosphäre in einen hochinteressanten Bereich der theoretischen Physik Einblicke zu gewinnen. Desweiteren danke ich Jan Conrad, Stefan Förste, Gabi Honecker und Ralph Schreyer, die unter meinen quälenden Fragen wohl am meisten zu leiden hatten, sowie Stefan Groot Nibbelink, Hanno Klemm und Max Zucker für ihre Diskussionsbereitschaft und die Atmosphäre in der Gruppe.
Ebenfalls danken möchte ich meinen Eltern für ihre Zuwendung und Unterstützung und dafür, daß sie mir mein Studium ermöglicht haben. Ohne die Liebe und Hilfe meiner Freundin Vera wäre mein Leben jenseits der Universität sicherlich im Chaos versunken. Danke!

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Rolle von antisymmetrischen Hintergrundfeldern in Superstringtheorien untersucht. Antisymmetrische Hintergrundfelder treten in verschiedenen Zusammenhängen auf, so z.B. als Moduli bei der Stringkompaktifizierung, als Tensoreichfelder in unkompaktifizierten Dimensionen oder als Feldstärketensoren von U(1) Eichfeldern. Es hat sich gezeigt, daß antisymmetrische Hintergrundfelder im D-Brane-Bild, der Vereinheitlichung der supersymmetrischen Typ I und Typ II Stringtheorien, eine zentrale Stellung einnehmen. Insbesondere führt ihre Existenz zu nichtkommutativen Eigenschaften der Koordinatenfelder von offenen Strings. Ein weiterer Zugang zu nichtkommutativer Geometrie hat sich durch die Betrachtung einer bestimmten Klasse von asymmetrischen Orbifolds, den $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Orbifolds ergeben [9]. In dieser Arbeit soll untersucht werden, inwiefern sich nichtkommutative Geometrie auch in heterotischen Superstringtheorien zeigen kann.

Sowohl für die Herleitung des D-Brane-Bilds, als auch für das Auftreten von nichtkommutativer Geometrie bei offenen Strings ist eine Symmetrie fundamental: T-Dualität. T-Dualität wurde als Symmetrie des Massenspektrums bei toroidalen Kompaktifizierungen von Stringtheorien entdeckt, die aus diesem Grund in Kapitel 2 vorgestellt werden. Dazu wird zunächst das Prinzip toroidaler Kompaktifizierung am Beispiel des bosonischen Strings untersucht, T-Dualität erst eindimensional, und anschließend in der verallgemeinerten Form der T-Dualitätsgruppe betrachtet. Aufgrund ihrer Wichtigkeit für diese Arbeit werden die Generatoren der T-Dualitätsgruppe ausführlich beschrieben. Im weiteren Verlauf des Kapitels werden die beiden supersymmetrischen heterotischen Superstringtheorien vorgestellt. Dabei wird insbesondere die Quantisierung des heterotischen Strings bei „eingeschalteten“ *Wilson*-Linien behandelt. *Wilson*-Linien sind die oben erwähnten konstanten U(1) Hintergrundfelder, deren antisymmetrischer Feldstärketensor – zusammen mit dem antisymmetrischen B-Feld – im D-Brane-Bild der Typ I und Typ II Theorien mit nichtkommutativer Geometrie korreliert ist.

In Kapitel 3 wird die Orbifoldkonstruktion vorgestellt. Unter einer Orbifoldkonstruktion versteht man allgemein das Ausmodden von diskreten Symmetriegruppen aus der Stringtheorie. Auf die Ramuzeit angewendet entspricht dies einem Ausmodden von diskreten Symmetrien einer Mannigfaltigkeit. Die so entstehenden geometrischen Objekte werden Orbifolds genannt. Orbifolds besitzen singuläre Fixpunkte und sind somit selbst keine Mannigfaltigkeiten, auch wenn sie jenseits der Fixpunkte Mannigfaltigkeiten gleichen. Es werden Konsistenzbedingungen für heterotische Orbifolds hergeleitet und anschließend auf $\mathbb{Z}_N$ und $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Orbifolds angewendet.

In Kapitel 4 werden offene Strings betrachtet. Die fundamentalen Eigenschaften offener Strings werden wiederum am Beispiel des bosonischen Strings behandelt und in diesem Zusammenhang D-Branes vorgestellt. D-Branes sind dynamische Objekte, auf denen die Enden offener Strings fixiert sind. Die Ergebnisse werden auf den Typ I Superstring verallgemeinert und das D-Brane-Bild motiviert. Im weiteren Verlauf des Kapitels wird die D-Brane-Wirkung vorgestellt. Hier ergeben sich erste Hinweise auf nichtkommutative Eigenschaften der Koordinatenfelder von offenen Strings. Abschließend wird gezeigt, welcher Zusammenhang zwischen antisymmetrischen Hintergrundfeldern und nichtkommutativer Geometrie besteht.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit den asymmetrischen $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Orbifolds im D-Brane-Bild. Es wird gezeigt, wie sich aus asymmetrischen Rotationen D-Branes mit gemischten Randbedingungen und damit nichtkommutative Eigenschaften der Koordinatenfelder offener Strings ergeben.

Die Methodik dieses Zugangs wird verwendet um einige Ergebnisse aus Kapitel 4 zu reproduzieren, aber auch um weitere auf nichtkommutativer Geometrie basierende Eigenschaften für offene Strings herzuleiten.

Kapitel 6 enthält die zentralen Ergebnisse dieser Arbeit. Es wird untersucht, inwiefern sich die in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellten Zusammenhänge auf den heterotischen String übertragen lassen. Dazu wird eine erstaunliche Koinzidenz betrachtet, die den antisymmetrischen Modulus einer simultan T-dualisierten heterotischen Stringtheorie und den nichtkommutativen Parameter der offenen Stringtheorie verbindet. Abschließend werden für den heterotischen String eine symmetrische $\mathbb{Z}_3$ und eine asymmetrische $\hat{\mathbb{Z}}_3$ Orbifold miteinander verglichen sowie der asymmetrisch rotierte Propagator berechnet.

In Kaptiel 7 wird ein Ausblick gegeben.

Als Ergebnis dieser Arbeit läßt sich zusammenfassen, daß nichtkommutierende Koordinatenfelder ausschließlich bei offenen Strings auftreten. Antisymmetrische Tensoreichfelder sind sowohl im D-Brane-Bild als auch in den heterotischen Theorien präsent. Entscheidend ist jedoch, daß die antisymmetrischen Hintergrundfelder die Randbedingungen offener Strings modifizieren und dadurch nichtkommutative Geometrie hervorrufen. Diese Möglichkeit ergibt sich aufgrund der Spiegelterme im Propagator offener Strings. Man findet daher nichtkommutative Geometrie auf den D-Branes, also dort, wo die offenen Strings enden. Für heterotische Strings gibt es keine Randbedingungen und somit keine nichtkommutative Geometrie. Die für die heterotischen Theorien gefundenen Ergebnisse lassen sich auf den geschlossenen Sektor der Typ I Stringtheorie übertragen. Auch dieser beinhaltet nur kommutative Geometrie. Die Aussagen gelten auch in Bezug auf den Zugang über asymmetrische Orbifolds. Nichtkommutative Geometrie tritt somit nur im offenen Sektor der Typ I Theorie auf.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Stringtheorien sind die momentan aussichtsreichsten Kandidaten zur Vereinheitlichung aller fundamentalen Wechselwirkungen inklusive der Gravitation. Strings sind räumlich ausgedehnte eindimensionale Objekte, die in der Raumzeit propagieren. Es gibt zwei unterschiedliche Topologien, offene und geschlossene Strings. Bei der Quantisierung von Strings im Rahmen von konformen Feldtheorien (CFTen) findet man, daß Konsistenz bzw. Anomaliefreiheit für die jeweilige Theorie nur dann gegeben ist, wenn diese in bestimmten, sogenannten „kritischen“ Dimensionen „lebt“. Die kritischen Dimensionen sind für bosonische Strings 26, für die supersymmetrischen Theorien 10. Eine ausschließlich Bosonen enthaltende Theorie ist phänomenologisch uninteressant und es gibt gute Gründe anzunehmen, daß eine vereinheitlichende Theorie supersymmetrisch sein muß. Hauptargument ist das im Standardmodell (SM) auftretende „Hierarchie-Problem“. Die Energieskala der Brechung der elektroschwachen Symmetrie ist mit einer Größenordnung von 100 GeV im Verhältnis zur *Planck*-Skala von ungefähr 10^{19} GeV unverhältnismäßig klein. Die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung ist durch die Masse des skalaren *Higgs*-Bosons definiert. Nun erhält die *Higgs*-Masse (im SM) quadratisch divergente Quantenkorrekturen in der Größenordnung der als „Cut-Off“ dienenden *Planck*-Skala. Damit ist ein exaktes und unnatürliches „Fine-tuning“ erforderlich, um die *Higgs*-Masse in der Größenordnung von 100 GeV zu halten. Supersymmetrie (SUSY) liefert einen Ausweg [6, 26], weil in supersymmetrischen Theorien keine quadratisch divergenten Quantenkorrekturen mehr auftreten.

Nun gibt es fünf konsistente freie supersymmetrische Stringtheorien. Vier davon, die Typ IIA, Typ IIB und heterotischen $E_8 \times E_8$ und SO(32) Theorien, enthalten nur orientierte geschlossene Strings, eine weitere, die Typ I SO(32) Theorie, nichtorientierte offene und geschlossene Strings.

Um nun eine Beschreibung unserer (bei niedrigen Energien) offensichtlich (3+1)-dimensionalen Welt zu erhalten, muß man einige der Dimensionen „einrollen“. Den allgemeinen Prozeß dieses Vorgangs, der natürlich nicht nur auf bildliches „Einrollen“ beschränkt ist, nennt man Kompaktifizierung. Nun gibt es beliebig viele Möglichkeiten eine gegebene Stringtheorie zu kompaktifizieren. Einige dieser Möglichkeiten sind allerdings äquivalent. Die zugrunde liegende diskrete Symmetriegruppe, die Theorien mit äquivalenten Massenspektren ineinander überführt, wird als T-Dualitätsgruppe bezeichnet. Sie wurde im Rahmen toroidaler Kompaktifizierungen als perturbative Symmetrie des Massenspektrums entdeckt. T-Dualität hat jedoch weitreichendere Konsequenzen. So konnte z.B. gezeigt werden, daß die beiden heterotischen Theorien durch T-Dualitätstransformationen (mit bestimmten Hintergrundkonfigurationen) ineinander überführt werden können. Das gleiche gilt für die Typ I und Typ II Stringtheorien, die im sogenannten D-Brane-Bild als verschiedene Konfigurationen einer einzigen Theorie auftreten und sich nur durch die Anordnung von D-Branes unterscheiden. Damit stellen sich zwei Fragen: Gibt es nur eine heterotische und eine Typ I/II Theorie? Und gilt T-Dualität auch nichtperturbativ? Im Laufe der letzten Jahre konnte gezeigt werden, daß es für jedes Paar von Stringtheorien eine Kette von Dualitäts-Transformationen zu geben scheint, die die jeweiligen Theorien ineinander überführt. T-Dualität alleine reicht jedoch nicht aus. Eine weitere Symmetrie, die sogenannte S-Dualität, korreliert eine schwach gekoppelte Beschreibung einer Superstringtheorie mit der stark gekoppelten Beschreibung einer anderen. Über die Dualitätsketten konnte gezeigt werden, daß zusätzlich zu den fünf Superstringtheorien eine weitere Theorie, die sogenannte M-Theorie, hinzugezogen werden muß, deren effektive Theorie bei niedrigen Energien durch elfdimensionale Supergravitation (SUGRA) beschrieben werden kann. Nun ergibt sich die Vermutung, daß alle sechs Theorien verschiedene Limites in einem Parameter-Raum darstellen, der durch eine einzige Theorie beschrieben wird [31, 35]. Diese Theorie, von manchen Autoren ebenfalls M-Theorie genannt, wird im Folgenden als „moderne Stringtheorie" bezeichnet und kann größtenteils nur nichtperturbativ beschrieben werden. Bis jetzt konnte noch nicht bewiesen werden, daß S- und T-Dualität wirklich nichtperturbative Symmetrien sind, aber es gibt einige Hinweise darauf, daß dies der Fall ist. Über die moderne Stringtheorie selbst ist relativ wenig bekannt, weil ihre Untersuchung nur nichtperturbativ erfolgen kann. Ein möglicher Ansatz ist nichtkommutative Geometrie.

Die Untersuchung von nichtkommutativer Geometrie innerhalb der Stringtheorien, aber auch von nichtkommutativen effektiven Theorien, wie z.B. der nichtkommutativen Super-*Yang-Mills* (NCSYM) Theorie, hat in letzter Zeit viel Aufmerksamkeit erregt. Grund dafür ist, daß Theorien mit starken antisymmetrischen Hintergrundfeldern Beschreibungen durch nichtkommutative Geometrie erfordern. Man hofft durch die Untersuchung von nichtkommutativer Geometrie letztlich Hinweise auf nichtperturbative Symmetrien und damit auf die moderne Stringtheorie zu erhalten.

Sowohl für Stringtheorien als auch für effektive Feldtheorien konnte mit Hilfe von T-Dualität gezeigt werden, daß für bestimmte Konfigurationen, nichtkommutative und kommutative Beschreibungen äquivalent sind [32]. Derselbe Zusammenhang wurde auch im D-Brane-Bild gefunden [9]. Dabei ist T-Dualität immer diejenige Transformation, die kommutative und nichtkommutative Geometrien korreliert.

Aufgrund von S-Dualität sind die zehn-dimensionalen kommutativen effektiven Theorien der Typ I SO(32) Stringtheorie und der heterotischen SO(32) Theorie äquivalent [4]. Wenn aber T-Dualität in der einen Theorie zu Nichtkommutativitäten führt, müßten sich diese Eigenschaft auch in der anderen Theorie finden lassen. Nun ist – wie oben angedeutet – S-Dualität eine Symmetrie, die schwach und stark gekoppelte Theorien ineinander überführt. Somit ist immer nur in einer der beiden Theorien eine perturbative Beschreibung möglich, die Berechnungen von Propagatoren und Kommutatoren von Koordinatenfeldern zuläßt und so Hinweise auf nichtkommutative Geometrie geben könnte. Man kann also nur hoffen, durch direkten Vergleich Hinweise auf nichtkommutative Geometrie in heterotischen Theorien zu finden.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, inwiefern sich Ansatzpunkte für nichtkommutative Eigenschaften der Koordinatenfelder in heterotischen Theorien ergeben. Dazu wird der klassische Zugang untersucht, in dem nichtkommutative Geometrie bei offenen Strings in der Typ I Superstringtheorie dadurch auftritt, daß Hintergrundfelder auf den D-Branes existieren. Besonderes Augenmerk wird allerdings auf den in [9] vorgeschlagenen Zugang gelegt, in dem Nichtkommutativitäten der Koordinatenfelder im offenen Sektor bei der Konstruktion von asymmetrischen Orbifolds gefunden werden können.

Kapitel 2

Toroidale Kompaktifizierung und Symmetrien

In diesem Kapitel wird ein Überblick über toroidale Kompaktifizierung gegeben. In den Abschnitten 2.1 bis 2.8 wird das Prinzip toroidaler Kompaktifiziergun am Beispiel des geschlossenen bosonischen Strings erläutert. In Abschnitt 2.1 wird der eindimensionale Fall betrachtet und in Abschnitt 2.2 eine erste Symmetrie, eindimensionale T-Dualität, vorgestellt. Der Abschnitt 2.3 beschäftigt sich mit der Verallgemeinerung toroidaler Kompaktifizierung auf mehrere Dimensionen. Dabei werden die sogenannten „Moduli" vorgestellt. Moduli sind masselose Skalare, die in einer toroidal kompaktifizierten Theorie auftreten. Sie lassen sich durch einen symmetrischen Anteil (die interne Metrik G) und einen antisymmetrischen Anteil, ein sogenanntes B-Feld beschreiben. In Abschnitt 2.4 wir untersucht, welche Auswirkungen mehrdimensionale toroidale Kompaktifizierung auf das Stringspektrum hat. Dabei wird insbesondere gezeigt, daß ein konstantes B-Feld das Nullmodenspektrum verändert, obwohl es in der Wirkung nur einen topologischen Beitrag liefert. Der in Abschnitt 2.5 vorgestellte *Narain*-Formalismus ermöglicht eine praktische Beschreibung toroidaler Kompaktifizierungen. Es wird gezeigt, daß die Nullmodenimpulse auf einem geraden selbstdualen *Lorentz*-Gitter liegen müssen. Mit diesem Formalismus ist es relativ leicht möglich, physikalisch unterschiedliche von physikalisch äquivalenten toroidal kompaktifizierten Theorien zu unterscheiden. Physikalisch unterschiedliche Theorien werden durch den sogenannten „Modul-Raum" beschrieben, der in Abschnitt 2.6 vorgestellt wird. Der Modul-Raum wird durch die Moduli G und B parametrisiert. Ferner wird ein Formalismus eingeführt, der die Untersuchung des Modul-Raum erleichtert. In Abschnitt 2.7 wird die diskrete T-Dualitätsgruppe untersucht. Die T-Dualitätsgruppe ist eine Verallgemeinerung der in Abschnitt 2.2 vorgestellten eindimensionalen T-Dualität und beschreibt Transformationen, die das Massenspektrum der kompaktifizierten Theorie invariant lassen. T-Dualität ist eine sehr starke Symmetrie, aus der sich viele Konsequenzen für die Stringtheorien im Allgemeinen ergeben. Deswegen werden die Generatoren der T-Dualitätsgruppe ausführlich vorgestellt. In Abschnitt 2.8 wird der Modul-Raum des zweidimensionalen Torus T^2 untersucht. Dieser spielt in Bezug auf die Kapitel 5 und 6 eine übergeordnete Rolle, weil dort gezielt Kompaktifizierungen auf 2-Tori oder direkten Produkten von 2-Tori betrachtet werden. In Abschnitt 2.9 wird kurz auf die Typ IIA und Typ IIB Superstringtheorien eingegangen, insbesondere darauf, wie sie sich unter eindimensionaler T-Dualität verhalten. Eine vollständige Einführung der Typ II Theorien würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen. Der Abschnitt soll daher mehr an bekannte Ergebnisse erinnern, weil diese in den Kapiteln 4 und 5 benötigt werden. In Abschnitt 2.10 wird eine Konstruktion der heterotischen Stringtheorie vorgestellt. Dabei stellt sich heraus, daß es nur zwei Möglichkeiten für konsistene heterotische Theorien gibt. Zum einen eine heterotische Theorie mit $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ Eichgruppe, zum anderen eine mit SO(32) Eichgruppe. Desweiteren werden sogenannte *Wilson*-Linien eingeführt. *Wilson*-Linien sind flache Hintergründe für die Eichfelder und liefern (in einer gewissen Analogie zum B-Feld) wiederum Korrekturen des Nullmodenspektrums. Die Quantisierung mit *Wilson*-Linien wird explizit durchgeführt und das Nullmodenspektrum angegeben.

Die Darstellung und Notation dieses Kapitels hält sich, sofern nicht anders angegeben, an [28, 29]. D gibt die kritische Dimension an (es wird von 0 bis $D-1$ gezählt), d die Anzahl der unkompaktifizierten und k die Anzahl der kompaktifizierten Dimensionen. $\sigma = \sigma^1$ ist der räumliche, $\tau = \sigma^0$ der zeitliche Weltflächenparameter. Diese werden häufig zu der komplexen Koordinate $z = \sigma^1 + i\sigma^2$ zusammengefaßt, wobei $\sigma^2 = i\sigma^0$ der *Wick*-rotierte zeitliche Parameter ist.

2.1 Kompaktifizierung einer Dimension

Betrachtet man ein eindimensionales skalares Feld $X = X^k$, so entspricht dem Einrollen der k-ten Dimension eine Identifikation:

$$X \cong X + 2\pi R\,. \tag{2.1}$$

R bezeichnet den Kompaktifizierungs-Radius. Der Einfachheit halber wird die Metrik $G_{kk} = 1$ gesetzt.
Die Weltflächen-Wirkung ist gegeben durch:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2 z\, \partial X \bar{\partial} X\,.$$

Aufgrund der Identifizierung (2.1), muß ein String-Zustand invariant gegenüber Translation von X um $2\pi R$ sein. Diese werden durch $\exp(2\pi i R p)$ generiert (p bezeichnet den kanonischen Impuls). Für den Impuls k folgt damit:

$$k = \frac{n}{R}\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Er ist also quantisiert. Diese Konstruktion ist aus den *Kaluza-Klein*-Theorien bekannt. Deswegen wird n auch *Kaluza-Klein*- oder kurz KK-Impulszahl genannt.

Eine auf Stringtheorien beschränkte Eigenschaft ist nun, daß sich der String auch um die kompaktifizierte Dimension „herumwinden“ kann (vergl. Abb. 2.1). Dann gilt:

$$X(\sigma + 2\pi, \tau) = X(\sigma, \tau) + 2\pi R\, w\,, \quad w \in \mathbb{Z}\,.$$

Die Windungszahl w gibt also an, wie oft sich der String um die kompaktifizierte Dimension windet (das Vorzeichen spiegelt die Orientierung bzgl. X wieder).

Die *Laurent*-Entwicklung der holomorphen bzw. antiholomorphen Ableitung des Koordinatenfeldes ist gegeben durch

$$\partial X(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m}{z^{m+1}}\,, \quad \bar{\partial} X(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m}{\bar{z}^{m+1}}.$$

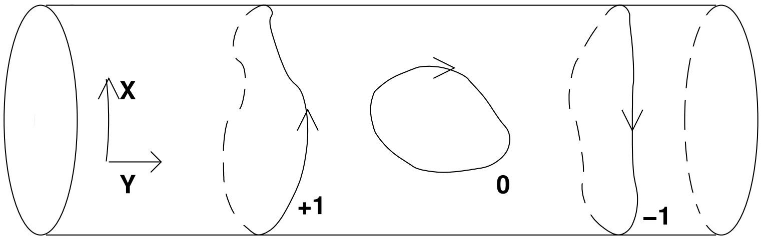

Abbildung 2.1: Strings mit Windungszahlen $+1, 0$ und -1 entlang der kompakten Richtung, Y ist eine beliebige unkompaktifizierte Dimension.

α und $\tilde{\alpha}$ bezeichnen die links- und rechtslaufenden Oszillatoren. Die Änderung der Koordinate bei Umlaufen des Strings errechnet sich aus

$$2\pi R\, w = \oint (\mathrm{d}z\, \partial X + \mathrm{d}\bar{z}\, \bar{\partial} X) = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\, (\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0). \tag{2.2}$$

Aus dem *Noether*-Theorem ergibt sich für den Gesamtimpuls

$$p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \oint (\mathrm{d}z\, \partial X - \mathrm{d}\bar{z}\, \bar{\partial} X) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}\, (\alpha_0 + \tilde{\alpha}_0). \tag{2.3}$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt für die links- und rechtslaufenden Impulse

$$\begin{aligned} p_L &\equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, \alpha_0 = \frac{n}{R} + \frac{w\, R}{\alpha'} \\ p_R &\equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, \tilde{\alpha}_0 = \frac{n}{R} - \frac{w\, R}{\alpha'}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die im Folgenden auftretenden Größen sind in Anhang A zusammengefaßt und erläutert. Die *Virasoro*-Generatoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\alpha'\, p_L^2}{4} + N + a \qquad \text{mit} \quad N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n\ , \\ \tilde{L}_0 &= \frac{\alpha'\, p_R^2}{4} + \tilde{N} + \tilde{a} \qquad \text{mit} \quad \tilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}\tilde{\alpha}_n\ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Betrachtet man nun die vollständige bosonische Theorie ($D = 26$), wobei nur X^{25} wie oben kompaktifiziert ist, so ergibt sich aus der Bedingung[1] $L_0 = \tilde{L}_0$, die für physikalische Zustände erfüllt sein muß:

$$n\, w + N - \tilde{N} + a - \tilde{a} = 0$$

und für das String-Spektrum

$$\begin{aligned} m^2 &= -k^2 = \frac{4}{\alpha'} \left[L_0 - \frac{c}{24} \right] \\ &= \underbrace{\frac{n^2}{R^2}}_{(1)} + \underbrace{\frac{w^2\, R^2}{\alpha'^2}}_{(2)} + \frac{2}{\alpha'}(\underbrace{N + \tilde{N}}_{(3)} \underbrace{- 2}_{(4)}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

[1]Diese Bedingung wird im weiteren Verlauf als „Physical-state-Bedingung“ bezeichnet.

Dabei wurde benutzt, daß für die 26-dimensionale bosonische Theorie $a = \tilde{a}$, $c = \tilde{c}$ und $(a - c/24) = -1$ gilt. Man kann nun folgende Beiträge zum Massenquadrat identifizieren:

(1) Anteil aus kompaktem KK-Impuls

(2) Potentielle Energie der gewundenen Strings

(3) Oszillatorbeiträge

(4) Nullpunktenergie

Die beiden letzten Beiträge treten schon in der unkompaktifizierten Theorie auf.

Weitere, detailliertere Betrachtungen des Massenspektrums erfolgen im Rahmen der Abschnitte (2.2) und (2.4).

2.2 T-Dualität

Betrachtet man die Massen-Formel (2.6), so erkennt man, daß diese unter der Transformation

$$R \to R' = \frac{\alpha'}{R} \quad , \qquad n \leftrightarrow w \tag{2.7}$$

invariant ist. Es handelt sich also um eine Symmetrietransformation des Spektrums. An den kompaktifizierten Impulsen (2.4) kann man ablesen, daß der Austausch von Windungszahl w und KK-Impulszahl n der Transformation

$$p_L^{25} \to p_L^{25} \ , \qquad p_R^{25} \to -p_R^{25} \tag{2.8}$$

entspricht. Da das Koordinatenfeld in einen holomorphen und einen antiholomorphen Anteil separiert

$$X^{25}(z, \bar{z}) = X_L^{25}(z) + X_R^{25}(\bar{z}) \ ,$$

ist (2.8) wiederum äquivalent zum Übergang zum sogenannten T-dualen Koordinatenfeld

$$X'^{\,25}(z, \bar{z}) = X_L^{25}(z) - X_R^{25}(\bar{z}) \ . \tag{2.9}$$

Da Operatorproduktentwicklungen (OPEen) und Energie-Impuls-Tensor unter diesen Transformationen invariant bleiben, sind die einzigen Unterschiede der zugrunde liegenden CFTen durch (2.8) und die Inversion des Radius $R \to R' = \alpha'/R$ gegeben. Es handelt sich also einfach um verschiedene Beschreibungen ein und derselben Theorie. Zwei Theorien, die durch eine solche Transformation verbunden sind, nennt man T-dual (zueinander).

T-Dualität hat weitreichende physikalische Konsequenzen: Ein großer Kompaktifizierungsradius wird in der T-dualen Beschreibung klein. Der Fundemantalbereich unterscheidbarer Theorien wird so auf $R \geq \sqrt{\alpha'}$ eingeschränkt[2].

Der „selbstduale“ Kompaktifizierungs-Radius

$$R_{sd} = \sqrt{\alpha'} \tag{2.10}$$

spielt eine spezielle Rolle. Eine auf einem Kreis mit Radius R_{sd} kompaktifizierte Theorie weist eine erweiterte Eichsymmetrie ($\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ statt $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$) auf. Grund dafür sind zusätzlich auftretende masselose Zustände, die unter der angegebenen Eichgruppe transformieren. Die durch die Inversion des Radius gegebene $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie ist ein Überbleibsel dieser Eichgruppe. Wenn der selbstduale Radius in einer Theorie enthalten ist, so wird durch das „Vakuum“ die $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie nicht spontan gebrochen, andernfalls schon.

[2]Eine Einschränkung auf $0 \leq R \leq \sqrt{\alpha'}$ wäre äquivalent.

2.3 Kompaktifizierung mehrerer Dimensionen

Die Ergebnisse der vorherigen Abschnitte lassen sich auf mehrere Dimensionen verallgemeinern. Werden alle Dimensionen mit dem Radius R toroidal kompaktifiziert, gilt:

$$X^m \cong X^m + 2\pi R \quad , \quad d \leq m \leq 25 \; .$$

Die Geometrie der kompaktifizierten Dimensionen ist ein k-Torus (T^k), der durch die innere Metrik G_{mn} beschrieben wird.

Im Folgenden wird das masselose Spektrum einer toroidal kompaktifizierten Theorie beschrieben. Die innere Metrik sei konstant. Sind alle Windungs- und KK-Impulszahlen identisch Null, so kann man an Gleichung (2.6) ablesen, daß das masselose Spektrum aus Zuständen mit $N = \tilde{N} = 1$ gebildet wird. Andere Zustände verschwindender Masse sind (falls R beliebig sein soll[3]) nicht möglich. Es tragen nur die physikalischen, transversalen Oszillatoren zum Spektrum bei, so daß man $(26-2)^2 = 24^2$ masselose Zustände erhält. Ordnet man diese Zustände separat nach Raumzeit- ($2 \leq \mu\, , \, \nu \leq d-1$) und internen ($d \leq m\, , n \; \leq 25$) Indizes, so erhält man:

$$\begin{array}{ll} \alpha^\mu_{-1}\, \tilde{\alpha}^\nu_{-1} | \, 0 \, ; \, k \, \rangle \quad , & (\alpha^\mu_{-1} \tilde{\alpha}^n_{-1} + \alpha^n_{-1} \tilde{\alpha}^\mu_{-1}) | \, 0 \, ; \, k \, \rangle \; , \\ (\alpha^\mu_{-1} \tilde{\alpha}^n_{-1} - \alpha^n_{-1} \tilde{\alpha}^\mu_{-1}) | \, 0 \, ; \, k \, \rangle \quad , & \alpha^m_{-1}\, \tilde{\alpha}^n_{-1} | \, 0 \, ; \, k \, \rangle \; . \end{array} \tag{2.11}$$

Die erste Gruppe von Zuständen läßt sich in Graviton, Dilaton und antisymmetrischen Tensor zerlegen. Die zweite Gruppe besteht aus KK-Eichbosonen A^m_μ. Die dritte Gruppe entspricht antisymmetrischen Tensor-Eichbosonen $B_{m\,\mu}$. Die vierte Gruppe entspricht Skalaren, wobei der symmetrische Anteil durch die interne Metrik G_{mn} und der antisymmetrische Anteil durch B_{mn} beschrieben wird. Diese Größen werden als „Moduli“ bezeichnet.

2.4 Auswirkungen auf das String-Spektrum

Es stellt sich nun die Frage, welche Auswirkungen toroidale Kompaktifizierung auf das String-Spektrum hat. Diese Frage soll für konstantes G und B geklärt werden.
Der kompaktifizierte Anteil der euklidischen Weltflächen-Wirkung[4] ist gegeben durch:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{g} \, \left[\left(g^{ab} G_{mn} + i\epsilon^{ab} B_{mn} \right) \partial_a X^m \, \partial_b X^n \right] \; , \tag{2.12}$$

wobei g^{ab} die Weltflächen-Metrik bezeichnet, $g \equiv \det g$. Der Beitrag des antisymmetrischen Tensors zur Lagrangedichte ist für konstantes B proportional zur totalen Ableitung

$$B_{mn} \partial_a \left(\epsilon^{ab} X^m \, \partial_b X^n \right) \; . \tag{2.13}$$

Damit hat dieser Beitrag lokal keinerlei Einfluß auf die Oszillatoren, verändert aber das Nullmoden-Spektrum, wie im Folgenden gezeigt wird.
Betrachtet man die Nullmoden-Beiträge zur Weltflächen-Wirkung, so folgt mit

$$X^m(\sigma^1, \sigma^2) = x^m(\sigma^2) + w^m R \, \sigma^1$$

[3]für bestimmte R können wiederum erweiterte Eichsymmetrien auftreten, die hier nicht näher betrachtet werden sollen.

[4]Der Dilaton-Term ist vernachlässigt, weil er für diese Betrachtungen keine Rolle spielt.

aus Gleichung (2.12)

$$L = \frac{1}{2\alpha'} G_{mn}(\dot{x}^m \dot{x}^n + w^m w^n R^2) + \frac{i}{\alpha'} B_{mn} \dot{x}^m w^n R \,. \tag{2.14}$$

Punkte kennzeichnen Ableitungen nach σ^2, dem *Wick*-rotierten zeitlichen Weltflächenparameter ($\sigma^2 = i\tau$). Aus (2.14) errechnet sich der kanonisch konjugierte Impuls zu:

$$p_m = -\frac{\partial L}{\partial v^m} = \frac{1}{\alpha'}(G_{mn} v^n - B_{mn}\, w^n\, R) \,. \tag{2.15}$$

Dabei ist $v^m = i\dot{x}^m$. Analog zu Abschnitt 2.1 ist der kanonische Impuls gemäß $p_m = n_m/R$ quantisiert. Damit und mit (2.15) folgt

$$v_m = \alpha' \frac{n_m}{R} + B_{mn}\, w^n\, R \,.$$

Für gewundene Strings ist v_m also B-Feld-abhängig. Der Nullmoden-Beitrag zur Hamiltonfunktion H beträgt

$$\frac{1}{2\alpha'} G_{mn}(v^m v^n + w^m w^n\, R^2) \,,$$

woraus wiederum für das Massenquadrat

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{2\alpha'^2} G_{mn}(v_L^m v_L^n + v_R^m v_R^n) + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \,, \\ v_{L,R}^m &= v^m \pm w^m\, R \end{aligned}$$

folgt. Die Massenlevel werden also durch das B-Feld angehoben.
Die Physical-state-Bedingung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= G_{mn}(v_L^m v_L^n - v_R^m v_R^n) + 4\alpha'(N - \tilde{N}) \\ &= 4\alpha'(n_m\, w^m + N - \tilde{N}) \,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Für viele Rechnungen ist es nützlich, ein Vielbein

$$G_{mn} = e_m^r e_n^r \tag{2.17}$$

einzuführen. Das inverse Vielbein sei mit $(e^{-1})_r^m$ bezeichnet. Damit verschwindet die Metrik aus der Wirkung und die Koordinaten $X^r = e_m^r X^m$ erfüllen die Standard-OPEen. Die Impulse sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} k_{Lr} &= (e^{-1})_r^m \frac{v_{Lm}}{\alpha'} = \frac{n_r}{R} + \frac{w^s R}{\alpha'}(G_{rs} + B_{rs}) \\ k_{Rr} &= (e^{-1})_r^m \frac{v_{Rm}}{\alpha'} = \frac{n_r}{R} + \frac{w^s R}{\alpha'}(-G_{rs} + B_{rs}) \end{aligned} \tag{2.18}$$

In dieser Notation folgt für das Massenquadrat und die Physical-state-Bedingung:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{2}(k_{Lr}k_{Lr} + k_{Rr}k_{Rr}) + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \\ &= \frac{R^2}{\alpha'^2}\left[w^n (G - BG^{-1}B)_{nk} w^k\right] + \frac{2}{\alpha'} w^m (BG^{-1})_m^{\ k} n_k + \\ &\quad + \frac{1}{R^2} n_m (G^{-1})^{mk} n_k + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha'(k_{Lr}k_{Lr} - k_{Rr}k_{Rr}) + 4(N - \tilde{N}) \\ &= 4(n_k w^k + N - \tilde{N}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Die Besetzungszahl-Operatoren N und $\tilde{N}$ aus Gleichung (2.5) verallgemeinern sich kanonisch zu

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^{r} G_{rs} \alpha_{n}^{s} \quad \text{und} \quad \tilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^{r} G_{rs} \tilde{\alpha}_{n}^{s} \ . \tag{2.21}$$

2.5 Die *Narain*-Konstruktion

Wie schon in der Einleitung erwähnt, liefert die *Narain*-Konstruktion eine praktische Beschreibung toroidaler Kompaktifizierungen. Sie wurde erstmals in [23] vorgestellt.
Die OPE zweier Windungs-Vertex-Operatoren[5] ist gegeben durch

$$\begin{aligned} &: e^{ik_L \cdot X_L(z) + ik_R \cdot X_R(\bar{z})} :: e^{ik'_L \cdot X_L(0) + ik'_R \cdot X_R(0)} : \\ &\qquad \sim z^{l_L \cdot l'_L} \bar{z}^{l_R \cdot l'_R} \ : e^{i(k_L + k'_L)\cdot X_L(0) + i(k_R + k'_R)\cdot X_R(0)} : \quad . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Die Paare der dimensionslosen Impulse (l_L, l_R) mit $l_{L/R} = \sqrt{\alpha'/2}\, k_{L/R}$ und $k_{L/R}$ wie in (2.18) bilden für eine gegebene Kompaktifizierung ein Gitter Γ im $2k$-dimensionalen Impulsraum. Umkreist ein Vertex-Operator den anderen $(z \to z\, e^{-2\pi i})$ so ergibt sich für das Produkt eine Phase von

$$\exp[2\pi i (l_L \cdot l'_L - l_R \cdot l'_R)] \equiv \exp[2\pi i (l \circ l')] \ . \tag{2.23}$$

Damit das Operator-Produkt eindeutig bleibt, muß also gelten, daß

$$l \circ l' \in \mathbb{Z} \qquad \forall\, l, l' \in \Gamma \ . \tag{2.24}$$

Das duale Gitter Γ^* ist über das $\circ$-Produkt definiert:

$$\Gamma^* \equiv \{ l \in \mathbb{R}^{2k} \mid l' \in \Gamma \ \Rightarrow \ l \circ l' \in \mathbb{Z} \} \ .$$

Damit ist die Bedingung (2.24) äquivalent zu der Aussage, daß

$$\Gamma \subset \Gamma^*$$

sein muß. Die Forderung nach modularer Invarianz[6] schränkt die zulässigen Impulse sogar noch weiter ein. Aus der Invarianz unter der Transformation $\tau \to \tau + 1$ folgt $L_0 - \tilde{L}_0 \in \mathbb{Z}$. Diese Bedingung wird „Level-matching-condition“ genannt. Betrachtet man nun Gleichung (2.5), so findet man, daß

$$l \circ l \in 2\mathbb{Z} \ . \tag{2.25}$$

Diese Bedingung impliziert aufgrund der Abgeschlossenheit der OPE direkt Bedingung (2.24), weil

$$2l \circ l' = (l + l') \circ (l + l') - l \circ l - l' \circ l' \in 2\mathbb{Z} \ .$$

Aus modularer Invarianz unter $\tau \to -1/\tau$ folgt schließlich, daß das Gitter selbstdual sein muß, also

$$\Gamma = \Gamma^* \ . \tag{2.26}$$

---

[5]Kozykel vernachlässigt, weil hier irrelevant.

[6]Betrachtet man String-Wechselwirkungen, so entsprechen die entstehenden Weltflächen zweidimensionalen *Riemann*schen Flächen, die durch einen *Teichmüller*-Parameter τ (auch Modulus genannt) parametrisiert werden können. Die Symmetrietransformationen dieser Flächen werden durch $\tau \to \tau + 1$ und $\tau \to -1/\tau$ generiert. Eine konsistente Theorie muß diese Symmetrien respektieren. Ist dies erfüllt, spricht man von modularer Invarianz der Theorie.

Das sieht man wie folgt: Die Zustandssumme der kompakten Dimensionen ist gegeben durch

$$Z_\Gamma(\tau) = |\eta(\tau)|^{-2k} \sum_{l\in\Gamma} \exp(\pi i \tau l_L^2 - \pi i \bar{\tau} l_R^2) \ , \tag{2.27}$$

wobei $\eta(\tau)$ die *Dedekind*-Funktion ist (vergleiche Anhang B). Es gilt:

$$\sum_{l'\in\Gamma} \delta(l-l') = V_\Gamma^{-1} \sum_{l''\in\Gamma^*} \exp(2\pi i l'' \circ l) \ .$$

Dabei ist V_Γ das Volumen der Einheitszelle des Gitters Γ. (2.27) läßt sich nun wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} Z_\Gamma(\tau) &= V_\Gamma^{-1}|\eta(\tau)|^{-2k} \sum_{l''\in\Gamma^*} \int \mathrm{d}^{2k} l \exp(2\pi i l'' \circ l + \pi i \tau l_L^2 - \pi i \bar{\tau} l_R^2) \\ &= V_\Gamma^{-1}(\tau\bar{\tau})^{-k/2}|\eta(\tau)|^{-2k} \sum_{l''\in\Gamma^*} \exp(-\pi i {l''}_L^2/\tau + \pi i {l''}_R^2/\bar{\tau}) \\ &= V_\Gamma^{-1} Z_{\Gamma^*}(-1/\tau) \ . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Hier wurde *Poisson*-Resummierung und das modulare Transformationsverhalten der η-Funktion benutzt (siehe Anhang B).

Damit ist Γ nun endgültig definiert. Zusammenfassend muß gelten: Γ ist ein gerades (2.25) selbstduales (2.26) Gitter mit Signatur (k,k). Diese Gitter werden als *Narain*-Gitter bezeichnet und sind vollständig klassifiziert.

Die *Narain*-Beschreibung erhält man aus dem Standardformalismus, indem man zu Koordinaten übergeht, in denen die Metrik diagonal ist, also $G_{m'n'} = \delta_{m'n'}$ und $k_{m'} = e_{m'}^{\ n} k_n$. Das Vielbein ist durch $\delta_{p'q'} = e_{p'}^{\ m} e_{q'}^{\ n} G_{mn}$ definiert.

2.6 Der Modul-Raum

In den beiden Bedingungen für ein *Narain*-Gitter gehen die Impulse l nur über das $\circ$-Produkt ein, das invariant unter Transformationen $\Lambda \in \mathrm{O}(k,k,\mathbb{R})$ ist. Betrachtet man aber nun zum Beispiel die Massenschalen-Bedingung (2.6), so hängt diese seperat von $l_L \cdot l'_L$ oder, über die Level-matching-Bedingung, von $l_R \cdot l'_R$ ab. Die Massen sind also nur invariant unter $\mathrm{O}(k,\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(k,\mathbb{R})$, wobei die Gruppen getrennt auf l_L und l_R wirken. Λ ist also keine Symmetrietransformation der vollen Theorie und wird i.A. physikalisch unterschiedliche Theorien liefern. Ausnahme bilden Transformationen der diskreten T-Dualitätsgruppe, wie weiter unten beschrieben wird. Ist $\Lambda' \in \mathrm{O}(k,\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(k,\mathbb{R})$ so sind die mit Λ und $\Lambda'\Lambda$ transformierten Theorien äquivalent. Der daraus folgende Nebenklassenraum von physikalisch unterschiedlichen Theorien ist (bis auf diskrete Symmetrien) gegeben durch

$$\frac{\mathrm{O}(k,k,\mathbb{R})}{\mathrm{O}(k,\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(k,\mathbb{R})} \ . \tag{2.29}$$

Die Anzahl der Parameter in diesem Nebenklassenraum beträgt

$$\frac{2k(2k-1)}{2} - 2\,\frac{k(k-1)}{2} = k^2 \ .$$

Das ist die gleiche Anzahl wie die der Komponenten von G_{mn} und B_{mn} aus Abschnitt 2.3. Beide Beschreibungen sind also äquivalent.

Nun stellt sich die Frage, wie sich die im Abschnitt 2.2 eingeführte T-Dualität in die *Narain*-Beschreibung eingliedern läßt. Da es sich bei T-Dualität um eine diskrete Symmetrie handelt, liegt es nahe, daß auch die verallgemeinerte Form diskret operiert. Es stellt sich heraus, daß die Verallgemeinerung gerade durch die Automorphismen-Gruppe des Gitters $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{Z})$ gegeben ist. Sie ist diskret und derartige Transformationen lassen die Theorie offensichtlich invariant. Die Automorphismen-Gruppe wird als *T-Dualitäts-Gruppe* bezeichnet, der modifizierte Nebenklassenraum als *Modul-Raum*. Er ist durch

$$
\mathrm{O}(k,\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(k,\mathbb{R}) \,\Big\backslash\, {}^{\mathrm{O}(k,k,\mathbb{R})} \Big/\, \mathrm{O}(k,k,\mathbb{Z}) \tag{2.30}
$$

gegeben[7].

Zur Untersuchung des Modul-Raum ist es nützlich, die Moduli G und B zu einer Hintergrundmatrix E zusammenzufassen. Die folgenden Betrachtungen halten sich an [19]. Die Hintergrundmatrix E ist gegeben durch

$$
E = \frac{R^2}{\alpha'}(G+B) \quad \text{mit} \quad \mathrm{G} = \frac{\alpha'}{\mathrm{R}^2}(\mathrm{E})_\mathrm{S} \quad \text{und} \quad \mathrm{B} = \frac{\alpha'}{\mathrm{R}^2}(\mathrm{E})_\mathrm{A}\ , \tag{2.31}
$$

wobei $(E)_{S/A}$ den symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anteil von E bezeichnen. Sei nun $Z \equiv \binom{w}{n}$. Dieser Vektor zählt Windungs- und KK-Impuls-Zahlen, hat also ganzzahlige Einträge. Dann folgt aus Gleichung (2.19) wegen $H = \alpha'/4\,m^2$ für den Nullmoden-Anteil der *Hamilton*-Funktion H^0:

$$
H^0 = \frac{1}{4} Z^T M(E) Z
$$

Die $(2k \times 2k)$-dimensionale Bilinearform $M(E)$, die nur von den Hintergrundfeldern abhängt, ist gegeben durch

$$
M(E) = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{\alpha'}\,(G - BG^{-1}B) & BG^{-1} \\ -G^{-1}B & \frac{\alpha'}{R^2}\,G^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.32}
$$

Es ist zu beachten, daß B und G kovariante Tensoren zweiter Stufe sind. Damit sind die Einträge von w durch w^k, die von n durch n_m gegeben. Die Index-Struktur der $(k \times k)$ dimensionalen Block-Matrizen aus Gleichung (2.32) liegt dadurch fest.
Sei nun g eine $(2k\times 2k)$-dimensionale Matrix mit $(k\times k)$-dimensionalen Blockmatrizen a, b, c, d:

$$
g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.33}
$$

und die ebenfalls $(2k \times 2k)$-dimensionale Matrix J gegeben durch

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.34}
$$

Dann kann man Elemente g aus $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{R})$ wie folgt beschreiben:

$$
g \in \mathrm{O}(k,k,\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad g^T J g = J\ . \tag{2.35}
$$

[7] Die kontinuierlichen Gruppen im Nenner operieren von links, die diskrete von rechts.

Unter einer $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{R})$-Transformation g transformiert die Bilinearform (2.32) gemäß

$$gMg^T \equiv M_g \ . \tag{2.36}$$

Entscheidend ist nun herauszufinden, wie sich die dazugehörige Hintergrundmatrix E transformiert. Dazu betrachtet man

$$g_E = \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{\alpha'}}\, e & \frac{R}{\sqrt{\alpha'}}\, B(e^T)^{-1} \\ 0 & \frac{\sqrt{\alpha'}}{R}\, (e^T)^{-1} \end{pmatrix} ,$$

wobei e das Vielbein bezeichnet. g_E erfüllt Gleichung (2.35) und ist damit Element von $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{R})$.
Die Wirkung von g auf eine $(k{\times}k)$-Matrix F sei durch eine gebrochen rationale Transformation definiert, also

$$g(F) \equiv (aF+b)(cF+d)^{-1} \ . \tag{2.37}$$

a, b, c, d sind die Einträge von g wie in (2.33).
Damit folgt:

$$g_E(\mathbb{1}) = \frac{R^2}{\alpha'}\,(G+B) = E \ . \tag{2.38}$$

Weiterhin gilt:

$$M = g_E g_E^T \ . \tag{2.39}$$

Aus den Gleichungen (2.36, 2.37, 2.38, 2.39) kann man nun folgern:

$$M' = M(E') \equiv M_g = gMg^T = g\ g_E g_E^T\ g^T \overset{!}{=} g_{E'} g_{E'}^T \quad \Rightarrow \quad g_{E'} = g g_E \ . \tag{2.40}$$

Damit gilt

$$E' = g_{E'}\ (\mathbb{1}) = g g_E\ (\mathbb{1}) = g(E)$$

und die gesuchte Transformation der Hintergrundfelder lautet:

$$E' = g(E) = (aE+b)(cE+d)^{-1} \ . \tag{2.41}$$

Die Transformation erfüllt die Gruppeneigenschaft $g(g'(E)) = (gg')(E)$.

2.7 Die T-Dualitäts-Gruppe

Hier soll nun die in Abschnitt 2.6 eingeführte T-Dualitäts-Gruppe mit Hilfe des ebenfalls dort entwickelten Formalismus näher untersucht werden. Dazu werden die Generatoren der $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{Z})$ im Folgenden aufgelistet. Die Diskussion bezieht sich zunächst nur auf das Nullmoden-Spektrum. Die Oszillatoren werden anschließend getrennt behandelt.

2.7.1 Verschiebungen des antisymmetrischen Hintergrundfeldes

Addiert man zu der antisymmetrischen Hintergrundmatrix B eine wiederum antisymmetrische Matrix $\frac{\alpha'}{R^2}\Delta$ mit $\Delta_{ij} = -\Delta_{ji} \in \mathbb{Z}$, so bleibt das Spektrum invariant. In der $(2k \times 2k)$-dimensionalen Darstellung entspricht diese Transformation dem Element

$$g_\Delta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \Delta \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} . \tag{2.42}$$

Der Faktor $\frac{\alpha'}{R^2}$ ergibt sich, wenn man $M' = g_\Delta M g_\Delta^T$ ausrechnet. g_Δ erfüllt Gleichung (2.35), hat ganzzahlige Einträge und ist damit Element von $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{Z})$. Es gibt nun zwei Möglichkeiten zu sehen, daß die antisymmetrische Verschiebung eine Symmetrie-Transformation des Spektrums ist:

(1) Wie aus Gleichung (2.13) ersichtlich, ist der B-Anteil zur Wirkung S (2.12) eine totale Ableitung und gibt damit nur topologische Beiträge. Durch die Verschiebung ändert sich die Wirkung um ganzzahlige Vielfache von 2π und das Pfadintegral bleibt invariant [8].

(2) Betrachtet man Gleichung (2.18), so erkennt man, daß die Transformation $B \to B + \frac{\alpha'}{R^2}\Delta$ dadurch wieder aufgehoben werden kann, daß man die KK-Impulszahlen durch $n \to n' = n - \Delta w$ ersetzt. Diese Redefinition ist ohne weiteres zulässig, weil n' wieder ganzzahlig ist und die antisymmetrische Verschiebung daher einen Gitterautomorphismus beschreibt.

2.7.2 Basiswechsel

Sei $A \in \mathrm{SL}(k,\mathbb{Z})$ eine lineare Transformation mit ganzzahligen Einträgen ($\det A = 1$ garantiert Invertierbarkeit), die einen Basiswechsel des Kompaktifizierungsgitters[9] beschreibt. Dann kann man die Hintergrundmatrix gemäß $E' = AEA^T$ konjugieren. Entsprechend ist

$$g_A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} , \tag{2.43}$$

mit $A^* = A^{-T} = (A^T)^{-1}$. g_A erfüllt wiederum Gleichung (2.35), hat ganzzahlige Einträge und ist damit Element von $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{Z})$. Die Invarianz des Spektrums erkennt man, indem man die transformierte Bilinearform betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} Z^T M' Z &= n^T A^* \, [\frac{\alpha'}{R^2} \, G^{-1}] \, A^{-1} n + w^T A \, [\frac{R^2}{\alpha'} \, (G - BG^{-1}B)] \, A^T w + \\ &\quad + w^T A \, [2BG^{-1}] \, A^{-1} n \, . \end{aligned} \tag{2.44}$$

Vergleicht man (2.44) mit der Originalform

$$\begin{aligned} Z^T M Z &= n^T \, [\frac{\alpha'}{R^2} \, G^{-1}] \, n + w^T \, [\frac{R^2}{\alpha'} \, (G - BG^{-1}B)] \, w + \\ &\quad + w^T \, [2BG^{-1}] \, n \end{aligned} \tag{2.45}$$

so erhält man diese über die Redefinition

$$w \to w' = A^T w \quad \text{und} \quad n \to n' = A^{-1} n \tag{2.46}$$

zurück. Die Transformation (2.46) beschreibt einen Gitterautomorphismus weil w' und n' wieder ganzzahlig sind. Das Spektrum bleibt invariant.

[8] Der dimensionslose Vorfaktor α'/R^2 hebt sich in der Wirkung weg, weil X mit $X + 2\pi R$ identifiziert wird. Das gibt einen Faktor R^2 und $1/\alpha'$ steht explizit in der Wirkung.

[9] Nicht mit dem *Narain*-Gitter zu verwechseln. Das Kompaktifizierungsgitter liegt im Ortsraum, das *Narain*-Gitter im Impulsraum.

2.7.3 Faktorisierte Dualität

Die faktorisierte Dualität D_i ist durch

$$g_{D_i} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - \Upsilon_i & \Upsilon_i \\ \Upsilon_i & \mathbb{1} - \Upsilon_i \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

gegeben. Die k-dimensionale Matrix Υ_i ist definiert als $(\Upsilon_i)_{nm} = \delta_{in}\,\delta_{nm}$. Die Υ_i sind Projektoren. g_{D_i} erfüllt Gleichung (2.35), hat ganzzahlige Einträge und ist daher Element von $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{Z})$. Ist der k-dimensionale Hintergrund ein direktes Produkt einer S^1 mit Radius R_i und dem $(k-1)$-dimensionalen Rest-Hintergrund, so generiert (2.47) in der X^i-Richtung die in Abschnitt 2.2 beschriebene T-Dualität $R_i \to \frac{\alpha'}{R_i}$ und läßt alle anderen Richtungen invariant. Für beliebigen Hintergrund ist die Interpretation nicht so klar, weil bei der Transformation der Hintergrundfelder G- und B-Feld mischen. Es kann jedoch analog zu den antisymmetrischen Verschiebungen und dem Basiswechsel gezeigt werden, daß die D_i's Symmetrietransformationen sind.

Die drei oben beschriebenen Symmetrietransformationen generieren die komplette $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{Z})$ (siehe z.B. [19]).

Bis jetzt wurde nur das Nullmoden-Spektrum betrachtet, es bleibt also noch zu klären wie sich die Oszillatoren transformieren. Weil Dualität eine Symmetrie des Strings ist, muß sie als kanonische Transformation auf die Oszillatoren wirken, also deren Kommutatorrelationen invariant lassen. Diese sind gegeben durch:

$$[\alpha^i_m(E), \alpha^j_n(E)] = [\tilde{\alpha}^i_m(E), \tilde{\alpha}^j_n(E)] = mG^{ij}\,\delta_{m+n,0} \tag{2.48}$$

Mit $G' = \frac{\alpha'}{R^2}(E' + E'^T)/2$ und Gleichung (2.41) findet man

$$(d + cE)^T G'(d + cE) = G \tag{2.49}$$

und analog, indem man (2.41) für E'^T aufstellt

$$(d - cE^T)^T G'(d - cE^T) = G\ . \tag{2.50}$$

Aus der Forderung nach Invarianz von (2.48) und mit Hilfe von (2.49) und (2.50) folgt das Transformationsverhalten der Oszillatoren:

$$\alpha_n(E) \to (d - cE^T)^{-1}\alpha_n(E')\ , \qquad \tilde{\alpha}_n(E) \to (d + cE)^{-1}\tilde{\alpha}_n(E')\ .$$

Unter dieser Transformation und der Transformation des G-Feldes (2.49) und (2.50) sind die Besetzungszahl-Operatoren (2.21) trivial invariant und damit auch die *Hamilton*-Funktion, also das gesamte Spektrum.

2.7.4 Weltflächen-Parität

Es gibt noch eine weitere Symmetrie die das Spektrum invariant läßt und deshalb bei der Konstruktion des Modul-Raumes berücksichtigt werden muß, die „Weltflächen-Parität“ Ω : $\sigma \mapsto -\sigma$. Sie wirkt wie folgt:

$$B \to -B\ , \quad \alpha_n \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n\ , \quad k_L \leftrightarrow k_R\ .$$

An der letzten Eigenschaft liegt es, daß die Weltflächen-Parität nicht in der $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{Z})$ enthalten ist, weil das Vorzeichen der *Lorentz*-Norm umgekehrt wird. Trotzdem spielt sie bei der Behandlung von offenen Strings eine große Rolle.

2.7.5 Simultane T-Dualität

Bei der Betrachtung der faktorisierten Dualitäten hat sich herausgestellt, daß diese für bestimmte Hintergründe die eindimensionale T-Dualität reproduzieren. Es gibt jedoch eine $O(k,k,\mathbb{Z})$-Transformation, die den eindimensionalen Fall auf mehrere Dimensionen verallgemeinert. Sie wird im Folgenden als „simultane T-Dualität“ D bezeichnet[10] und ist gegeben durch

$$g_D = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.51}$$

An dieser Definition kann man bereits ablesen, daß KK-Impulszahlen n und Windungszahlen w komplett vertauscht werden und nicht – wie im faktorisierten Fall – nur in einer Komponente. Analog zu den anderen T-Dualitäten findet man die Transformation des Hintergrundfeldes:

$$D : E \to E' = E^{-1} . \tag{2.52}$$

Mit Hilfe von (2.31) erhält man:

$$G' = (G - BG^{-1}B)^{-1} \;=\; (G+B)^{-1}\, G\, (G-B)^{-1} \tag{2.53}$$

$$B' = (B - GB^{-1}G)^{-1} \;=\; -(G+B)^{-1}\, B\, (G-B)^{-1} \tag{2.54}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$D : \frac{R^2}{\alpha'} \det(G \pm B) \to \frac{\alpha'}{R^2} \frac{1}{\det(G \pm B)}$$

und am selbstdualen Punkt

$$\rho = \frac{1}{\rho} \quad \text{wobei} \quad \rho \equiv \frac{R^2}{\alpha'} \det(G \pm B) . \tag{2.55}$$

Betrachtet man den eindimensionalen Fall ($G = 1$, $B = 0$) so folgt aus (2.55)

$$\frac{R_{sd}^2}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{R_{sd}^2} \quad \Rightarrow \quad R_{sd}^2 = \alpha'$$

in Übereinstimmung mit (2.10).

2.8 Der Modul-Raum des 2-Torus

In diesem Abschnitt soll der Modul-Raum für den ($k = 2$)-Fall näher untersucht werden, weil in den Kapiteln 5 und 6 Kompaktifizierungen betrachtet werden, die aus 2-Tori zusammengesetzt sind. Im ($k = 2$)-Fall hat man vier reelle Moduli zur Verfügung: G_{11}, G_{12}, G_{22} und $b \equiv B_{12}$. Da der 2-Torus eine *Kähler*-Mannigfaltigkeit ist, kann man auf ihm eine komplexe Struktur U und eine *Kähler*-Struktur T definieren. Es ist praktisch den 2-Torus in diesen Größen zu beschreiben. Sei

$$\begin{aligned} U &\equiv U_1 + i\, U_2 = \frac{G_{12}}{G_{11}} + i\, \frac{\sqrt{G}}{G_{11}} \\ T &\equiv T_1 + i\, T_2 = \frac{R^2}{\alpha'}(b + i\, \sqrt{G}) . \end{aligned} \tag{2.56}$$

[10] Oft wird die simultane T-Dualität auch einfach als T-Dualität bezeichnet. Da in dieser Diplomarbeit jedoch sowohl faktorisierte als auch simultane T-Dualitäten eine Rolle spielen, wird explizit unterschieden. Eine T-Dualitätstransformation kann (hier) ein beliebiges Element der $O(k,k,\mathbb{Z})$ sein.

Dabei ist $\sqrt{G} = \sqrt{\det G}$. Die inverse Transformation ist gegeben durch

$$E = \frac{T_2}{U_2} \begin{pmatrix} 1 & U_1 \\ U_1 & U_1^2 + U_2^2 \end{pmatrix} + T_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Fur die dimensionslosen Nullmoden-Impulse $l_{L/R} = \sqrt{\alpha'/2}\, k_{L/R}$ gilt[11] in komplexer Notation ($l = l_1 + il_2$):

$$\begin{aligned} l_L &= \frac{1}{i\sqrt{2U_2T_2}} \left[Un_1 - n_2 - \bar{T}(w^1 + Uw^2)\right] \\ l_R &= \frac{1}{i\sqrt{2U_2T_2}} \left[Un_1 - n_2 - T(w^1 + Uw^2)\right] . \end{aligned} \tag{2.57}$$

Für die Impulsquadrate folgt:

$$\begin{aligned} l_L^2 &= \frac{1}{2U_2T_2} \left|Un_1 - n_2 - \bar{T}(w^1 + Uw^2)\right|^2 \\ l_R^2 &= \frac{1}{2U_2T_2} \left|Un_1 - n_2 - T(w^1 + Uw^2)\right|^2 . \end{aligned} \tag{2.58}$$

Die diskrete Symmetriegruppe der 2-Torus-Kompaktifizierung wird durch $\mathrm{O}(2,2,\mathbb{Z})$ und die Weltflächen-Parität $\Omega : B \to -B$ generiert. Weil die $\mathrm{O}(2,2,\mathbb{R})$ lokal in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ faktorisiert, würde man naiv zunächst erwarten, daß das auch für die jeweiligen $\mathbb{Z}$-Gruppen gilt. Diese Annahme muß jedoch, wie im Folgenden gezeigt wird, modifiziert werden. Dazu betrachtet man zunächst einen nicht-minimalen Satz von Generatoren.

Die $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ wird durch zwei Elemente generiert, ein Produkt zweier $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ also durch vier. Weitere Generatoren sind der Austauch beider Gruppen und eine Reflexion $X^1 \to -X^1$ (Raumzeit-Parität in 1-Richtung). Die separaten $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$-Generatoren sind gegeben durch:

$$\begin{array}{rccc} K: & T \to T & , & U \to -\frac{1}{U} \\ L: & T \to T & , & U \to U+1 \\ K': & T \to -\frac{1}{T} & , & U \to U \\ L': & T \to T+1 & , & U \to U \end{array}$$

Die beiden ersten Transformationen entsprechen dem Basiswechsel (2.43)[12]. Daß die Basiswechsel eine $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ generieren und keine $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, sieht man wie folgt: Wiederholte Anwendung von K und L generiert

$$\tilde{U} = \frac{aU + b}{cU + d} , \quad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} , \quad ad - bc = 1 .$$

Diese Transformation beinhaltet eine $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie, nämlich die simultane Multiplikation von a, b, c und d mit (-1). Desweiteren gilt

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2 .$$

K' entspricht der simultanen T-Dualität (2.52) und L' folgt trivial aus den antisymmetrischen Verschiebungen (2.42). Zusammen generieren sie analog zur ersten die zweite $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Die

[11] Für die Berechnung benötigt man komplexe Vielbeine. Einfacher ist es, zuerst (2.58) zu verifizieren und dann die „Wurzel“ zu ziehen. Die relativen Vorzeichen (und nur auf die kommt es an) ergeben sich aus (2.18).

[12] Sie treten analog bei den Wechselwirkungsamplituden auf dem Torus als modulare Transformationen auf.

weiteren Symmetrien erkennt man an Gleichung (2.58): Rechnet man die Transformation der Hintergrundfelder für die faktorisierte Dualität in 1-Richtung D_1 aus und setzt diese dann in die Definition von *Kähler*- und komplexer Struktur ein, so findet man:

$$D_1 : U \leftrightarrow T \ . \tag{2.59}$$

Die Strukturen und damit beide $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ werden vertauscht. Raumzeit-Parität $R : X^1 \mapsto -X^1$ liefert analog

$$R : (U,T) \mapsto (-\bar{U}, -\bar{T}) \ . \tag{2.60}$$

Die T-Dualitätsgruppe ist also[13]

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}_2) \ . \tag{2.61}$$

Weltflächen-Parität Ω liefert

$$\Omega : (U,T) \mapsto (U, -\bar{T}) \ . \tag{2.62}$$

Dieser Satz von Generatoren ist nicht minimal. Es gelten folgende Identifikationen:

$$K' = D_1 K D_1 \ , \quad L' = D_1 L D_1 \quad R = D_1 \Omega D_1 \Omega \ . \tag{2.63}$$

Damit ist ein minimaler Satz von Generatoren durch (K, L, D_1, Ω) gegeben.

Die Diskussion für die kontinuierlichen Gruppen verläuft analog[14]. Wie oben angedeutet ist die $\mathrm{O}(2,2,\mathbb{R})$ lokal isomorph zu $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ (wiederum projektiv wegen der simultanen Multiplikation von a, b, c und d mit (-1)). Die $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$-Gruppen entsprechen lokal jeweils einer $\mathrm{U}(1)$. Damit ist der Modul-Raum für den 2-Torus schließlich durch

$$\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1) \setminus {}^{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})} / \, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}_2) \tag{2.64}$$

gegeben.

2.9 Faktorisierte T-Dualität bei Typ II Superstrings

In diesem Abschnitt wird kurz auf die Typ II Superstrings eingegangen, um einige für die Kapitel 4 und 5 wichtige Details zu rekapitulieren.

Die Weltflächenwirkung von Typ IIA und Typ IIB Superstrings auf flacher Raumzeit ist gegeben durch

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_M \mathrm{d}^2 z \left(\tfrac{2}{\alpha'} \partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu + \psi_\mu \partial_{\bar{z}} \psi^\mu + \tilde{\psi}_\mu \partial_{\bar{z}} \tilde{\psi}^\mu \right) \ . \tag{2.65}$$

Dabei sind ψ und $\tilde{\psi}$ links- und rechtslaufende Weltflächenfermionen. Beide können entweder periodische oder antiperiodische Randbedingungen erfüllen. Dementsprechend unterscheidet man *Ramond*-Sektor (R) und *Neveu-Schwarz*-Sektor (NS). Die Nullmoden von ψ und $\tilde{\psi}$ führen im R-Sektor zu einer Entartung des Vakuums, weshalb sich die Grundzustände unter einer der irreduziblen Spinordarstellung der SO(8), der $\mathbf{8}_s$ oder der $\mathbf{8}_c$ mit entgegengesetzten Chiralitäten transformieren. Die GSO-Projektion projiziert eine der beiden Spinordarstellungen heraus. Damit sind zwei masselose Spektren möglich:

$$\begin{array}{lcll} \text{Typ IIA} & : & (\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_s) \otimes (\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_c) & \text{nichtchiral} \\ \text{Typ IIB} & : & (\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_s) \otimes (\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_s) & \text{chiral} \end{array}$$

[13]Dabei bezeichnet $\ltimes$ das semidirekte Produkt.

[14]Das gilt auch für die modulare Invarianz der Wechselwirkungsamplituden auf dem Torus.

Eindimensionale T-Dualität (Abschnitt 2.2) kehrt das Vorzeichen der rechtslaufenden Koordinatenfelder um, also

$$T : X^9_R \to -X^9_R \; .$$

Aus der Forderung nach Invarianz des Superstroms $\tilde{T}_F \propto \tilde{\psi}_M \partial_{\bar{z}} (X_R)_M$ folgt damit für die rechtslaufenden Fermionen:

$$T : \tilde{\psi}^9 \to -\tilde{\psi}^9 \; .$$

Damit wird jedoch die Chiralität der Rechtsläufer umgekehrt. Eindimensionale T-Dualität bewirkt also

$$T : \; \text{IIA} \; \leftrightarrow \; \text{IIB} \; .$$

Für faktorisierte T-Dualität bedeutet dies, daß für eine ungerade Anzahl von Dualitäten die Theorien „vertauscht“ werden, für eine gerade Anzahl nicht.

2.10 Der heterotische String

In diesem Abschnitt soll erläutert werden, wie man aus der *Narain*-Konstruktion die Eichgruppen für die beiden supersymmetrischen heterotischen Stringtheorien herleiten kann. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Typ IIA/B-Theorien bekannt sind. Eine Einführung dieser Theorien würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen.

2.10.1 Bosonische Konstruktion und Eichgruppen

Der heterotische String ist a priori asymmetrisch. Man kombiniert die linkslaufende Seite einer 26-dimensionalen bosonischen Theorie mit der rechtslaufenden Seite einer 10-dimensionalen Typ II Theorie. Die dazugehörigen Felder seien mit $X^\mu(z,\bar{z})$ und $X^K(z,\bar{z})$ respektive $\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})$ bezeichnet. Im Folgenden soll gelten: Große lateinische Indizes laufen von 1 bis 16, kleine lateinische Indizes von d bis 25 und griechische Indizes von 0 bis $(d-1)$. Da die Zentralladungen von Links- und Rechtsläufern unabhängig voneinander sind, liefert die Konstruktion unter Berücksichtigung der Geister automatisch verschwindende Zentralladungen $(c, \tilde{c}) = (0, 0)$ und ist damit anomaliefrei. Weitere Einschränkungen an die Theorie sind Lokalität der OPEen und modulare Invarianz. Diese werden für den allgemeineren Fall einer Orbifold in Abschnitt 3.3 behandelt.

Sei nun wieder d die Anzahl der unkompaktifizierten Dimensionen. Dann bilden die dimensionslosen kompaktifizierten Impulse

$$(l^m_L, l^n_R) \; , \quad d \le m \le 25 \; , \; d \le n \le 9 \; , \; d \le 10$$

ein Gitter Γ. Unter Berücksichtigung der GSO-Projektion für die Rechtsläufer ergeben sich für Γ die gleichen Bedingungen wie im bosonischen Fall. Es muß gelten:

$$l \circ l \in 2\mathbb{Z} \quad \forall l \in \Gamma \quad \text{und} \quad \Gamma = \Gamma^* \; .$$

Das $\circ$-Produkt ist wie in (2.23) definiert

$$l \circ l' = l_{Lm} l^m_L + l^I_L l^I_L - l_{Rm} l^m_R \; , \tag{2.66}$$

hat jetzt allerdings Signatur $(26-d, 10-d)$. Γ muß also ein selbstduales, gerades Gitter mit eben dieser Signatur sein. All diese Gitter sind klassifiziert.

Sei nun $d = 10$. Dann ist Γ ein gerades, selbstduales 16-dimensionales euklidisches Gitter. Davon gibt es genau zwei, Γ_{16} und $\Gamma_8 \times \Gamma_8$. Sie sind über

$$\Gamma_k = \left\{(n_1, \ldots, n_k) \cup (n_1 + \tfrac{1}{2}, \ldots, n_k + \tfrac{1}{2}) \mid (n_i \in \mathbb{Z}) \wedge (\Sigma n_i \in 2\mathbb{Z})\right\}$$

definiert. Wie in der bosonischen Theorie ist die linkslaufende Nullpunktsenergie $A = -1$. Masselose Zustände werden also durch folgende Vertex-Operatoren gegeben: $\partial X^\mu, \partial X^m$ und $e^{i\sqrt{2/\alpha'}l_L \cdot X(z)}$ mit $l_L^2 = 2$. Die Typ II-Theorien liefern für die Rechtsläufer im masselosen Sektor eine $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}$ (vergleiche Anhang C). Tensoriert man Links- und Rechtsläufer, so erhält man aus dem Produkt mit ∂X^μ Graviton, Dilaton und antisymmetrischen Tensor. Die 16 ∂X^m-Ströme bilden einen maximal kommutierenden Satz, die den m-Impulsen entsprechen. Die l_L^m sind die Ladungen darunter und bilden deshalb die Wurzeln der zugrunde liegenden Eichgruppe. Für Γ_{16} setzen sich die Punkte mit Längenquadrat 2 aus den SO(32)-Wurzeln und dem Gitter *einer* SO(32)-Spinordarstellung zusammen. Für Γ_8 entsprechen die Punkte mit Längenquadrat 2 den E_8-Wurzeln (siehe z.B. [34]). Damit kommen für die heterotischen Theorien also zwei Eichgruppen in Frage, SO(32)[15] und $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$. Wenn man von heterotischen Stringtheorien spricht, meint man immer die 10-dimensionalen Theorien und gibt die entsprechende Eichgruppe an. Die Tatsache, daß die 16 linkslaufenden Dimensionen auf einem Gitter kompaktifiziert sind, folgt aus der bosonischen Konstruktion. Man kann die heterotischen Theorien auch direkt 10-dimensional definieren und gelangt ohne jede Kompaktifizierung zu den gleichen Eichgruppen, indem man linkslaufende Fermionen einführt. Beide Konstruktionen kann man durch den Mechanismus der „Bosonisierung“ (oder invers „Fermionisierung“) ineinander überführen. In dieser Arbeit werden sowohl die bosonische als auch die fermionische Beschreibung des Eichsektors verwendet, weil sie unterschiedliche Vorteile technischer Art bieten. In der fermionischen Beschreibung treten aufgrund der Zentralladungen 32 reelle Fermionen an die Stelle der 16 Bosonen im Eichsektor.

Die Diskussion der toroidalen Kompaktifizierung der 10-dimensionalen heterotischen Superstringheorien verläuft weitgehend parallel zu Abschnitt 2.6. Einziger Unterschied ist das Auftreten von sogenannten „*Wilson*-Linien“ in den heterotischen Theorien. Sie sollen im Folgenden eingeführt werden.

2.10.2 Quantisierung mit *Wilson*-Linien

Wilson-Linien beschreiben flache Hintergründe für die Eichfelder. Die Quantisierung des Eichsektors mit *Wilson*-Linien wurde zuerst in [25] behandelt. Die eichfixierte euklidische Weltflächen-Wirkung mit konstanten *Wilson*-Linien A_m^I und verschwindendem B-Feld ist gegeben durch[16]

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2\sigma \, \left(G_{mn} \partial_a X^m \, \partial^a X^n + \partial_a X^I \, \partial^a X^I + i\sqrt{2\alpha'} \epsilon^{ab} A_m^I \, \partial_a X^m \, \partial_b X^I \right) \, . \qquad (2.67)$$

[15] Mathematisch gesehen, ist dieses Statement falsch. Tatsächlich entspricht die Eichgruppe einer $\mathrm{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$. Dabei liegt die $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie im Zentrum der Spin(32) und projiziert eine der beiden vorhandenen Spinordarstellungen heraus. Weil sich die Benennung der Eichgruppe als SO(32) in der Literatur mittlerweile stark eingebürgert hat, wird die Konvention in dieser Arbeit übernommen. Die Bezeichnung ist *nicht* exakt. Details sind z.B. in [36] beschrieben.

[16] Der Vorfaktor von $\sqrt{2\alpha'}$ vor dem A-Term ergibt sich aus der Wahl des Kompaktifizierungsgitter für die X^I und ist somit keine Normierung für die *Wilson*-Linien selbst. Bei *Wilson*-Linien für offene Strings wird dieser Faktor wegfallen.

Wie schon beim B-Feld, handelt es sich auch hier um einen rein topologischen Zusatzterm. Die Schwierigkeit bei der Quantisierung besteht darin, daß in den Dimensionen 10 bis 26 nur Linksläufer existieren, die Felder also keinen antiholomorphen Anteil haben dürfen. Man fordert also

$$X^I(z,\bar{z}) = X^I(z) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\partial} X^I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C^I \equiv (\partial_1 + i\partial_2)\, X^I = 0\ . \tag{2.68}$$

Diese Gleichungen entsprechen einer Zwangsbedingung zweiter Klasse. Deshalb muß die Quantisierung mit *Dirac*-Klammern erfolgen. Die kanonischen Impulse sind gegeben durch

$$p_m = -\frac{\partial L}{\partial v^m} = \frac{1}{\alpha'}\left[G_{mn} i\partial_2 X^n + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} A^I_m \partial_1 X^I\right]\ , \tag{2.69}$$

$$p^I = \frac{\partial L}{\partial v^I} = \frac{1}{\alpha'}\left[i\partial_2 X^I - \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} A^I_m \partial_1 X^m\right]\ . \tag{2.70}$$

Die *Dirac*-Klammern für die Impulse ergeben für gleiches σ^1:

$$\begin{aligned} \{p^I(\sigma^1), p^J(\sigma^1)\}_{DB} &= \frac{1}{2\alpha'}\partial_1 \delta^{IJ} \\ \{p_m(\sigma^1), p_n(\sigma^1)\}_{DB} &= \frac{1}{4} A^I_m A^I_n \partial_1 \\ \{p^I(\sigma^1), p_n(\sigma^1)\}_{DB} &= \frac{1}{2\sqrt{2\alpha'}} A^I_n \partial_1\ . \end{aligned} \tag{2.71}$$

Die *Dirac*-Klammern für die Koordinaten sind wie üblich. An den Gleichungen (2.71) erkennt man, daß p_m nicht der zu X^m konjugierte Impuls sein kann. Durch den Übergang

$$p_n \to p'_n = p_n - \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} A^I_n \tag{2.72}$$

kann man die Standard-Relationen für die *Dirac*-Klammern wiederherstellen. Um v_n und v^I zu berechnen, kann man nun in den Gleichungen (2.69) und (2.70) die Nullmoden $X^n(\sigma^1, \sigma^2) = x^n(\sigma^2) + w^n R\sigma^1$ und $X^I(\sigma^1,\sigma^2) = x^I(\sigma^2) + w^I R\sigma^1 = x^I(\sigma^2) - v^I\sigma^1$ einsetzen. Die letzte Gleichung gilt wegen (2.68). Desweitern muß p_n durch p'_n ausgedrückt werden, weil letzteres der Translations-Operator ist. Daraus folgt

$$v^I = \alpha' p^I + \frac{\alpha'}{2} A^I_m w^m R\ , \tag{2.73}$$

$$v_n = \alpha' p'_n + \sqrt{2\alpha'}\alpha' A^I_n p^I + \frac{\alpha'}{2} A^I_n A^I_m w^m R\ . \tag{2.74}$$

Die Quantisierung für p'_m ergibt sich wie in Abschnitt 2.1 zu $p'_m = \frac{n_m}{R}$ mit der KK-Impulszahl n_m. Seien die dimensionslosen Impulse im Eichsektor mit q^I bezeichnet. Dann folgt die Quantisierung für die p^I daraus, daß die q^I auf einem geraden euklidischen Gitter liegen müssen (also entweder auf Γ_{16} oder auf $\Gamma_8 \times \Gamma_8$, je nachdem welche heterotische Theorie betrachtet wird). Es muß also gelten:

$$q^I \cdot q^I \in 2\mathbb{Z}\ . \tag{2.75}$$

Aus den Nullmoden erhält man $\exp(-2\pi v^I p^I) \overset{!}{=} 1$. Setzt man A^I_m in Gleichung (2.73) vorübergehend gleich Null, so folgt $\exp(-2\pi\alpha' p^I p^I) \overset{!}{=} 1$ und durch Vergleich mit (2.75)

$$p^I = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} q^I \ .$$

Mit Hilfe von

$$X^n = x^n - iv^n\sigma^2 + w^n R\sigma^1 \overset{!}{=} X^n_L(\sigma^1 + i\sigma^2) + X^n_R(\sigma^1 - i\sigma^2)$$

findet man wiederum durch Vergleich schließlich

$$\begin{aligned} k_{Lm} &= \frac{1}{\alpha'}(v_m - G_{mk}w^k R) \\ &= \frac{n_m}{R} - G_{mk}\frac{w^k R}{\alpha'} + A^I_m q^I + \frac{w^k R}{2} A^I_m A^I_k \ , \qquad (2.76) \\ k_{rm} &= \frac{1}{\alpha'}(v_m + G_{mk}w^k R) \\ &= \frac{n_m}{R} + G_{mk}\frac{w^k R}{\alpha'} + A^I_m q^I + \frac{w^k R}{2} A^I_m A^I_k \ . \qquad (2.77) \end{aligned}$$

Für die internen Koordinatenfelder folgt

$$k^I_L = \frac{2}{\alpha'} v^I = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, (q^I + w^k R A^I_k) \ . \qquad (2.78)$$

Der Extra-Faktor von 2 rührt daher, daß die X^I nach Konstruktion nur linkslaufend sind und deshalb keine Aufspaltung in einen links- und einen rechtslaufenden Anteil nötig ist.

Um die Gleichungen (2.76), (2.77) und (2.78) mit den für das B-Feld abgeleiteten Impulsen (2.18) vergleichen zu können, reicht die triviale Redefinition

$$w^k \to -w^k \ , \quad q^I \to -q^I \ , \quad k^I_L \to -k^I_L \ .$$

Dieser Übergang hat ebenfalls den Vorteil, daß man den B-Term aus (2.18) einfach übernehmen kann. Damit folgt schließlich für das heterotische Nullmoden-Impuls-Spektrum:

$$\begin{aligned} k_{Lm} &= \frac{n_m}{R} + \frac{w^n R}{\alpha'}(G_{mn} + B_{mn}) - q^I A^I_m - \frac{w^n R}{2} A^I_n A^I_m \ , \\ k^I_L &= \sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}(q^I + w^m R A^I_m) \ , \qquad (2.79) \\ k_{Rm} &= \frac{n_m}{R} + \frac{w^n R}{\alpha'}(-G_{mn} + B_{mn}) - q^I A^I_m - \frac{w^n R}{2} A^I_n A^I_m \ . \end{aligned}$$

2.10.3 Der Modul-Raum des heterotischen Strings

Nun kann der Modul-Raum diskutiert werden. Analog zu dem des bosonischen Strings ist er gegeben durch

$$\mathrm{O}(26-d,\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(10-d,\mathbb{R}) \Big\backslash \ \mathrm{O}(26-d, 10-d, \mathbb{R}) \ \Big/ \ \mathrm{O}(26-d, 10-d, \mathbb{Z}) \ .$$

Die Anzahl der Parameter beträgt

$$\frac{1}{2}\left[(36-2d)(35-2d)-(26-d)(25-d)-(10-d)(9-d)\right]=(26-d)(10-d)\ .$$

Die Moduli von kompakter Metrik und antisymmetrischem Hintergrund liefern wie gehabt $(10-d)^2$ Parameter. Desweiteren kann man für jede der 16 Dimensionen des Eich-Anteils eine *Wilson*-Linie A^I_m einführen. Diese geben also die restlichen $16(10-d)$ Parameter.

Es stellt sich nun die Frage, wie die (im Vergleich zum bosonischen Fall) erweiterte T-Dualitäts-Gruppe aussieht. Man kann die Diskussion von Abschnitt 2.1 durch die Hinzunahme von *Wilson*-Linien verallgemeinern. Da jedoch in Kapitel 6 heterotische Orbifolds ohne *Wilson*-Linien betrachtet werden, wird hier auf eine Darstellung dieser Diskussion verzichtet.

Für $A^I_m = q^I = 0$ reduzieren sich die Nullmoden-Impulse der heterotischen Theorie auf die der bosonischen Theorie. Dasselbe gilt für den Modul-Raum. Alle Aussagen über die 2-Torus-Kompaktifizierung der bosonischen Stringtheorie können für den heterotischen Fall ohne *Wilson*-Linien übernommen werden.

Kapitel 3

Orbifolds

In diesem Kapitel wird ein wichtiger Mechanismus, das sogenannte „Twisten“ oder auch „Orbifolden“, vorgestellt. Allgemein werden beim Twisten diskrete Symmetrien aus der Stringtheorie herausprojiziert. Hier werden die Twists allerdings nur auf die Raumzeit angewendet, die im kompaktifizierten Fall einer Mannigfaltigkeit entspricht. Das Herausprojizieren wird oft als „ausmodden“ bezeichnet. Die durch Twisten entstehenden Objekte werden „Orbifolds“ genannt. Orbifolds besitzen singuläre Fixpunkte und sind deshalb keine echten Mannigfaltigkeiten, auch wenn sie jenseits der Fixpunkte Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten besitzen.

Nach der Erläuterung des Twist-Mechanismus in Abschnitt 3.1 werden in Abschnitt 3.2 die Oszillatorentwicklungen für getwistete Zustände hergeleitet. Dabei wird gezeigt, daß die Twists zu einer Verschiebung der Moden in der Oszillatorentwicklung führen. In Abschnitt 3.3 werden Konsistenz-Bedingungen für Orbifolds hergeleitet und anschliessend in den Abschnitten 3.4 und 3.5 auf symmetrische und asymmetrische Orbifolds angewendet. Die noch zu erläuternden asymmetrischen $\hat{\mathbb{Z}}_N$-Orbifolds spielen eine wichtige Rolle für den Zusammenhang zwischen T-Dualität und nichtkommutativer Geometrie (siehe Kapitel 5).

Orbifolds wurden für symmetrische Twists erstmals in [15] und für asymmetrische Twists in [24] vorgestellt. Die Konstruktion heterotischer Orbifolds mit *Wilson*-Linien ist in [21] beschrieben.

3.1 Twisten und Orbifolds

Wie schon in der Einleitung angedeutet, liefert das sogenannte Twisten durch Ausmodden von diskreten Symmetriegruppen einer gegebenen CFT eine neue CFT. Dieser Mechanismus ist deshalb so interessant, weil durch das Ausmodden (im Gegensatz zur reinen toroidalen Kompaktifizierung) neben den Eichsymmetrien auch Supersymmetrien gebrochen werden können. Die heterotischen Superstringtheorien mit 6 toroidal kompaktifizierten Dimensionen besitzen $\mathcal{N}$=4 SUSY. Das Standardmodell ($d = 4$) ist jedoch höchstens mit $\mathcal{N}$=1 SUSY kompatibel, da die Eichkopplungen chiral sind[1]. Ein Mechanismus, der Supersymmetrien bricht, ist deshalb essentiell für die Konstruktion „realistischer“ Modelle.

Sei $\mathcal{H}$ eine diskrete Symmetriegruppe einer gegebenen CFT. Dann kann man getwistete Sektoren hinzufügen, in denen die Weltflächenfelder eines geschlossenen Strings nur bis auf

[1] Trotzdem könnte auch $\mathcal{N}$=1 SUSY bei Energien unterhalb der Gültigkeit einer Beschreibung durch Strings gebrochen sein.

eine Transformation $h \in \mathcal{H}$ periodisch sind. Sei ϕ so ein Feld. Dann gilt

$$\phi(\sigma^1 + 2\pi) = h \cdot \phi(\sigma^1) \tag{3.1}$$

In einem zweiten Schritt projiziert man das Spektrum auf $\mathcal{H}$-invariante Zustände. Damit garantiert man, daß Vertex-Operatoren und OPEen wohldefiniert sind. Die OPEen schließen, weil das Produkt $\mathcal{H}$-invarianter Operatoren wiederum $\mathcal{H}$-invariant ist. Für die Zustandssummen summiert man über Twistsektoren h_1 in der räumlichen Richtung und fügt den Projektions-Operator

$$P_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\text{Ordnung}(\mathcal{H})} \sum_{h_2 \in \mathcal{H}} h_2 \ ,$$

der auf invariante Zustände projiziert, in die Spur ein. Damit zerfällt die Zustandssumme wie folgt:

$$Z = \frac{1}{\text{Ordnung}(\mathcal{H})} \sum_{h_1, h_2 \in \mathcal{H}} Z_{h_1, h_2} \ .$$

Es ist also sowohl über räumlich als auch über zeitlich getwistete Zustände zu summieren.

Man kann nun z.B. mit dem 10-dimensionalen heterotischen $\text{E}_8 \times \text{E}_8$ String starten und kompaktifiziert 6 Dimensionen. Für die Twistgruppe fordert man

$$\mathcal{H} \subset \text{Poincarégruppe} \times \text{Eichgruppe} \ .$$

Der Twist-Mechanismus erlaubt allgemeinere Gruppen, die allerdings phänomenologisch uninteressant sind. Der Poincaré-Anteil eines Elementes $h \in \mathcal{H}$ kann beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} h: \ X_L^m &\mapsto \theta_L^{mn} X_L^n + \upsilon_L^m \qquad && m, n \in \{4, \ldots, 9\} \\ X_L^\mu &\mapsto X_L^\mu && \mu \in \{0, \ldots, 3\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h: \ X_R^m &\mapsto \theta_R^{mn} X_R^n + \upsilon_R^m \\ X_R^\mu &\mapsto X_R^\mu \end{aligned}$$

Dabei sind die θ^{mn} Rotationen und die υ^m Translationen. Um weiterhin Weltflächen-SUSY zu garantieren, muß der Twist mit dem rechtslaufenden Superstrom kommutieren (links existieren keine Fermionen). Dieser ist gegeben durch

$$\tilde{T}_F(\bar{z}) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, \tilde{\psi}^M(\bar{z})\, (\bar{\partial} X_R)_M(\bar{z}) \qquad M \in \{0, \ldots, 9\} \ .$$

Nun gilt:

$$h: (\partial X_R)_M \mapsto (\theta_R)_{MN}\, (\bar{\partial} X_R)_N \ .$$

Daraus folgt, daß die rechtslaufenden Fermionen wie

$$\tilde{\psi}^m \to \theta_R^{mn} \tilde{\psi}^n$$

transformieren müssen. Die Translationen wirken also nicht auf die Fermionen.
Im Folgenden wird für den Eichsektor die fermionische Beschreibung benutzt. Die linkslaufenden Fermionen seien mit ψ^I bezeichnet. Der Twist kann im Eichsektor wie folgt operieren:

$$\psi^I \to \gamma^{IJ} \psi^J \ .$$

Dabei ist γ^{IJ} eine Eichrotation. Für die hier betrachteten einfachen Orbifold-Modelle kann γ immer so gewählt werden, daß es in der $\mathrm{SO}(16) \times \mathrm{SO}(16)$ Untergruppe von $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ liegt.

Damit kann man h durch $(\theta, v; \gamma)$ beschreiben. Die Menge aller Elemente (θ, v) bildet die sogenannte *Raumgruppe* S. In der getwisteten Theorie ist die Raumzeit-Struktur also gegeben durch

$$M^4 \times K \qquad \text{mit} \quad K = \mathbb{R}^6/S \ .$$

Weil S im allgemeinen Fixpunkte haben kann, wird dieser Raum, wie schon in der Einleitung dieses Kapitels beschrieben, Orbifold genannt. Die Menge aller Rotationen θ (fr gegebene v und γ) wird als „Punktgruppe" P bezeichnet. Eine Orbifold heißt abelsch oder nicht-abelsch genau dann, wenn P abelsch bzw. nicht-abelsch ist. Desweitern gilt, daß die $(\mathbb{1}, v)$ eine abelsche Untergruppe Λ von S bilden. Man kann also äquivalent den 6-Torus

$$T^6 = \mathbb{R}^6/\Lambda$$

bilden und die Orbifold dann über

$$K = T^6/\bar{P} \qquad \text{mit} \quad \bar{P} = S/\Lambda$$

konstruieren. Daß $\bar{P}$ eine Symmetriegruppe des 6-Torus ist, folgt aus der Gruppenmultiplikation der Raumgruppe S

$$(\theta, v) \cdot (\mathbb{1}, v') \cdot (\theta, v)^{-1} = (\mathbb{1}, \theta v') \ .$$

Es ist also möglich mit der auf 4 Dimensionen toroidal kompaktifizierten Theorie zu starten. Dieser Zugang ist in [20] und [33] motiviert worden und wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit vorgestellt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Eichrotationen mit der Raumgruppe verträglich und damit wohldefiniert sind. Das sieht man wie folgt: O.B.d.A. kann man annehmen, daß die Identität der Raumgruppe zusammen mit der Identität der Eichtrotationen auftritt, also als $(\mathbb{1}, 0; \mathbb{1})$. Andernfalls, könnte man erst mittels einer reinen Eichrotation twisten, würde damit zu einer anderen 10-dimensionalen Theorie gelangen, und anschließend mit einem Twist ohne reine Eichrotation twisten. Aus der Abgeschlossenheit der Twistgruppe folgt, daß jedes Element der Raumgruppe (θ, v) mit einem eindeutigen Element $\gamma(\theta, v)$ auftritt und daß diese die Gruppenmultiplikation

$$\gamma(\theta_1, v_1) \cdot \gamma(\theta_2, v_2) = \gamma((\theta_1, v_1) \cdot (\theta_2, v_2))$$

erfüllen. Es existiert also ein Gruppenhomomorphismus von der Raumgruppe in die Eichgruppe, und die Eichrotationen sind wohldefiniert.

3.2 Oszillatorentwicklung der getwisteten Strings

In dieser Arbeit werden Kompaktifizierungen auf 4 Dimensionen betrachtet. Dabei wird – wie im letzten Abschnitt gerechtfertigt – von der toroidal kompaktifizierten Theorie ausgegangen. Es soll der allgemeine Fall von „asymmetrischen" Orbifolds behandelt werden, das heißt, daß Links- und Rechtsläufer unterschiedlich getwistet werden können[2]. Die Darstellung dieses und des nächsten Abschnitts hält sich weitestgehend an [14].

[2]Die meisten in der Literatur beschriebenen Modell sind symmetrische Orbifolds. Die Definition von asymmetrisch und symmetrisch bezüglich Operationen der Raumgruppe wird von den Typ II-Theorien übernommen, obwohl die heterotischen Theorien natürlich schon per Konstruktion asymmetrisch sind. Auf der anderen Seite gibt es auch asymmetrische Orbifolds, die auf symmetrische Konstruktionen zurückzuführen und deshalb nicht wirklich asymmetrisch sind. Eine sinnvolle Definition erscheint schwierig.

Die 10-dimensionale Poincaré-Gruppe SO(9,1) zerfällt in eine 4-dimensionale SO(3,1) und eine SO(6). Seien die drei simultan diagonalisierbaren Generatoren der SO(6) mit J_{45}, J_{67} und J_{89} bezeichnet. Dann können die in der Raumgruppe enthaltenen Rotationen wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \theta_L &= \exp\left[2\pi i(\phi_2 J_{45} + \phi_3 J_{67} + \phi_4 J_{89})\right] , \\ \theta_R &= \exp\left[2\pi i(\tilde{\phi}_2 J_{45} + \tilde{\phi}_3 J_{67} + \tilde{\phi}_4 J_{89})\right] . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nun faßt man jeweils zwei reelle Koordinatenfelder zu einem komplexen zusammen (für die $\tilde{\psi}$ analog):

$$\begin{aligned} Z^i &= \sqrt{1/2}\,(X^{2i} + iX^{2i+1}) , \qquad i \in \{2,3,4\} \\ Z^{\bar{\imath}} &\equiv \sqrt{1/2}\,(X^{2i} - iX^{2i+1}) . \end{aligned}$$

Dann ergeben sich für den einfach getwisteten Sektor die Periodizitätsbedingungen ($w \equiv \sigma^1 + i\sigma^2$):

$$\begin{aligned} Z^i_L(w + 2\pi) &= e^{2\pi i \phi_i}\, Z^i_L(w) \\ Z^i_R(w + 2\pi) &= e^{2\pi i \tilde{\phi}_i}\, Z^i_R(w) . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Für die rechtslaufenden Fermionen gilt:

$$\tilde{\psi}(w + 2\pi) = e^{2\pi i(\tilde{\phi}_i + \nu)}\, \tilde{\psi}^i(w) .$$

Dabei entspricht, wie in den Typ II-Theorien üblich, $\nu = 0$ dem *Ramond*-Sektor (R) und $\nu = 1/2$ dem *Neveu-Schwarz*-Sektor (NS). Ebenfalls ist aus den Typ II-Theorien bekannt, daß die Periodizitätsbedingungen die Moden der Oszillatorentwicklungen bestimmen. So haben freie Fermionen im R-Sektor ganzzahlige, die im NS-Sektor halbzahlige Moden. Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich die Moden der kompaktifizierten Bosonen durch den Twist verändern.

Sei $z = e^{-iw}$ eine alternative Parametrisierung der Weltfläche. Die Oszillator-Entwicklungen der bosonischen Koordinatenfelder sind allgemein gegeben durch

$$\begin{aligned} X^i_L(z) &= x^i_L - i\tfrac{\alpha'}{2}k^i_L \,\ln z + i\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{r\neq 0}\frac{\alpha^i_r}{r\,z^r} \\ X^i_R(\bar{z}) &= x^i_R - i\tfrac{\alpha'}{2}k^i_R \,\ln \bar{z} + i\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{s\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}^i_s}{s\,\bar{z}^s} \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit $r = m + \kappa^i_{L/R}$, $m \in \mathbb{Z}$. Dabei sind $\kappa^i_{L/R}$ die nicht-ganzzahligen Anteile von r bzw. s. Die Summen laufen über m. In w lauten die Gleichungen (3.4):

$$\begin{aligned} X^i_L(w) &= x^i_L - \tfrac{\alpha'}{2}k^i_L\, w + i\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{r\neq 0}\frac{\alpha^i_r}{r}\, e^{irw} \\ X^i_R(\bar{w}) &= x^i_R + \tfrac{\alpha'}{2}k^i_R\, \bar{w} + i\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{s\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}^i_s}{s}\, e^{-is\bar{w}} . \end{aligned}$$

Für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} \partial_w X^i_L(w) &= -\tfrac{\alpha'}{2}k^i_L - \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{r\neq 0}\alpha^i_r\, e^{irw} \\ \partial_{\bar w} X^i_R(\bar w) &= \tfrac{\alpha'}{2}k^i_R + \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{s\neq 0}\tilde\alpha^i_s\, e^{-isw}\ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Aus den Gleichungen (3.3) folgt direkt

$$\begin{aligned} \partial_w X^i_L(w+2\pi) &= e^{2\pi i\phi_i}\,\partial_w X^i_L(w) \\ \partial_{\bar w} X^i_R(\bar w+2\pi) &= e^{2\pi i\tilde\phi_i}\,\partial_{\bar w} X^i_R(\bar w)\ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Setzt man hier nun (3.5) ein, so findet man:

$$\begin{aligned} -\tfrac{\alpha'}{2}k^i_L - \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{r\neq 0}\alpha^i_r\, e^{irw}\, e^{2\pi i\kappa^i_L} &= e^{2\pi i\phi_i}\left[-\tfrac{\alpha'}{2}k^i_L - \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{r\neq 0}\alpha^i_r\, e^{irw}\right] \\ \tfrac{\alpha'}{2}k^i_R + \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{s\neq 0}\tilde\alpha^i_s\, e^{-is\bar w}\, e^{-2\pi i\kappa^i_R} &= e^{2\pi i\tilde\phi_i}\left[\tfrac{\alpha'}{2}k^i_R + \sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{s\neq 0}\tilde\alpha^i_s\, e^{-is\bar w}\right]\ . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Diese Gleichungen sind nur dann für $\phi_i \neq 0$, $\tilde\phi_i \neq 0$ erfüllt, wenn $k^i_{L/R} = 0$. Getwistete Strings besitzen keinen Schwerpunktimpuls. Desweitern folgt $\kappa^i_L = \phi_i$ und $\kappa^i_R = -\tilde\phi_i$. Mit diesen Bedingungen findet man nun wiederum aus den Oszillatorentwicklungen und dann aus (3.3), daß die Strings auf den Fixpunkten der Orbifold „festsitzen“. Das gilt für die rechtslaufenden Fermionen genauso und auch die Moden-Verschiebungen findet man völlig analog. Die Verallgemeinerung für die komplexen Koordinatenfelder ist leicht durchzuführen.

Das Vorgehen im Eichsektor ist identisch. Ein gegebenes Element der Eichrotationen kann immer diagonalisiert werden und liegt damit in der $U(1)^{16}$-Untergruppe, also

$$\gamma = \mathrm{diag}[\exp(2\pi i\beta_1), \ldots, \exp(2\pi i\beta_{16})]\ .$$

Der Twist wirkt dann auf die komplexen Fermionen des Eichsektors $\psi^{I\pm} = \sqrt{1/2}\,(\lambda^{2I-1} \pm i\lambda^{2I})$ wie folgt:

$$\psi^{I\pm} \to \exp(\pm 2\pi i\beta_I)\psi^{I\pm}$$

mit $I \in \{1, \ldots, 16\}$.

In Tabelle 3.1 sind die Moden-Verschiebungen für eine heterotische Orbifold zusammengefaßt. i und $\bar\imath$, sowie $I+$ und $I-$ indizieren die komplexen Dimensionen.

Da in einigen folgenden Abschnitten die bosonische Formulierung des Eichsektors verwendet wird, sollen nun noch einige Betrachtungen zur Bosonisierung erfolgen. Da es hier weniger (als z.B. bei der Betrachtung von Dualitäten) auf Geometrien ankommt, wird im Rest dieses Abschnitts ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha' = 2$ gesetzt, um die Formeln zu vereinfachen.

Gemäß des Mechanismus der Bosonisierung kann ein komplexes Fermion ψ mit einem skalaren Boson H wie folgt identifiziert werden:

$$\psi(z) \cong e^{iH(z)}\ .$$

	Linksläufer	Rechtsläufer	
$i, \bar{\imath} \in \{0,1\}$	keine Verschiebungen	keine Verschiebungen	unkompaktifiziert
$i, \bar{\imath} \in \{2,3,4\}$	$\alpha^i \,:\, m + \phi_i$ $\alpha^{\bar{\imath}} \,:\, m - \phi_i$	$\tilde{\alpha}^i \,:\, m - \tilde{\phi}_i$ $\tilde{\alpha}^{\bar{\imath}} \,:\, m + \tilde{\phi}_i$ $\tilde{\psi}^i \,:\, m - \tilde{\phi}_i + \nu$ $\tilde{\psi}^{\bar{\imath}} \,:\, m + \tilde{\phi}_i + \nu$	kompaktifiziert
$I \in \{1, \ldots, 16\}$	$\psi^{I\pm} \,:\, m \pm \beta_I + \nu$		Eichsektor

Tabelle 3.1: Moden-Verschiebungen für den einfach getwisteten Sektor. Die Oszillatoren α und $\tilde{\alpha}$ entsprechen den Bosonen, $\tilde{\psi}$ denen der Fermionen des Typ IIA-Anteils und ψ denen der Fermionen im Eichsektor. $\nu = 0, \frac{1}{2}$ (R,NS)

Das Boson $H(z)$ besitzt die Oszillatorentwicklung

$$H(z) = h - ip_h \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{\gamma_n}{n\, z^n} \ .$$

Ist die ensprechende Dimension toroidal kompaktifiziert, müssen wiederum die Periodizitäten beachtet werden. Dem Übergang $w \to w' = w + 2\pi$ entspricht in z-Koordinaten

$$z' = e^{-iw'} = e^{-i(w+2\pi)} = e^{-2\pi i}\, z \ .$$

Die Periodizitätsbedingungen für R- bzw. NS-Sektor lauten:

$$\psi(z') = -e^{2\pi i \nu}\, \psi(z) = e^{2\pi i(\nu + \frac{1}{2})}\, \psi(z) \ . \tag{3.8}$$

Das auf den ersten Blick ungewöhnliche negative Vorzeichen folgt aus dem Transformationsverhalten fermionischer Felder unter $e^{-iw} \to z$. Sie transformieren nämlich mit dem halben konformen Gewicht eines Vektors, also

$$\psi(z) = \sqrt{\partial_z w}\, \psi(w) = \sqrt{\tfrac{i}{z}}\, \psi(w) \ .$$

Damit folgt

$$\psi(z') = (-1)\, \sqrt{\tfrac{i}{z}}\, \psi(w')$$

und (3.8) folgt aus der entsprechenden Definition in w. Aus (3.8) kann man nun Bedingungen für das bosonische Feld H ableiten. Die linke Seite der Gleichung liefert:

$$\psi(z') = \psi(e^{-2\pi i}\, z) = \exp\{iH(z) + i[-ip_h \ln(e^{-2\pi i})]\} = e^{iH(z)}\, e^{-2\pi i p_h} \ .$$

Die rechte Seite ergibt:

$$e^{2\pi i(\nu+\frac{1}{2})}\, \psi(z) = e^{iH(z)}\, e^{2\pi i(\nu+\frac{1}{2})} \ .$$

Durch Vergleich erhält man für die Nullmoden-Impulse der Bosonen:

$$p_h = (\tfrac{1}{2} - \nu) \quad \mod 1 \ .$$

Die Rechnung für den antiholomorphen Teil $\tilde{\psi}(\bar{z}) \cong e^{i\tilde{H}(\bar{z})}$ verläuft analog und liefert:

$$\tilde{p}_h = (\tilde{\nu} - \tfrac{1}{2}) \quad \mod 1 \ .$$

3.3 Konsistenz-Bedingungen für Orbifolds

Seien Γ und $\tilde{\Gamma}$ die Gruppengitter für links- und rechtslaufende Fermionen. Betrachtet man reine Gitterzustände, das heißt ohne angeregte Oszillatoren, dann folgt (vergleiche Abschnitt 2.5) für die Impulse p und $\tilde{p}$:

$$p \in \Gamma \ , \quad \tilde{p} \in \tilde{\Gamma} \ .$$

Aufgrund der aus den CFTen bekannten Zustand-Operator-Korrespondenz für Bosonen sind die Gitterzustände durch die OPEen

$$|\, p\, \rangle =: e^{ipH(0)} : \quad , \quad |\, \tilde{p}\, \rangle =: e^{i\tilde{p}\tilde{H}(0)} :$$

gegeben. Die getwisteten Zustände $|\, p^t\, \rangle$ und $|\, \tilde{p}^t\, \rangle$ findet man analog zu den Betrachtungen von R- und NS-Sektoren im letzten Abschnitt. Sie lauten

$$|\, p^t\, \rangle = |\, p - \beta\, \rangle \quad , \quad |\, \tilde{p}^t\, \rangle = |\, \tilde{p} + \phi\, \rangle \ .$$

Die getwisteten Gitterzustände (in bosonischer Formulierung) und Erzeugungs-Operatoren des heterotischen Strings sind in Tabelle 3.2 zusammengefaßt. Dabei sind auch die rechtslaufenden Fermionen bosonisiert. Nachdem nun die getwisteten Zustände bekannt sind, muß

Linksläufer			Rechtsläufer		
$\|\, p - \beta\, \rangle$	$p \in \Gamma$		$\|\, \tilde{p} + \tilde{\phi}\, \rangle$	$\tilde{p} \in \tilde{\Gamma}$	
γ^I_{-n}	$n > 0$		$\tilde{\gamma}^i_{-n}$	$n > 0$	
$\alpha^i_{r_i}$	$r_i \leq 0$	$r_i \in \mathbb{Z} + \phi_i$	$\tilde{\alpha}^i_{\tilde{r}_i}$	$\tilde{r}_i \leq 0$	$\tilde{r}_i \in \mathbb{Z} - \tilde{\phi}_i$
$\alpha^{\bar{\imath}}_{s_i}$	$s_i \leq 0$	$s_i \in \mathbb{Z} - \phi_i$	$\tilde{\alpha}^{\bar{\imath}}_{\tilde{s}_i}$	$\tilde{s}_i \leq 0$	$\tilde{s}_i \in \mathbb{Z} + \tilde{\phi}_i$

Tabelle 3.2: Getwistete Gitterzustände und Erzeugungsoperatoren des heterotischen Strings.

noch untersucht werden wie die getwisteten Zustände wiederum unter Twists transformieren. Eine ungetwisteter Zustand transformiert sich wegen $H(z)\,|\, q\, \rangle = q\,|\, q\, \rangle$ gemäß

$$e^{2\pi i\theta H} |\, q\, \rangle = e^{2\pi i\theta\, q} |\, q\, \rangle \ .$$

Daraus folgt für die getwisteten Gitterzustände das Transformationsverhalten

$$e^{2\pi i\theta H} |\, p + \phi\, \rangle = e^{2\pi i\theta\,(p+\phi)} |\, p + \phi\, \rangle \ .$$

Für die Oszillatoren der getwisteten Bosonen ist das Transformationsverhalten aufgrund der Oszillatorentwicklung mit dem Twist der Koordinatenfelder identisch. Dabei ist zu beachten, daß sich durch komplexe Konjugation für die antiholomorphen Oszillatoren das Vorzeichen ändert. Betrachtet man nun separat für Links- und Rechtsläufer die Phasen $e^{2\pi i s}$ und $e^{2\pi i \tilde{s}}$, die sich ergeben, wenn die mit $\phi, \tilde{\phi}$ und β getwisteten Zustände unter den Twists $\phi', \tilde{\phi}'$ und β' transformieren, findet man

$$\begin{aligned} s &= \sum_i \phi'_i \left(\sum_{r_i<0} N^{\alpha^i}_{r_i} - \sum_{s_i<0} N^{\alpha^{\bar{\imath}}}_{s_i} \right) + (p_K - \beta_K)\, \beta'_K \\ \tilde{s} &= \sum_i \tilde{\phi}'_i \left(\sum_{\tilde{r}_i<0} N^{\tilde{\alpha}^i}_{\tilde{r}_i} - \sum_{\tilde{s}_i<0} N^{\tilde{\alpha}^{\bar{\imath}}}_{\tilde{s}_i} \right) + (\tilde{p}_i + \tilde{\phi}_i)\, \tilde{\phi}'_i \ . \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Da bei der Orbifold-Konstruktion beliebige Phasen dieser Form auftreten können, folgt aus der Forderung nach Eindeutigkeit der Vertex-Operatoren direkt die erste Konsistenzbedingung

$$s + \tilde{s} = 0 \mod 1 \,. \tag{3.10}$$

Die zweite Konsistenzbedingung folgt aus der Forderung nach modularer Invarianz. Für modulare Invarianz muß die Level-Matching-Bedingung erfüllt sein. Die *Virasoro*-Generatoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2}p_\mu p^\mu + \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{r_i<0}(-r_i)\,N_{r_i}^{\alpha^i} + \sum_{s_i<0}(-s_i)\,N_{s_i}^{\alpha^{\bar{\imath}}}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(p-\beta)^2 + \sum_{K=1}^{16}\sum_{n=1}^{\infty} nN_n^{\gamma^K} + A \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0 &= \frac{1}{2}p_\mu p^\mu + \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{\tilde{r}_i<0}(-\tilde{r}_i)\,N_{\tilde{r}_i}^{\tilde{\alpha}^i} + \sum_{\tilde{s}_i<0}(-\tilde{s}_i)\,N_{\tilde{s}_i}^{\tilde{\alpha}^{\bar{\imath}}}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\tilde{p}+\tilde{\phi})^2 + \sum_{i=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty} nN_n^{\tilde{\gamma}^K} + \tilde{A} \,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die jeweils ersten Zeilen entsprechen den unkompaktifizierten Dimensionen, die zweiten den kompaktifizierten. A und $\tilde{A}$ sind wiederum die entsprechenden Nullpunktenergien. Da die Level-Matching-Bedingung (mod 1) definiert ist, reicht es, alle weiteren Größen (soweit bekannt) auch nur (mod 1) zu betrachten. Aus der Definition der bosonischen Oszillator-Moden ergibt sich

$$r_i = -s_i = \phi_i \mod 1 \quad , \quad \tilde{r}_i = -\tilde{s}_i = -\tilde{\phi}_i \mod 1 \,. \tag{3.13}$$

Die Phasen s und $\tilde{s}$ in den Gleichungen (3.9) sind für beliebige ϕ', $\tilde{\phi}'$, β' definiert. Sei

$$(s+\tilde{s})\big|_{(a_i,b_i,c_K)} \equiv (s+\tilde{s})\,(\phi'_i = a_i, \tilde{\phi}'_i = b_i, \beta'_K = c_K) \,,$$

also mit den jeweiligen Twists (in der angegebenen Reihenfolge) durch a, b und c ersetzt. Dann kann man die Level-Matching-Bedingung unter Benutzung von (3.13) schreiben wie folgt:

$$T_0 - \tilde{T}_0 \mod 1 = -(s+\tilde{s})\big|_{(r_i,-\tilde{r}_i,\beta_K)} + \frac{1}{2}(p^2-\beta^2) - \frac{1}{2}(\tilde{p}^2-\tilde{\phi}^2) + A - \tilde{A} \,.$$

Weil jedoch (3.10) erfüllt sein muß, folgt aus der Forderung nach Level-Matching und damit nach modularer Invarianz die Bedingung:

$$T_0 - \tilde{T}_0 = \frac{1}{2}(p^2-\beta^2) - \frac{1}{2}(\tilde{p}^2-\tilde{\phi}^2) + A - \tilde{A} \mod 1 \,. \tag{3.14}$$

Weitere Konsistenzbedingungen ergeben sich aus der Forderung nach Lokalität der OPEen. Zunächst sollen die bosonisierten Fermionen betrachtet werden. Die Phasen die sich aus den OPEen ergeben, seien mit $e^{2\pi i\rho_1}$ und $e^{2\pi i\tilde{\rho}_1}$ bezeichnet. Umkreist bei den Linksläufern der Zustand $|\,p-\beta\,\rangle$ den Zustand $|\,p'\,\rangle$, dann liefert die OPE

$$:e^{i(p_K-\beta_K)\,H(z)}::e^{ip'_K H(0)}:$$

eine Phase

$$\rho_1 = -p_K p'_K + \beta_K p'_K \; . \tag{3.15}$$

Umkreist bei den Rechtsläufern der Zustand $|\,\tilde{p} + \tilde{\phi}\,\rangle$ den Zustand $|\,\tilde{p}'\,\rangle$, liefert die OPE

$$: e^{i(\tilde{p}_i + \tilde{\phi}_i)\,\tilde{H}(\bar{z})} :: e^{i\tilde{p}'_i \tilde{H}(0)} :$$

eine Phase

$$\tilde{\rho}_1 = \tilde{p}_i \tilde{p}'_i + \tilde{\phi}_i \tilde{p}'_i \; . \tag{3.16}$$

Für die Bosonen folgt parallel zu der Diskussion von (3.9) für die entsprechenden Phasen $e^{2\pi i \rho_2}$ und $e^{2\pi i \tilde{\rho}_2}$:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \sum_i \phi_i \left(\sum N'^{\alpha^i}_{r_i} - \sum N'^{\alpha^{\bar{\imath}}}_{s_i} \right) \\ \tilde{\rho}_2 &= \sum_i \tilde{\phi}_i \left(\sum N'^{\tilde{\alpha}^i}_{\tilde{r}_i} - \sum N'^{\tilde{\alpha}^{\bar{\imath}}}_{\tilde{s}_i} \right) \; . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Damit und mit (3.15, 3.16) ergeben sich für Links- und Rechtsläufer die Teilphasen

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \rho_1 + \rho_2 = -p_K p'_K + \beta_K p'_K - (p'_K - \beta'_K)\,\beta_K + (s')\big|_{(\tilde{\phi},\phi,\beta)} \\ &= (s')\big|_{(\tilde{\phi},\phi,\beta)} + \beta_K \beta'_K - p_K p'_K \; , \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &\equiv \tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2 = \tilde{p}_i \tilde{p}'_i + \tilde{\phi}_i \tilde{p}'_i - (\tilde{p}'_i + \tilde{\phi}'_i)\,\tilde{\phi}_i + (\tilde{s}')\big|_{(\tilde{\phi},\phi,\beta)} \\ &= (\tilde{s}')\big|_{(\tilde{\phi},\phi,\beta)} - \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}'_i + \tilde{p}_i \tilde{p}'_i \end{aligned} \tag{3.19}$$

und schließlich wieder unter Benutzung von (3.10) aus der Forderung nach Lokalität die Konsistenzbedingung

$$\begin{aligned} \rho + \tilde{\rho} &= (s' + \tilde{s}')\big|_{(\tilde{\phi},\phi,\beta)} + \tilde{p}_i \tilde{p}'_i - p_K p'_K + \beta_K \beta'_K - \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}'_i \\ &= \tilde{p}_i \tilde{p}'_i - p_K p'_K + \beta_K \beta'_K - \tilde{\phi}_i \quad \mathrm{mod}\ 1 \\ &\stackrel{!}{=} 0 \quad \mathrm{mod}\ 1 \; . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nach dieser allgemeinen Herleitung ergeben sich nun aus der Einschränkung auf Spezialfälle weitere Resultate. Betrachtet man z.B. getwistete Zustände, die aber ungetwistet transformieren sollen (getwistet bei den ungestrichenen Größen, ungetwistet bei den gestrichenen), so folgt aus (3.20) mit

$$s' = \tilde{s}' = \tilde{\phi}'_i = \beta'_K = 0$$

sofort

$$\tilde{p}_i \tilde{p}'_i - p_K p'_K = 0 \quad \mathrm{mod}\ 1 \; . \tag{3.21}$$

Damit folgt aus der Vollständigkeit des Gitters im ungetwisteten (gestrichenen) Sektor, daß getwistete und ungetwistete Gitter identisch sein müssen, was nicht a priori klar war. Das sieht man wie folgt: $p'_K = 0$ ist sicherlich ein Punkt des ungetwisteten Gitters. Dann liefert aber (3.21) gerade die Bedingung dafür, daß $\tilde{p}$ ebenfalls Element von Γ ist. Die OPEen generieren das ganze Gitter. Die Argumentation für $\tilde{\Gamma}$ verläuft analog.

Die Einschränkungen, die aufgrund der Forderung nach bestimmten Supersymmetrien auftreten, werden in den beiden folgenden Abschnitten behandelt.

3.4 Symmetrische $\mathbb{Z}_N$ Orbifolds

Mit der im letzten Abschnitt geleisteten Vorarbeit ist es nun leicht, Konsistenzbedingungen für spezielle Orbifold-Konstruktion abzuleiten. Symmetrische $\mathbb{Z}_N$-Orbifolds sind der in der Literatur mit Abstand am häufigsten betrachtete Fall. Wie schon in Abschnitt 3.2 angedeutet, bezieht sich der Ausdruck „symmetrische“ Orbifold auf die Gleichbehandlung von Links- und Rechtsläufern beim Twisten durch die Raumgruppe. $\mathbb{Z}_N$ gibt die Twistgruppe an. Es gilt also

$$\phi = \tilde{\phi} \quad \text{mit} \quad \phi_i = k/N \ , \ k \in \mathbb{Z} \ . \tag{3.22}$$

Daraus folgt für die Normalordnungskonstanten (vergleiche Anhang A) jeweils $a = \tilde{a}$, speziell:

$$\begin{aligned} \text{ungetwistet} &: \quad a = \tilde{a} = 0 \\ \text{getwistet} &: \quad a = \tilde{a} = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i \,(1-\phi_i) \ , \quad \phi_i \in [0,1) \ . \end{aligned}$$

Für den ungetwisteten Sektor ergibt sich aus der Forderung nach modularer Invarianz (3.14)

$$\begin{aligned} T_0 - \tilde{T}_0 &= \frac{1}{2}\,(p^2 - \tilde{p}^2) + (a-1) - (\tilde{a} - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\,(p^2 - \tilde{p}^2 + 1) \quad \text{mod } 1 \\ &\stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mod } 1 \ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Für den getwisteten Sektor folgt

$$T_0 - \tilde{T}_0 = \underbrace{\frac{1}{2}\,(p^2 - \tilde{p}^2 + 1)}_{=0 \text{ mod } 1 \text{ wg. } (3.23)} + \frac{1}{2}\,(\tilde{\phi}^2 - \beta^2) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mod } 1 \ .$$

Damit ergibt sich schließlich mit $\phi = \tilde{\phi}$ die Konsistenz-Bedingung

$$\phi^2 \stackrel{!}{=} \beta^2 \quad \text{mod } 2 \ . \tag{3.24}$$

Fordert man $\mathcal{N}=1$ SUSY, so erhält man weitere Einschränkungen. Der Mechanismus der SUSY-Brechung bei der Orbifold-Konstruktion soll im Folgenden kurz erläutert werden. Betrachtet man den R-Sektor der rechtslaufenden kompaktifizierten Fermionen, so weiß man aus den Typ II-Theorien, daß der R-Grundzustand degeneriert ist (vergleiche Abschnitt 2.9). Er liegt also in einer Spinordarstellung vor. Um nun eine der ursprünglich vier Supersymmetrien ungebrochen zu lassen, muß die entsprechende Superladung unter den Twists der Raumgruppe invariant bleiben. Die Superladung transformiert gemäß

$$Q_{\mathbf{s}} \to e^{2\pi i \mathbf{s}\,\phi}\, Q_{\mathbf{s}} \ , \tag{3.25}$$

wobei $\mathbf{s}$ die Spin-Basis der Spinordarstellung ist und – entsprechend den komplexen Dimensionen der ursprünglich 10-dimensionalen Theorie – fünf Einträge hat. Da die Raumgruppe in den komplexen Dimensionen $i = 2, 3, 4$ operiert, ist jedoch nur dieser Teil des Skalarproduktes im Exponenten von (3.25) von Null verschieden. Die Forderung nach Invarianz lautet damit

$$\sum_{i=2}^{4} s_i \phi_i \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mod } 2 \ . \tag{3.26}$$

Startet man nun z.B. mit $(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ so folgt[3] (das „modulo“ kann hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit entfallen):

$$\phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 0 \ . \tag{3.27}$$

Die einzige weitere, mit (3.26) kompatible Möglichkeit für $\mathbf{s}$ ist dann nur noch $(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Die Anzahl der Möglichkeiten hat sich auf $2/2^3 = 1/4$ reduziert. Von den anfänglich 16 Superladungen sind also nur noch vier erhalten. Mit 4 unkompaktifizierten Dimensionen bedeutet das für die heterotischen Theorien, daß $\mathcal{N}$=4 SUSY zu $\mathcal{N}$=1 gebrochen ist. Die Bedingung (3.27) entspricht also der Forderung nach $\mathcal{N}$=1 SUSY zur Konstruktion realistischer Modelle.

3.5 „Asymmetrische“ $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Orbifolds

Wie im letzten Abschnitt ist die Twistgruppe $\mathbb{Z}_N$. Der einzige Unterschied zur $\mathbb{Z}_N$-Orbifold besteht darin, daß durch die Raumgruppe Links- und Rechtsläufer gegenständig gedreht werden. Das heißt

$$\tilde{\phi} = -\phi \quad \text{mit} \quad \phi_i = k/N \ , \ k \in \mathbb{Z} \ . \tag{3.28}$$

Die Relevanz dieser Klasse von Orbifolds und ihre Wichtigkeit für den Zusammenhang von T-Dualität und nichtkommutativer Geometrie, werden in Kapitel 5 diskutiert.
Für die Normalordnungskonstanten gilt (vergleiche Anhang A):

$$\begin{aligned}
\text{ungetwistet} \quad &: \quad a = \tilde{a} = 0 \\
\text{getwistet} \quad &: \quad a = \frac{1}{2}\sum_i \phi_i\,(1-\phi_i) \ , \quad \phi_i \in [0,1) \\
&\quad\ \ \tilde{a} = \frac{1}{2}\sum_i \tilde{\phi}_i\,(1-\tilde{\phi}_i) \\
&\quad\ \ \ \ = \frac{1}{2}\sum_i (-\phi_i)\,(1+\phi_i) \qquad \textit{Spektraler Fluß} \\
&\quad\ \ \ \ \to \frac{1}{2}\sum_i (1-\phi_i)\,(1-1+\phi_i) \ , \quad \phi_i \in [0,1) \\
&\quad\ \ \ \ = a \ .
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Konsistenzbedingungen der symmetrischen $\mathbb{Z}_N$-Orbifold im ungetwisteten Sektor (3.23), so ändert sich hier nichts. Im getwisteten Sektor (3.24) treten ϕ und $\tilde{\phi}$ nur quadratisch auf, also bleibt auch diese Konsistenzbedingung mit der des symmetrischen Falles identisch. Man kann also zu jeder symmetrischen $\mathbb{Z}_N$-Orbifold mit gegebenen Twist-Parametern (ϕ, β) ein $\hat{\mathbb{Z}}_N$-Modell mit Parametern $(\phi, \tilde{\phi} = -\phi, \pm\beta)$ konstruieren. Dabei ist es egal, welches Vorzeichen man für den Twist im Eichsektor wählt, weil die Multiplikation aller β mit (-1) ein Element der *Weyl*-Gruppe ist.

Auch die Bedingung (3.27) ist invariant unter dem Übergang $\phi \to -\phi$. Die aus symmetrischen $\mathbb{Z}_N$-Orbifolds mit $\mathcal{N}$=1 SUSY konstruierten $\hat{\mathbb{Z}}_N$-Orbifolds besitzen also ebenfalls $\mathcal{N}$=1 SUSY.

[3]Startet man mit einem anderen $\mathbf{s}$, ändert sich nichts an der Argumentation.

Kapitel 4

D-Branes und Nichtkommutativität bei offenen Strings

In Abschnitt 4.1 werden offene bosonische Strings untersucht. Bei der Variation der Wirkung findet man Randterme, die nur dann verschwinden, wenn man gewisse Randbedingungen fordert. Es ergeben sich zwei Möglichkeiten, sogenannte *Neumann*- und *Dirichlet*-Randbedingungen. Letztere entsprechen der Situation, daß die Enden der offenen Strings auf gewissen Hyperebenen der Raumzeit festliegen. Diese Hyperebenen werden D-Branes genannt. Im weiteren Verlauf des Abschnitts werden *Chan-Paton*-Faktoren vorgestellt, Freiheitsgerade, die an den Stringenden eingeführt werden können, dann der nichtorientierte offene String beschrieben und anschließend *Wilson*-Linien beim offenen String betrachtet. In Abschnitt 4.2 werden die D-Branes (wiederum am Beispiel des bosonischen Strings) näher untersucht. Dabei wird gezeigt welche Effekte *Wilson*-Linien auf D-Branes haben. Die Betrachtungen erfolgen sowohl für orientierte als auch für nichtorientierte offene bosonische Strings. Für den nichtorientierten Fall findet man die Existenz von sogenannten „Orientifold"-Ebenen, die sich durch das simultane Ausmodden von Weltflächenparität und einer Raumzeitreflexion ergeben. In Abschnitt 4.3 werden die in den vorhergehenden Abschnitten gewonnenen Erkenntnisse auf die supersymmetrische Typ I Stringtheorie übertragen. Dazu wird die Typ I Stringtheorie zunächst vorgestellt. Man findet, daß diese aus nichtorientierten offenen und nichtorientierten geschlossenen Strings besteht. Ferner wird motiviert, wie man die SO(32) Eichgruppe der Typ I Theorie ermittelt. Im weiteren Verlauf des Abschnitts wird dann in Analogie zum bosonischen String die faktorisierte T-Dualität für den Typ I String untersucht, und damit – bezugnehmend auf D-Branes – schließlich eine sehr wichtige Interpretation der Typ I Theorie, das sogenannte D-Brane-Bild, vorgestellt. Es zeigt sich, daß die Typ I und Typ II Stringtheorien verschieden Limites einer Theorie sind, und sich nur durch D-Brane-Konfigurationen unterscheiden. In Abschnitt 4.4 wird die D-Brane-Wirkung vorgestellt und begründet. Es stellt sich heraus, daß diese durch eine *Born-Infeld*-Wirkung gegeben ist, die ursprünglich zur Beschreibung der Quantenchromodynamik (QCD) vorgeschlagen wurde. Weiter wird gezeigt, wie sich aus dieser Wirkung aufgrund von T-Dualität erste Nichtkommutativitäten der Koordinatenfelder ergeben. Diese Beschreibung ist nicht exakt, gibt aber die entscheidenden Eigenschaften richtig wieder. In Abschnitt 4.5 werden die grundlegenden mathematischen Definitionen für nichtkommutative Strukturen kurz vorgestellt. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels 4.6 werden offene Strings mit antisymmetrischen Hintergrundfeldern betrachtet und die entsprechenden Randbedingungen hergeleitet. Weiterhin wird der Propagator auf der Scheibe angegeben, dessen Begrenzung auf den Rand der Scheibe wiederum nichtkommutative Effekte liefert.

Die Darstellungen dieses Kapitels halten sich, sofern nicht abweichend angegeben, an [28, 29, 30]. Die Abbildungen dieses Kapitels sind aus [27].

4.1 Offene bosonische Strings

Die eichfixierte *Polyakov*-Wirkung des offenen bosonischen Strings ist gegeben durch

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi \mathrm{d}\sigma \int \mathrm{d}\tau \, \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X^\mu \;, \tag{4.1}$$

mit $\eta^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,+1)$. Variiert man (4.1) bezüglich X^μ, so findet man den Randterm

$$\delta S_{\mathrm{Rand}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int \mathrm{d}\tau \left[\partial_\sigma X_\mu \delta X^\mu \big|_{\sigma=\pi} - \partial_\sigma X_\mu \delta X^\mu \big|_{\sigma=0} \right] \;. \tag{4.2}$$

4.1.1 Randbedinungen

Es gibt nun zwei Möglichkeiten den Randterm (4.2) verschwinden zu lassen:

(1) **Neumann-Randbedingung**

$$\partial_\sigma X_\mu \big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \;. \tag{4.3}$$

Dies verallgemeinert sich für den Fall einer gekrümmten Weltfläche auf die Bedingung

$$\partial_n X_\mu|_{\sigma=0,\pi} = 0 \qquad \text{(Neumann-Randbedingung)} \;, \tag{4.4}$$

wobei ∂_n die Ableitung senkrecht zum Rand der Weltfläche ist. Anschaulich bedeutet diese Bedingung, daß sich die Enden des Strings frei bewegen können, jedoch kein Impuls aus ihnen heraus fließt.

(2) **Dirichlet-Randbedingung**

Es gilt: $\delta X_\mu|_{\sigma=0,\pi} = \partial_\tau X_\mu|_{\sigma=0,\pi} \delta\tau$. Der Randterm (4.2) verschwindet also auch, wenn die Bedingung

$$\partial_\tau X_\mu \big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \tag{4.5}$$

erfüllt ist. Wiederum auf gekrümmte Weltflächen verallgemeinert entspricht (4.5) der Bedingung

$$\partial_t X_\mu \big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \qquad \text{(Dirichlet-Randbedingung)} \;, \tag{4.6}$$

wobei ∂_t die tangentiale Ableitung bezüglich des Weltflächenrandes ist. Aus (4.6) folgt direkt $X_\mu|_{\sigma=0,\pi} =$ konst. Die String-Enden sind also auf Hyperflächen, sogenannten D-Branes[1], in der Raumzeit fixiert.

In den Koordinaten $z = \sigma^1 + i\sigma^2$ ist die *Polyakov*-Wirkung (4.1) durch

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2 z \, \partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu \tag{4.7}$$

[1] Das D steht für *Dirichlet*.

gegeben. In diesen Konventionen lauten die *Neumann*-Randbedingungen $\partial_z X_\mu = \partial_{\bar{z}} X_\mu$, so daß in einer Oszillatorentwicklung links- und rechtslaufende Oszillatoren identisch sein müssen. Damit kann man die Oszillatorentwicklung für den offenen bosonischen String mit Neumann-Randbedingungen direkt angeben. Es gilt[2]

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i\alpha' p^\mu \ln(|z|^2) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^\mu}{m} (z^{-m} + \bar{z}^{-m}) \ . \tag{4.8}$$

Kanonische Quantisierung liefert für das Massenquadrat

$$m^2 = -p^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{m=1}^{\infty} m N_m - 1 \right) = \frac{1}{\alpha'} (N - 1) \ . \tag{4.9}$$

4.1.2 Chan-Paton-Faktoren

Eine weitere Besonderheit des offenen Strings ist, daß man an den Endpunkten Freiheitsgrade einführen kann. Diese dürfen allerdings nicht dynamisch sein. Hat also ein Ende des Strings einen bestimmten Zustand, liegt dieser fest. Im Folgenden seien solche Zustände mit i und j bezeichnet, wobei $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ (siehe Abbildung 4.1). Durch diese zusätlichen Frei-

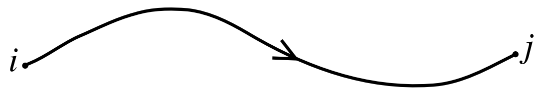

Abbildung 4.1: Offener String mit Chan-Paton-Indizes

heitsgrade existieren nun zu gegebener Oszillatoranregungszahl N und Schwerpunkt-Impuls k genau n^2 String-Zustände. Diese kann man wie folgt darstellen

$$|\, N, k; a \,\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} |\, N, k; ij \,\rangle \, \lambda_{ij}^a \ . \tag{4.10}$$

Dabei sind die λ_{ij}^a n^2 linear unabhängige $n \times n$-Matrizen. Sie werden als Chan-Paton-Faktoren bezeichnet. Damit eine Theorie, die offene Strings beinhaltet, konsistent bleibt, müssen die Chan-Paton-Faktoren die adjungierte Darstellung einer zusätzlichen Eichgruppe bilden. Zur Identifikation der Eichgruppe betrachtet man die Streuamplituden offener Strings. Weil für die Berechnung der Streuamplituden die Spur über die Chan-Paton-Faktoren gebildet werden muß, erhält man (hier beispielhaft für $3, 4 \to 1, 2$) Terme der Form

$$\mathrm{Tr}(\lambda^1 \lambda^2 \lambda^3 \lambda^4) \ . \tag{4.11}$$

Diese Spur besitzt, wie auch die Norm der Zustände, die $\mathrm{U}(n)$-Symmetrie $\lambda^a \to U \lambda^a U^{-1}$, $U \in \mathrm{U}(n)$. Unter der $\mathrm{U}(n)$ transformieren die Enden eines Strings als $\mathbf{n}$ bzw. $\bar{\mathbf{n}}$. Nun folgt aus der Massenformel (4.9) für $N = 1$ die Existenz von masselosen Eichbosonen[3]. Diese transformieren immer in der adjungierten Darstellung. Die $\mathrm{U}(n)$ ist also die Eichgruppe des offenen bosonischen Strings. Die Chan-Paton-Faktoren sind (als Generatoren der $\mathrm{U}(n)$) damit hermitesch.

[2]Die Konventionen entsprechen, sofern nicht explizit abweichend angegeben, denen von Kapitel 2.

[3]Für $N = 0$ findet man die für bosonische Theorien typischen Tachyonen, die in der supersymmetrischen Typ I-Theorie herausprojiziert werden.

4.1.3 Nichtorientierte Strings

Wie in der Einleitung dieses Kapitels beschrieben, enthalten die Typ I Stringtheorien nichtorientierte Strings. Deshalb ist es wichtig, deren Eigenschaften kurz vorzustellen. Dies geschieht wiederum am Beispiel des bosonischen Strings. Eine nichtorientierte Stringtheorie erhält man, wenn man aus einer orientierten Theorie die Weltflächen-Parität Ω ausmoddet (vergleiche Abschnitt 2.7.4).
Im Folgenden wird betrachtet, welche Konsequenzen sich durch das Ausmodden für offene Strings ergeben. Für diese ist die Weltflächen-Parität Ω durch

$$\begin{aligned}\Omega \quad : \quad & \sigma^1 \to \pi - \sigma^1 \\ & z \to -\bar{z}\end{aligned} \tag{4.12}$$

definiert. An der Modenentwicklung (4.8) kann man ablesen, daß Weltflächen-Parität Ω Schwerpunkt x^μ und kanonischen Impuls p^μ invariant läßt. Die Oszillatoren transformieren gemäß

$$\Omega : \alpha_m^\mu \to (-1)^m \, \alpha_m^\mu \; . \tag{4.13}$$

Das Ausmodden selber entspricht einem Orbifold-Twist. Der Projektor für invariante Zustände lautet

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\,(1 + \Omega) \; . \tag{4.14}$$

Um die Transformation von Zuständen anzugeben, muß man berücksichtigen, daß Ω die Enden des Strings, also auch die Chan-Paton-Indizes vertauscht. Damit folgt aus (4.13) direkt, daß ein gegebener Zustand $|\, N, k; ij\,\rangle$ unter Weltflächen-Parität gemäß

$$\Omega\,|\, N, k; ij\,\rangle = \omega_N\,|\, N, k; ji\,\rangle \qquad \text{mit} \quad \omega_N = (-1)^N \tag{4.15}$$

transformiert. Das bedeutet, daß Zustände nur unter folgenden Bedingungen invariant unter Weltflächen-Parität sein können:

$$N \text{ ungerade und } \lambda^a \text{ antisymmetrisch} \tag{4.16}$$

$$\text{oder}$$

$$N \text{ gerade und } \lambda^a \text{ symmetrisch} \; . \tag{4.17}$$

Für $N = 1$ findet man masselose Vektoren, und somit Eichbosonen. Aus (4.16) folgt, daß die λ^a antisymmetrisch sind. Die Eichgruppe ist also $\mathrm{SO}(n)$[4].

Die Behandlung von Weltflächen-Parität für den orientierten geschlossenen bosonischen String ist bereits in Abschnitt 2.7.4 erfolgt. Links- und rechtslaufende Oszillatoren werden vertauscht. Dann transformiert ein gegebener Zustand $|\, N, \tilde{N}, k\,\rangle$ unter Weltflächen-Parität gemäß[5]

$$\Omega\,|\, N, \tilde{N}, k\,\rangle = |\, \tilde{N}, N, k\,\rangle \; . \tag{4.18}$$

Tachyon, Graviton und Dilaton bleiben also im Spektrum der nichtorientierten Theorie, das antisymmetrische Tensorfeld wird herausprojiziert.

[4]Neben der reinen Weltflächen-Parität kann man Kombinationen von Ω und $\mathrm{U}(n)$-Transformationen bilden, die ebenfalls die Orientierung der Weltfläche vertauschen. Damit kann neben der oben erhaltenen $\mathrm{SO}(n)$ auch (für gerades N) eine symplektische Eichgruppe erzeugt werden. Dieser Fall ist hier uninteressant.

[5]B-Feld hier vernachlässigt.

4.1.4 Wilson-Linien beim offenen String

Wie schon in der heterotischen Theorie, können auch für offene Theorien (mit mindestens einer kompaktifizierten Dimension) *Wilson*-Linien eingeführt werden. Die Weltflächenwirkung erhält den Zusatzterm

$$S_{\text{Wilson}} = i\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_{\partial M} \mathrm{d}\tau A_m \partial_\tau X^m \ . \tag{4.19}$$

Das Integral erstreckt sich über den Rand der Weltfläche M, m indiziert die kompaktifizierten Dimensionen. Es soll wiederum der Fall konstanter Eichfelder betrachtet werden. Durch kanonische Quantisierung erhält man die Nullmodenimpulse. Man kann das Ergebnis allerdings auch am heterotischen Fall aus Abschnitt 2.10 ablesen. Da offene Strings keine Windungszahlen haben, können alle $w^k = 0$ gesetzt werden. Die internen Indizes I der heterotischen Größen gehen über in Chan-Paton-Indizes. Betrachtet man zum Beispiel die orientierte offene bosonische Stringtheorie mit $\mathrm{U}(n)$ *Chan-Paton*-Faktoren und einer kompaktifizierten Dimension X^{25}, so findet man für $v^{25} = i\partial_\tau x^{25}$

$$v^{25} = \frac{2\pi n_{\mathrm{K}} + q\theta}{2\pi R} \qquad \text{mit} \quad \theta = -2\pi R A_{25} \ . \tag{4.20}$$

Hier ist n_{K} die KK-Impulszahl. Weil die Eichfelder in der adjungierten Darstellung gegeben sind, kann ein konstantes A_{25} immer durch Eichtransformationen diagonalisiert werden. Dann ist A_{25} gegeben durch

$$A_{25} = -\frac{1}{2\pi R}\mathrm{diag}(\theta_1, \ldots, \theta_n) \ . \tag{4.21}$$

Das Eichfeld liegt also in der diagonalen Untergruppe der $\mathrm{U}(n)$, also der $\mathrm{U}(1)^n$ und koppelt an die Chan-Paton-Faktoren λ eines Zustands durch den Kommutator $[A_{25}, \lambda]$. Ein String mit *Chan-Paton*-Indizes $|\, ij\, \rangle$ hat damit Ladung $+1$ unter $\mathrm{U}(1)_i$, Ladung -1 unter $\mathrm{U}(1)_j$ und Ladung 0 unter den übrigen U(1)en. Aus (4.20) folgt damit

$$v^{25} = \frac{2\pi n_{\mathrm{K}} - \theta_j + \theta_i}{2\pi R} \ . \tag{4.22}$$

Für das Massenspektrum ergibt sich

$$m^2 = \frac{(2\pi n_{\mathrm{K}} - \theta_j + \theta_i)^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{1}{\alpha'}(N-1) \ . \tag{4.23}$$

Das bedeutet für die Eichbosonen ($n_K = 0$, $N = 1$):

$$m^2_{\text{Eb.}} = \frac{(\theta_i - \theta_j)^2}{4\pi^2 R^2} \ . \tag{4.24}$$

Die Eichgruppe ist also explizit von der Wahl der θ abhängig. Sind alle θ verschieden, existieren masselose Eichbosonen nur für $i = j$. Die Eichgruppe bricht zur $\mathrm{U}(1)^n$. Gilt $\theta_i = \theta_j \ \forall i, j \in \{1, \ldots, r\}$ und $\theta_i \neq \theta_j$ für die übrigen i, j, lautet die Eichgruppe $\mathrm{U}(r) \times \mathrm{U}(1)^{n-r}$. *Wilson*-Linien können also Eichsymmetrien brechen. Das gilt natürlich auch für den heterotischen String.

4.2 D-Branes

Im letzten Abschnitt wurde bereits beschrieben, daß die Enden offener Strings mit *Dirichlet*-Randbedingungen auf Hyperflächen liegen, die D-Branes genannt werden. Die Existenz solcher Hyperflächen erscheint zunächst problematisch, weil durch sie offensichtlich *Poincare*-Invarianz gebrochen wird. Die Existenz von D-Branes ist allerdings ebenfalls eine Konsequenz von T-Dualität. Dies soll am Beispiel eindimensionaler T-Dualität (hier für X^{25}) vorgestellt werden: Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, folgt die T-duale Beschreibung einer mit Radius R eindimensional kompaktifizierten Theorie, indem man zum Radius $R' = \sqrt{\alpha'}/R$ und (in der kompakten Richtung) zum T-dualen Koordinatenfeld

$$X'(z,\bar{z}) = X_L(z) - X_R(\bar{z}) \tag{4.25}$$

übergeht. Für den Limes $R \to 0$ folgt $R' \to \infty$ und die T-duale Beschreibung liefert eine unkompaktifizierte, 26-dimensionale Theorie. Um die T-duale Theorie zu untersuchen, spaltet man das Koordinatenfeld des offenen Strings mit *Neumann*-Randbedingungen (4.8) in holomorphen und antiholomorphen Anteil und transformiert die Weltflächenkoordinaten $z, \bar{z}$ in σ und τ. Für Links- und Rechtsläufer folgt

$$X_L^{25}(\sigma-\tau) = x_L^{25} - \alpha' p_L^{25}(\sigma-\tau) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m\neq 0} \frac{\alpha_m^{25}}{m} e^{im(\sigma-\tau)} , \tag{4.26}$$

$$X_R^{25}(\sigma+\tau) = x_R^{25} - \alpha' p_R^{25}(\sigma+\tau) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m\neq 0} \frac{\alpha_m^{25}}{m} e^{-im(\sigma+\tau)} \tag{4.27}$$

und schließlich unter Benutzung von $p^{25} = p_{L/R}^{25}$ für das Koordinatenfeld in ursprünglicher Beschreibung

$$\begin{aligned} X^{25} &= X_L^{25}(\sigma-\tau) + X_R^{25}(\sigma+\tau) \\ &= x^{25} + 2\alpha' p^{25}\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{m\neq 0} \frac{\alpha_m^{25}}{m} e^{-im\tau} \cos(m\sigma) \end{aligned} \tag{4.28}$$

sowie in T-dualer Beschreibung

$$\begin{aligned} X'^{25} &= X_L^{25}(\sigma-\tau) - X_R^{25}(\sigma+\tau) \\ &= x'^{25} - 2\alpha' p^{25}\sigma - \sqrt{2\alpha'} \sum_{m\neq 0} \frac{\alpha_m^{25}}{m} e^{-im\tau} \sin(m\sigma) , \end{aligned} \tag{4.29}$$

wobei $x^{25} = x_L^{25} + x_R^{25}$ und $x'^{25} = x_L^{25} - x_R^{25}$. Aus dem Vergleich von (4.28) und (4.29) folgt direkt die wichtige Identität

$$\partial_\sigma X^{25} = -\partial_\tau X'^{25} . \tag{4.30}$$

X^{25} genügt nach Konstruktion einer *Neumann*-Randbedingung (4.4). Wegen (4.30) folgt daraus aber, daß das T-duale Koordinatenfeld X'^{25} die *Dirichlet*-Randbedingungen (4.6) erfüllt. D-branes sind somit eine direkte Folge von T-Dualität.

Es stellt sich nun die Frage, welchen Einfluß *Wilson*-Linien auf D-Branes haben. Für den orientierten offenen bosonischen String mit U(n) Chan-Paton-Faktoren (wiederum X^{25} auf einem Kreis mit Radius R kompaktifizert) gilt:

$$\begin{aligned} X'^{25}(\pi) - X'^{25}(0) &= \int_0^\pi \mathrm{d}\sigma\, \partial_\sigma X'^{25} \stackrel{(4.30)}{=} \int_0^\pi \mathrm{d}\sigma\, \partial_\tau X^{25} = 2\pi\alpha' p^{25} \\ &= \frac{\alpha'}{R}(2\pi n_\mathrm{K} + \theta_i - \theta_j) = (2\pi n_\mathrm{K} + \theta_i - \theta_j)\, R' \ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Die KK-Impulszahl n_K spiegelt die periodische Identifizierung wieder. Ein Stringende im *Chan-Paton*-Zustand i liegt nach (4.31) also auf einer Hyperfläche bei

$$X'^{25} = \theta_i R' = -2\pi\alpha' A_{25,ii} \ . \tag{4.32}$$

Sind alle θ unterschiedlich, so existieren n solcher Hyperflächen an verschiedenen Positionen. Der Sachverhalt ist für den U(3)-Fall und jeweils verschiedene θ in Abbildung 4.2 dargestellt. Für mehrere toroidal kompaktifizierte Dimensionen X^m mit $m \in \{p+1, \ldots, 25\}$ verallgemeinert sich obige Beschreibung über faktorisierte T-Dualität (vergleiche Abschnitt 2.7.3), indem man für jedes m zum T-dualen Koordinatenfeld übergeht, also sukzessive D_{p+1} bis D_{25} angewendet. Die *Neumann*-Randbedingungen werden wieder jeweils zu *Dirichlet*-Randbedingungen im T-Dualen. Die Enden der Strings befinden sich auf n parallelen $(p+1)$-dimensionalen Unterräumen. Die $(p+1)$-dimensionalen Unterräume werden Dp-Branes genannt. Damit werden die *Wilson*-Linien in den verschiedenen Richtungen zu unabhängigen Koordinaten für jeden Unterraum. Im D-Branebild enthält die unkompaktifizierte U(n)-Theorie also n D25-Branes, die den kompletten Raum ausfüllen. Damit kann auch der Mechanismus zur Brechung der Eichgruppen durch *Wilson*-Linien reformuliert werden: In einer Konfiguration mit n getrennten D-Branes ist die U(n) gebrochen zu U$(1)^n$. Liegen r D-Branes aufeinander lautet die Eichgruppe U$(r) \times$ U$(1)^{n-r}$.

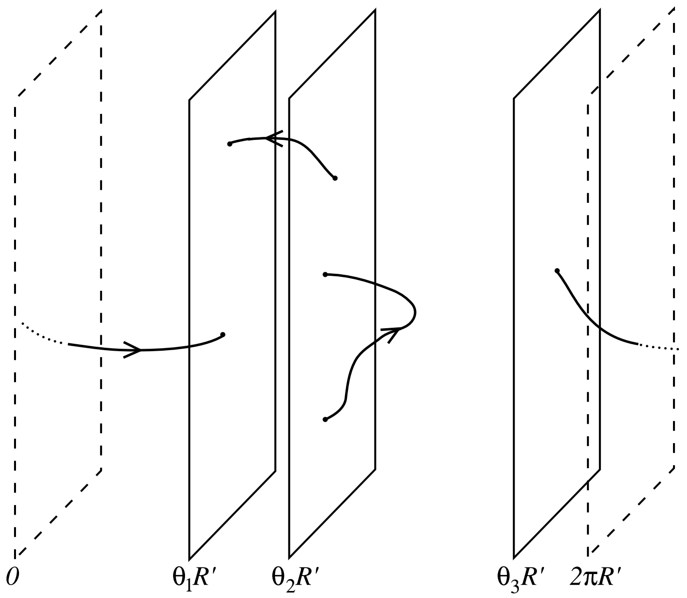

Abbildung 4.2: Konfiguration von Hyperflächen für U(3) Chan-Paton-Faktoren und *Wilson*-Linie. Die gestrichelten Ebenen sind periodisch identifiziert.

Der Mechanismus für nichtorientierte bosonische Theorien ist analog. Es ergeben sich jedoch zusätzliche Möglichkeiten. Für geschlossene Strings muß zusätzlich zur faktorisierten T-Dualisierung wiederum das Ausmodden der Weltflächen-Parität erfolgen. Für das T-duale Koordinatenfeld gilt

$$\Omega : X'^m(z, \bar{z}) \to -X'^m(\bar{z}, z) \ . \tag{4.33}$$

Dies entspricht im T-dualen Bild dem Produkt aus Weltflächen-Parität und einer Raumzeitreflexion. Die Raumzeitreflexion kann aber wiederum mit einem $\mathbb{Z}_2$-Twist identifiziert werden. Durch Ausmodden für eine kompaktifizierte Dimension (z.B. X^{25}) erhält man ein Linienelement $0 \leq X'^{25} \leq \pi R'$ mit sogenannten „Orientifold"-Ebenen an beiden Seiten.

Auch beim offenen nichtorientierten String mit SO(n) *Chan-Paton*-Faktoren findet man Orientifold-Ebenen bei $X'^{25} = 0$ und $X'^{25} = \pi R'$. Für gerades n kann eine beliebige *Wilson*-Linie wiederum diagonalisiert werden und die Eigenwerte treten paarweise auf. Es gilt

$$W = \mathrm{diag}\left(e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{-i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_{n/2}}, e^{-i\theta_{n/2}}\right) \ . \tag{4.34}$$

Man findet also im dualen Bild $\frac{n}{2}$ D-Branes im Intervall $[0, \pi R']$ und $\frac{n}{2}$ D-Branes als Spiegelbilder unter der Orientifold-Identifikation. Diese Situation ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Sind alle θ verschieden ist die Eichgruppe $\mathrm{U}(1)^{n/2}$. Liegen r D-Branes aufeinander, aber nicht

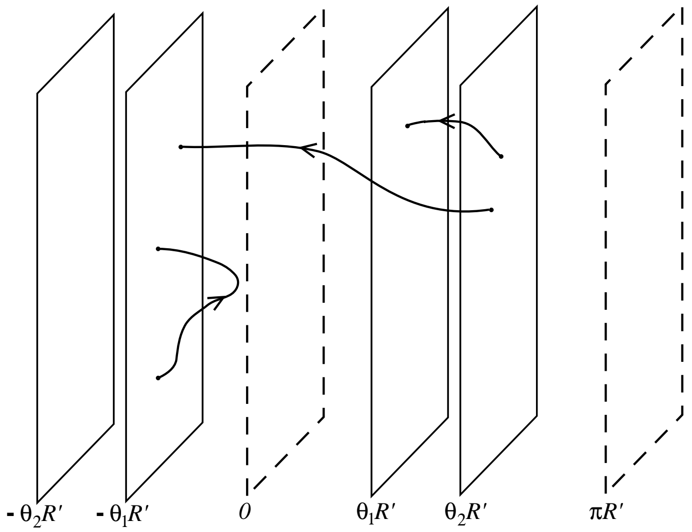

Abbildung 4.3: Die Orientifold-Ebenen sind gestrichelt dargestellt. Zwei D-Branes sind mit ihren Spiegelbildern eingezeichnet.

auf einer der Orientifold-Ebenen, so wird die Eichgruppe zur $\mathrm{U}(r) \times \mathrm{U}(1)^{n/2-r}$. Liegen r D-Branes auf einer Orientifold-Ebene, so befinden sich deren Spiegel-Branes ebenfalls dort und die Eichgruppe ist $\mathrm{SO}(2r) \times \mathrm{U}(1)^{n/2-r}$. Liegen alle D-Branes auf einer Orientifold-Ebene, erhält man die Eichgruppe SO(n) zurück.

Für ungerades n kommt zu den Eigenwerten (4.34) ein Eintrag mit ± 1 hinzu und die entsprechende D-Brane muß (als ihr eigenes Spiegelbild) auf einer Orientifold-Ebene liegen.

Der Unterschied zwischen D-Branes und Orientifold-Ebenen besteht darin, daß D-Branes im Gegensatz zu Orientifold-Ebenen dynamische Objekte sind. Das sieht man wie folgt: Betrachtet man wiederum eine offene Theorie mit einer kompaktifizierten Dimension, dann sind

$$\alpha^{\mu}_{-1}|\, k; ii\,\rangle \quad \text{und} \quad \alpha^{25}_{-1}|\, k; ii\,\rangle \tag{4.35}$$

nach Gleichung (4.23) bei verschwindemdem KK-Impuls masselos. Der erste Zustand ist ein auf der Hyperfläche „lebendes“ Eichfeld. Der zweite Zustand „lebt“ senkrecht dazu und beschreibt somit Oszillationen der Hyperfläche. Dieser Mechanismus ist aus der Beschreibung von Gravitation durch Stringtheorien bekannt: Betrachtet man Stringtheorien auf flachem Hintergrund, so findet man, daß Oszillationen von masselosen geschlossenen Strings einer Deformation des flachen Hintergrunds entsprechen. Die Raumzeit wird gekrümmt. Analog verhält es sich mit den D-Branes. D-Branes sind also dynamische Objekte. Auf den Orientifold-Ebenen selbst „leben“ keine Zustände. Orientifold-Ebenen sind also nicht dynamisch.

4.3 Superstrings und D-Branes

Viele der in den letzten beiden Abschnitten betrachteten Phänomene lassen sich direkt auf die Typ I Stringtheorie übertragen. Dazu wird im Folgenden die Konstruktion der Typ I Stringtheorie kurz vorgestellt. Die Darstellung ist keineswegs vollständig, sondern listet nur einige für diese Arbeit wichtige Eigenschaften auf.

4.3.1 Typ I Superstrings

Betrachtet man eine offene Stringtheorie, so können Wechselwirkungen der Form offen + offen → geschlossen auftreten. Eine Theorie mit offenen Strings muß also immer auch geschlossene Strings enthalten. Die Theorie soll supersymmetrisch sein. Daraus folgt, daß jeder offene String, der konsistent an geschlossene Strings koppeln soll, eine GSO-Projektion im offenen Stringsektor haben muß. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten mit folgenden masselosen Spektren:

$$\begin{aligned} (\mathrm{A}) \quad &: \quad \mathrm{NS}+,\ \mathrm{R}+ = \mathbf{8}_v + \mathbf{8}\ , \\ (\mathrm{B}) \quad &: \quad \mathrm{NS}+,\ \mathrm{R}- = \mathbf{8}_v + \mathbf{8}'\ . \end{aligned}$$

Wie beim bosonischen String, erhält man durch die Chan-Paton-Faktoren für den orientierten Fall eine U(n)- und für den nichtorientierten Fall eine SO(n) bzw. Sp(n)-Eichgruppe. Dabei sind die Spinoren $\mathbf{8}$ bzw. $\mathbf{8}'$ die Superpartner der Eichbosonen und werden deshalb „Gauginos“ genannt. Wie die Eichbosonen müssen auch die Gauginos in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe liegen, weil SUSY und Eichsymmetrie kommutieren. Nun sind die offenen Stringmultipletts mit 16 Zuständen Darstellungen von $d = 10$, $\mathcal{N}$=1 SUSY. Die orientierten Typ II Theorien besitzen in $d = 10$ $\mathcal{N}$=2 SUSY und kommen daher nicht für die Kopplung an supersymmetrische offene Strings in Frage. Offene Strings können also nur an eine nichtorientierte geschlossene Theorie koppeln und müssen daher selbst nichtorientiert sein[6]. Aber welche nichtorientierte Theorie ist die richtige? Wie in Abschnitt 2.9 beschrieben, ist der Typ IIB Superstring chiral. Deswegen kann man durch Ausmodden der Weltflächen-Parität nichtorientierte geschlossene Strings erhalten. Man kann zeigen, daß Konsistenz nur dann gegeben ist, wenn auf Zustände mit $\Omega = +1$ projiziert wird. Aus dem Vergleich der Chiralitäten dieser nichtorientierten geschlossenen „Theorie“ und den beiden Möglichkeiten

[6] Diese Folgerung beruht wiederum auf Wechselwirkungsargumenten, die hier nicht näher betrachtet werden.

für eine supersymmetrische offene Theorie findet man, daß bei letzteren nur (A) in Frage kommen kann. Das Ergebnis ist eine konsistente nichtorientierte supersymmetrische Theorie, die sowohl offene als auch geschlossene Strings enthält. Sie wird als Typ I Superstringtheorie bezeichnet. Betrachtet man nun 1-Loop Vakuumamplituden der Typ I Stringtheorie, so kommen als Topologien für die Weltfläche Zylinder, *Möbius*-Band und *Klein*sche Flasche in Frage. Berechnet man die Zustandssummen zu den jeweiligen Topologien findet man divergente Anteile, sogenannte „Tadpoles“, die durch den Austausch masseloser RR-Zustände entstehen. In einer konsistenten Theorie müssen sich die divergenten Anteile gegeneinander wegheben. Dies wird als „Tadpole Cancelation“ bezeichnet. Aus dieser Konsistenzbedingung findet man, daß als Eichgruppe für die Typ I Theorie nur die SO(32) in Frage kommt. Auf eine Darstellung der Details dieser Berechnungen wird hier verzichtet, weil sie für diese Arbeit keine Rolle spielen.

4.3.2 Das D-Brane-Bild

In Analogie zum bosonischen Fall aus Abschnitt 4.2 führt auch beim nichtorientierten Typ I SO(32) Superstring der Limes $R \to 0$ und eindimensionale T-Dualität in einer kompakten Dimension zu einer Raumzeit mit 16 D8-Branes zwischen zwei Orientifold-Ebenen. Man kann sich nun vorstellen, daß zwei D-Branes sehr weit voneinander entfernt sind. Dann muß die Physik *zwischen* diesen D-Branes lokal durch eine orientierte geschlossene Superstringtheorie (also Typ II) beschrieben werden können. Das sieht man wie folgt: Die Theorie muß geschlossen sein, weil die offenen Strings weit entfernt auf den D-Branes leben, und orientiert, weil die Ω-Projektion Zustände mit deren Spiegelbildern bezüglich der Orientifold-Ebene korreliert, den Raum der Zustände lokal allerdings nicht einschränkt. Im Typ I Superstring haben Links- und Rechtsläufer – entsprechend der Typ IIB Theorie – gleiche Chiralität. In Abschnitt 2.9 wurde gezeigt, daß eine ungerade Anzahl von faktorisierten T-Dualitäten Typ IIA und Typ IIB Theorien vertauscht. Daraus folgt, daß die lokale Physik zwischen zwei D-Branes für eine ungerade Anzahl von faktorisiert T-dualisierten Dimensionen durch die Typ IIA, für eine gerade Anzahl durch die Typ IIB Theorie beschrieben wird. Da Typ I Stringtheorien nun, wie oben gezeigt, in $d = 10$ $\mathcal{N}=1$ SUSY haben, Typ II Theorien $\mathcal{N}=2$, bedeutet dies, daß durch die Anwesenheit von D-Branes die Hälfte der Supersymmetrien gebrochen werden. Bemerkenswert dabei ist, daß die Hälfte der Supersymmetrien ungebrochen bleibt. Man kann zeigen, daß dies eine Eigenschaft von BPS-Zuständen[7] ist. Die Masse von BPS-Zuständen erfüllt die BPS-Ungleichung:

$$m \geq q_i \ . \tag{4.36}$$

wobei die q_i erhaltene Ladungen sind. Detailierte Berechnungen zeigen, daß die q_i den antisymmetrischen Ladungen der RR-Zustände entsprechen (vergleiche mit dem masselosen Typ I Spektrum in Anhang C). Motiviert werden kann dies dadurch, daß die $(p+1)$-Form-Potentiale C_{p+1} – mit $(p+2)$-Form-Feldstärken – gemäß

$$\int_{V_D} C_{p+1} \tag{4.37}$$

in natürlicher Weise an das Weltvolumen V_D von D-Branes koppeln. Durch die Einbeziehung der D-Branes enthält die Stringtheorie nun Quellen für Eichfelder. Aus diesen Eigenschaften

[7] BPS = *Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield*.

von D-Branes ergibt sich eine Vielzahl von Folgerungen und interessanten Modellen, auf die in dieser Arbeit allerdings nicht eingegangen werden kann.

Entscheidend ist hier, daß man über faktorisierte T-Dualität Typ IIA Theorien mit D8, D6, D4, D2 und D0-Branes erhalten kann[8]. Dies entspricht wiederum 9, 7, 5, 3 und 1-Form-Potentialen. 1 und 3-Form-Potentiale sind im masselosen Typ IIA Spektrum (vergleiche Anhang C) explizit enthalten. Wegen *Hodge*-Dualität ergeben die 5 und 7-Formen äquivalente Beschreibungen der gleichen Theorie. Die 9-Form tritt im Kontext der sogenannten massiven Typ IIA Supergravitation (SUGRA) auf. Analog enthält die Typ IIB Theorie Dp-Branes mit ungeradem p.

In diesem Zusammenhang bietet sich folgende Interpretation an: Typ I und Typ II Theorien sind verschiedene Limites einer einzigen Theorie. Diese Theorie besitzt zwei Zustände ohne D-Branes, gerade die Typ II Theorien, und einen Zustand mit 16 D9-Branes und einer Orientifold 9-Ebene, entsprechend der Typ I Theorie. „Dazwischen“ gibt es unendlich viele andere Zustände mit allgemeinen D-Brane-Konfigurationen.

4.4 Die D-Brane Wirkung

Im Folgenden wird – wie in Abschnitt 4.2 – eine offene bosonische Theorie mit einer kompaktifizierten Dimension betrachtet. Die masselosen Felder auf dem Weltvolumen einer Dp-Brane sind gemäß (4.35) ein U(1)-Vektor und $25 - p$ Skalare, wobei die Skalare Fluktuationen der D-Brane beschreiben. Für den Grenzfall $R' \to \infty$ ist die niederenergetische Wirkung für *eine* Dp-Brane durch

$$S_p = -T_p \int \mathrm{d}^{p+1}\xi \, e^{-\Phi} \, \left[\exp(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})\right]^{1/2} \tag{4.38}$$

gegeben. Diese Raumzeitwirkung wird *Born-Infeld*-Wirkung genannt. T_p ist die Spannung der Dp-Brane, ξ^a mit $a \in \{0, \ldots, p\}$ sind Weltvolumen-Koordinaten und Φ ist das Dilaton. Die Felder auf der D-Brane sind durch die eingebetteten Koordinatenfelder $X^\mu(\xi)$ und das Eichfeld $A^a(\xi)$ gegeben. G_{ab} bzw. B_{ab} sind gemäß

$$G_{ab}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} G_{\mu\nu}(X(\xi)) \ , \quad B_{ab}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} B_{\mu\nu}(X(\xi)) \tag{4.39}$$

induzierte (oder auch zurückgezogene) Metrik bzw. antisymmetrischer Tensor. Die Wirkung (4.38) ist eine tree-level Wirkung für offene Strings (daher die Abhängigkeit vom Dilaton). Die weiteren Abhängigkeiten erkennt man wie folgt: Die einfachste, Koordinaten-unabhängige Wirkung ist das Integral über das Weltvolumen $(-\det G_{ab})^{1/2}$. Dieser Anteil ist das Analogon der D-Brane Wirkung zur *Nambu-Goto* Wirkung für Strings. Die Abhängigkeit von F_{ab} findet man mit Hilfe der faktorisierten T-Dualität wie folgt: Man betrachte eine D-Brane mit ausgedehnten Richtungen X^1 und X^2 und konstantem Eichfeld F_{12} (weitere Richtungen beliebig). Dann kann man die Eichung $A_2 = X^1 F_{12}$ wählen. Faktorisierte T-Dualität D_2 in X^2-Richtung ändert die *Neumann*-Randbedingung in eine *Dirichlet*-Randbedingung. Die D-Brane verliert eine Dimension. Aus Gleichung (4.32) folgt

$$X'^2 = -2\pi\alpha' X^1 F_{12} \ . \tag{4.40}$$

[8] D0-Branes haben nur einen (zeitlichen) Freiheitsgrad und entsprechen somit Solitonen.

Die D-Brane wird (für $F \neq 0$) in der (1-2)-Ebene gedreht. Diese Drehung liefert in der Wirkung einen geometrischen Faktor

$$\int \mathrm{d}X^1 \left[1 + (\partial_1 X'^2)^2\right]^{1/2} = \int \mathrm{d}X^1 \left[1 + (2\pi\alpha' F_{12})^2\right]^{1/2} . \tag{4.41}$$

Nun kann man für jede D-Brane F_{ab} durch Boost-Transformationen und Rotationen Block-diagonalisieren und erhält damit Produkte von Faktoren der Form (4.41). Das entspricht genau dem Beitrag von F in der *Born-Infeld* Wirkung (4.38) mit $G_{ab} = \delta_{ab}$. Die Abhängigkeit der Wirkung vom B-Feld findet man wie folgt: Der B- und A-abhängige Anteil der Weltflächenwirkung ist gegeben durch

$$\frac{i}{4\pi\alpha'} \int_M \mathrm{d}^2\sigma\, g^{1/2} \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu} + i \int_{\partial M} \mathrm{d}X^\mu A_\mu . \tag{4.42}$$

Dabei ist zu beachten, daß A_μ zurückgezogen ist. A beschreibt ein Eichfeld, das *auf* der D-Brane lebt. Die *Wilson*-Linien in den kompaktifizierten Dimensionen legen die Position der D-Branes fest. *Wilson*-Linie und Eichfeld A sind (wie oben beschrieben) über faktorisierte T-Dualität und $R \to 0$ miteinander verbunden. Sie haben aber unterschiedliche Bedeutung. Mit den B-Feldern verhält es sich analog. Die hier beschriebenen B-Felder sind Hintergründe *auf* der D-Brane und nicht mit den antisymmetrischen Moduli zu verwechseln. Dieser Unterschied wird in Abschnitt 5.3 noch eine Rolle spielen.

Um Konsistenz der Raumzeittheorien zu gewährleisten, muß Raumzeit-Eichinvarianz erhalten bleiben. Unter der gewöhnlichen Eichtransformation

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda \tag{4.43}$$

bleibt (4.42) invariant, weil sich der Randterm nur um das Integral einer totalen Ableitung ändert. Wird das antisymmetrische B-Feld gemäß

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu \tag{4.44}$$

variiert, erhält man wiederum eine totale Ableitung. Ist die Weltfläche allerdings begrenzt, erscheinen Randterme, die nur dann verschwinden können, wenn das A-Feld ebenfalls unter der Tensoreichsymmetrie

$$\delta A_\mu = -\zeta_\mu / 2\pi\alpha' \tag{4.45}$$

transformiert. Damit folgt, daß nur die Kombination

$$B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu} \equiv \mathcal{F}_{\mu\nu} \tag{4.46}$$

invariant unter beiden Symmetrien ist und somit in der Raumzeitwirkung (4.38) auftreten muß. Damit ist (4.38) festgelegt.

Es kann gezeigt werden, daß die Spannung der D-Brane über

$$\tau_p = T_p e^{-\Phi_0} \quad \text{mit} \quad \tau_p^2 = \frac{\pi}{256\kappa^2} (4\pi^2\alpha')^{11-p} \tag{4.47}$$

gegeben ist. Dabei ist Φ_0 der Vakuumerwartungswert (VEV) des Dilatons und κ die Gravitationskopplung. Die Details dieser Rechnung spielen für die Betrachtungen in dieser Arbeit keine Rolle und und sind z.B. in [28] ausgeführt.

Für n seperate D-Branes ist die Raumzeitwirkung durch n Kopien der Raumzeitwirkung für eine D-Brane (4.38) gegeben. Nun stellt sich die Frage was geschieht, wenn die D-Branes aufeinander liegen. In Abschnitt 4.2 wurde gezeigt, daß man dann n^2 statt n masselose Vektoren und Skalare auf der Brane erhält. Die Felder $X^\mu(\xi)$ und $A^\mu(\xi)$ werden $(n \times n)$-Matrizen. Die Interpretation für die A-Felder als nichtabelsche $\mathrm{U}(n)$-Eichfelder liegt auf der Hand. Die Interpretation für die kollektiven Koordinaten X^μ als $(n \times n)$-Matrizen ist völlig unanschaulich. Diese sogenannte „nichtkommutative Geometrie“ spielt jedoch eine Schlüsselrolle bei der Beschreibung von D-Brane-Dynamik und liefert möglicherweise Erkenntnisse über die Natur der Raumzeit selbst.

Um nichtkommutative Geometrie zu verstehen, ist es nützlich die effektive Wirkung zu betrachten. In ihr tritt nun ein ableitungsfreier Term auf, der wegen faktorisierter T-Dualität von einem konstanten Eichfeld herrrührt. Für ein konstantes Vektorpotential ist die Feldstärke durch $[A_m, A_n]$ gegeben. Mit Hilfe von (4.32) findet man, daß dieser Term in der T-dualen Beschreibung übergeht zu[9] $(2\pi\alpha')^{-2}[X_m, X_n]$. Entwickelt man die Wirkung in der Feldstärke, ist der führende Term durch das Potential

$$V \propto \mathrm{Tr}([X_m, X_n][X^m, X^n]) \tag{4.48}$$

gegeben[10]. Die zweite Ableitung des Potentials an der Stelle $X^m = 0$ verschwindet. Damit sind alle kn^2 Skalare masselos ($k = 25 - p$ gibt hier die Anzahl der faktorisiert dualisierten Dimensionen an). Der Raum der flachen Richtungen des Potentials ist allerdings kleiner. Das Potential ist eine Summe von Quadraten und verschwindet nur falls alle $[X^m, X^n]$ verschwinden. Ist das der Fall, so kann mit Hilfe der $\mathrm{U}(n)$ Eichsymmetrie eine Eichung gewählt werden, in der alle X^m diagonal sind. Entsprechend findet man n flache Richtungen. Die n Diagonaleinträge können wiederum als kollektive Koordinaten für die n D-Branes interpretiert werden und das Bild schließt sich. Das Potential (4.48) interpoliert also zwischen den Wirkungen für die möglichen D-Brane-Konfigurationen.
Alle hier für den bosonischen String gewonnenen Aussagen lassen sich analog auf die Typ I Theorie übertragen.

4.5 Die nichtkommutative Struktur

In diesem Abschnitt wird die grundlegende Struktur der nichtkommutativen Geometrie kurz vorgestellt. Dabei geht es nur um die Einführung von Konventionen. Wenn in dieser Diplomarbeit von nichtkommutativen Strukturen die Rede ist, bezieht sich das nur auf das Auftauchen von nichtverschwindenden Kommutatoren für Koordinatenfelder. Sämtliche sich daraus ergebende Konsequenzen wie z.B. nichtkommutative *Yang-Mills* Theorien, etc. können im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht behandelt werden. Weitergehende Informationen können z.B. in [32] oder [13] gefunden werden.
Für Koordinaten x^i aus $\mathbb{R}^n$, deren Kommutatoren rein imaginäre $\mathbb{C}$-Zahlen liefern, sei

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij} \quad \text{mit} \quad \theta^{ij} \in \mathbb{R} \; . \tag{4.49}$$

Ist eine solche *Lie*-Algebra gegeben, kann man die Algebra der Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ zu einer nichtkommutativen assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ deformieren, so daß

$$f * g = fg + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f \partial_j g + \mathcal{O}(\theta^2) \; , \tag{4.50}$$

[9]Die Striche zur Bezeichnung T-dualer Größen werden der Einfachheit halber weggelassen.
[10]Dieser Term ist vereinfacht, spiegelt jedoch alle hier relevanten Eigenschaften richtig wieder.

wobei die Koeffizienten in jeder Ordnung von θ lokal differentielle Ausdrücke bilinear in f und g sind. Bis auf Redefinitionen von f und g, die in jeder Ordnung lokal in θ sind, ist die Lösung dieses Problems durch

$$f(x) * g(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\frac{\partial}{\partial\zeta^j}} f(x+\xi)\, g(x+\zeta)\big|_{\xi=\zeta=0} \tag{4.51}$$

gegeben. Für den Fall, daß f und g $(n \times n)$-Matrix-wertige Funktionen sind, kann das $*$-Produkt verallgemeinert werden. Es wird als Tensorprodukt von Matrixmultiplikationen mit dem $*$-Produkt (4.51) aufgefaßt und wieder als $*$-Produkt bezeichnet. Auch dieses erweiterte $*$-Produkt ist assoziativ. Für Funktionen f und g, die im Unendlichen schnell genug verschwinden, ist das erweiterte $*$-Produkt mit Integrationen verträglich. Es gilt

$$\int \mathrm{d}^d x\, \mathrm{Tr}(f * g) = \int \mathrm{d}^d x\, \mathrm{Tr}(g * f)\ . \tag{4.52}$$

Dies folgt mit Hilfe von partieller Integration aus der Definition des $*$-Produktes. Die Spur entspricht der gewöhnlichen Spur von $(n \times n)$-Matrizen und $\int$ ist das gewöhnliche Integral über Funktionen.

4.6 Offene Strings mit antisymmetrischem Hintergrund

Wiederum genügt es den offenen bosonischen String zu betrachten. Die eichfixierte euklidische Weltflächenwirkung mit konstantem B-Feld und Eichfeld $A(X)$ ist gegeben durch

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_M \mathrm{d}^2\sigma (G_{ij}\partial_a X^i \partial^a X^j + i\epsilon^{ab} B_{ij}\partial_a X^i \partial_b X^j) + i\int_{\partial M} X^i A(X)_i\ . \tag{4.53}$$

Das Eichfeld hängt von X ab und koppelt an den Rand der Weltfläche ∂M, der durch σ^2 parametrisiert wird. Die Variation der Wirkung liefert

$$\begin{aligned} \delta S \ &= \ \left[-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_M \mathrm{d}^2\sigma (G_{ij}\partial^a\partial_a X^j)\right]\ \delta X^i + \\ &\quad + \left[\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_{\partial M} \mathrm{d}\sigma^2 G_{ij}\partial_{\sigma^2} X^j\right]_{\sigma^1=0}^{\sigma^1=\pi}\ \delta X^i + \\ &\quad + \left[\frac{i}{2\pi\alpha'}\int_{\partial M} \mathrm{d}\sigma^2 B_{ij}\partial_{\sigma^2} X^j + i\int_{\partial M} \mathrm{d}\sigma^2 \left(\frac{\partial A_j}{\partial X^i} - \frac{\partial A_i}{\partial X^j}\right)\partial_{\sigma^2} X^j\right]_{\sigma^1=0}^{\sigma^1=\pi}\ \delta X^i \\ &\overset{!}{=}\ 0\ . \end{aligned} \tag{4.54}$$

Der erste Term ist ein sogenannter „Bulk"-Term[11] und liefert

$$\Box X^j \equiv \partial^a\partial_a X^j = 0\ . \tag{4.55}$$

Die restlichen Terme liefern die Randbedingung

$$\left[G_{ij}\partial_{\sigma^1} X^j + iB_{ij}\partial_{\sigma^2} X^j + i2\pi\alpha' F_{ij}\partial_{\sigma^2} X^j\right]_{\sigma^1=0}^{\sigma^1=\pi} = 0\ , \tag{4.56}$$

[11]Das Integral läuft über ganz M. Mit Bulk wird (hier) das Innere der Weltfläche bezeichnet.

wobei

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial X^i} - \frac{\partial A_i}{\partial X^j} \tag{4.57}$$

die Feldstärke ist. Faßt man B und F wie in (4.46) zusammen und verallgemeinert für gekrümmte Weltflächen, folgt aus (4.56):

$$(G_{ij}\partial_n X^j + i\mathcal{F}_{ij}\partial_t X^j)\big|_{\partial M} = 0 \; . \tag{4.58}$$

An dieser wichtigen Gleichung kann man einige Konsequenzen erkennen, die Hintergrundfelder auf Randbedingungen und damit letztlich auf D-Branes haben. Im Folgenden wird wiederum das D-Brane-Bild benutzt: Sind keine Hintergrundfelder „eingeschaltet", also $\mathcal{F} = 0$, so entspricht (4.58) der gewöhnlichen *Neumann*-Randbedingung (4.4). Hat B den Rang $r = p$, wobei p die Anzahl der räumlichen Dimensionen der Dp-Brane ist, und $B \to \infty$ (oder äquivalent: $G_{ij} \to 0$ für die räumlichen Richtungen der D-Brane), so entspricht (4.58) den *Dirichlet*-Randbedingungen (4.6). Gleichung (4.58) interpoliert also durch Hintergrundfelder zwischen *Neumann*- und *Dirichlet*-Randbedingungen. Man spricht von „gemischten" Randbedingungen.

Nun ergibt sich eine Schwierigkeit. Die Randbedingung ist für reelle X^j nicht zu erfüllen, obwohl man Gleichung (4.58) durch Aufheben der *Wick*-Rotation reell machen könnte. Es gibt zwei mögliche Auswege:

(1) **Randzustand-Zugang**

Im sogenannten „Randzustand-Zugang" (engl.: boundary state approach) werden die Randterme in der Wirkung zunächst vernachlässigt und später Randzustände gesucht, die (4.58) erfüllen. Bei diesem Zugang kann man ausnutzen, daß Tree-level-Wechselwirkungen von geschlossenen Strings und 1-loop Vakuumamplituden von offenen Strings durch modulare Transformationen ineinander überführt werden können, weil man ohne Randterme startet. Über geschlossene „Randzustände" findet man ein Spektrum, das anschließend über modulare Transformation in das Spektrum der offenen Theorie mit gemischten Randbedingungen transformiert werden kann.

(2) **Hintergrundformalismus**

Beim Hintergrundformalismus wird die offene Theorie mit gemischten Randbedingungen dadurch analysiert, daß man Propagatoren und Korrelationsfunktionen berechnet, die die Randbedingung (4.58) erfüllen.

Mit Hilfe des Hintergrundformalismus sind schon Mitte der 80er Jahre in [1, 18] Propagatoren und Vakuumamplituden für dieses Problem berechnet worden. Die Betrachtungen in dieser Arbeit beschränken sich auf den Fall, daß die Weltfläche M eine Scheibe ist. Diese Scheibe kann man konform auf die komplexe obere Halbebene $z = \sigma^2 + i\sigma^1$ mit Im $z \geq 0$ abbilden. Der Rand der Scheibe enspricht dann der reellen Achse $z = \bar{z}$. Für den Randterm gilt demzufolge nach (4.58)

$$G_{ij}(\partial - \bar{\partial})X^j + \mathcal{F}_{ij}(\partial + \bar{\partial})X^j\big|_{z=\bar{z}} = 0 \; , \tag{4.59}$$

wobei $\partial = \partial_z$ und $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$. Damit findet man für den Propagator (siehe z.B. [1])

$$\begin{aligned}&\langle\, X^i(z) X^j(z')\,\rangle = \\ &-\alpha' \left[(G^{-1})^{ij} \ln|z-z'| + \left(\frac{1+\mathcal{F}^2}{1-\mathcal{F}^2}\right)^{ij} \ln|z-\bar{z}'| - \left(\frac{\mathcal{F}}{1-\mathcal{F}^2}\right)^{ij} \ln\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'} \right] \; .\end{aligned} \tag{4.60}$$

Es ist nun sinnvoll einige Terme etwas umzuordnen. Es gilt

$$\left(\frac{1+\mathcal{F}^2}{1-\mathcal{F}^2}\right)^{ij} = \left(\frac{\mathcal{F}^2-1+2}{1-\mathcal{F}^2}\right)^{ij} = -(G^{-1})^{ij} + \left(\frac{2}{1-\mathcal{F}^2}\right)^{ij} \ . \tag{4.61}$$

Aus der Symmetrie von G und der Antisymmetrie von $\mathcal{F}$ folgt

$$\left(\frac{1}{1-\mathcal{F}^2}\right)^{ij} = \left(\frac{1}{G+\mathcal{F}}\right)^{ij}_S \quad \text{und} \quad \left(\frac{\mathcal{F}}{1-\mathcal{F}^2}\right)^{ij} = \left(\frac{1}{G+\mathcal{F}}\right)^{ij}_A \ . \tag{4.62}$$

Damit läßt sich (4.60) schreiben wie folgt:

$$\begin{aligned} &\langle\, X^i(z)X^j(z')\,\rangle = \\ &-\alpha'\left[(G^{-1})^{ij}\ln|z-z'| - (G^{-1})^{ij}\ln|z-\bar{z}'| + (\widehat{G}^{-1})^{ij}\ln|z-\bar{z}'|^2 + \theta^{ij}\ln\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'} + D^{ij}\right], \end{aligned} \tag{4.63}$$

wobei

$$\begin{aligned} (\widehat{G}^{-1})^{ij} &= \left(\frac{1}{G+\mathcal{F}}\right)^{ij}_S = \left(\frac{1}{G+\mathcal{F}}\,G\,\frac{1}{G-\mathcal{F}}\right)^{ij} , \\ \widehat{G}_{ij} &= G_{ij} - (\mathcal{F}\,G^{-1}\,\mathcal{F})_{ij} \ , \\ \theta^{ij} &= \left(\frac{1}{G+\mathcal{F}}\right)^{ij}_A = \left(\frac{1}{G+\mathcal{F}}\,\mathcal{F}\,\frac{1}{G-\mathcal{F}}\right)^{ij} \ . \end{aligned} \tag{4.64}$$

Die willkürlich eingeführte Konstante D^{ij} darf von $\mathcal{F}$ abhängen ist jedoch unabhängig von z und z' und kann ansonsten zur Vereinfachung der Rechnungen frei gewählt werden. In [32] wurde mit CFT-Argumenten gezeigt, daß $\widehat{G}$ einer effektiven Metrik für offene Strings entspricht. Die Details sind für diese Arbeit nicht ausschlaggebend und werden deshalb nicht vorgestellt, die Bezeichnung wird übernommen.

Vertexoperatoren für offene Strings werden am Rand der Weltfläche eingefügt. Den dafür relevanten Propagator erhält man, indem man (4.63) auf den Rand der Weltfläche $z = \bar{z}$ beschränkt. Sei $\tau = \text{Re } z$ und $\tau' = \text{Re } z'$. Dann folgt aus (4.63)

$$\langle\, X^i(\tau)X^j(\tau')\,\rangle = -\alpha'(\widehat{G}^{-1})^{ij}\ln(\tau-\tau')^2 + \frac{i}{2}\theta^{ij}\epsilon(\tau-\tau') \ , \tag{4.65}$$

wobei der zweite Term auf der rechten Seite für D^{ij} eingeführt wurde. Der Schnitt des Logarithmus kann in die untere komplexe Halbebene gelegt werden. Die Stufenfunktion $\epsilon(\tau)$ ist +1 oder -1 für positive oder negative τ.

Die Wahl für D^{ij} erklärt sich wie folgt: In CFTen kann man Kommutatoren von Operatoren erhalten, indem man das Verhalten der entsprechenden OPEen für kurze Abstände berechnet und dann Zeitordnung als Operatorordnung interpretiert. Mit dem zeitlichen Parameter τ findet man aus (4.65)

$$[X^i(\tau), X^j(\tau)] = T\{X^i(\tau)X^j(\tau^-) - X^i(\tau)X^j(\tau^+)\} = i\theta^{ij} \ . \tag{4.66}$$

Dabei bezeichnet T die Zeitordnung und $\tau^\pm = \tau \pm \delta\tau$ für $\delta\tau$ positiv. Die Gleichung gilt im Limes $\delta\tau \to 0$. Die $X^i(\tau)$ sind also Koordinaten in einem nichtkommutativen Raum mit nichtkommutativem Parameter θ.

Kapitel 5

$\hat{\mathbb{Z}}_N$ Orbifolds und Nichtkommutativität

In Abschnitt 5.1 wird erläutert, wie sich für Typ II Theorien die asymmetrischen $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Orbifolds aus den symmetrischen $\mathbb{Z}_N$ Orbifolds und faktorisierter T-Dualität in 1-Richtung D_1 ergeben. Dabei zeigt sich, daß die $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Orbifolds zu einer allgemeineren Klasse von asymmetrischen Orbifolds gehören, die schon 1991 in [16] für heterotische Theorien betrachtet wurden. In Abschnitt 5.2 wird der D_1-duale Torus hergeleitet. Das ist genau der Torus, der die asymmetrische $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Symmetrie respektiert. Weiterhin werden für die D_1-dualen Impulse KK- und Windungszahlen hergeleitet. In Abschnitt 5.3 werden asymmetrische Rotationen von D-Branes untersucht. Dabei wird von einer D0-Brane in einer Typ IIA Theorie ausgegangen. Man findet, daß asymmetrische Rotationen in natürlicher Weise zu gemischten Randbedingungen führen, die wiederum typisch für offene Strings sind, die auf D-Branes mit Hintergrundfeldern enden. Diese Identifikation wird explizit hergeleitet. In Abschnitt 5.4 werden die asymmetrischen Rotationen schließlich benutzt, um einige nichtkommutative Eigenschaften direkt nachzurechnen. So findet man z.B. für den Propagator auf der Scheibe Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus Abschnitt 4.6. Weiterhin wird gezeigt, daß sich aus der Berechnung der OPE von Tachyonvertexoperatoren auf dem Rand der Scheibe das nichtkommutative $*$-Produkt ergibt. Im letzten Teil des Abschnitts wird der Kommutator der Koordinatenfelder berechnet, woraus sich einige wichtige Ergebnisse bezüglich der Wirkung von asymmetrischen Rotationen auf heterotische Theorien (Kapitel 6) ableiten lassen.

Der Zusammenhang zwischen asymmetrischen Rotationen und nichtkommutativer Geometrie wurde in [9] gezeigt. Darauf beziehen sich auch die Betrachtungen in diesem Kapitel.

5.1 Strategie

Die Strategie dieses Zugangs ist am besten aus Abbildung 5.1 ersichtlich. Ausgangspunkt ist eine auf T^2 (oder direkten Produkten von T^2) toroidal kompaktifizierte Typ IIA Theorie. Diese ist in der linken oberen Ecke des Diagramms dargestellt. Aufgrund der Betrachtungen in Abschnitt 4.3 können in dieser Theorie Dp-Branes mit p gerade auftreten. Wie in Abschnitt 2.9 gezeigt, gelangt man über faktorisierte T-Dualität (hier D_1) zu einer Typ IIB Theorie, die Dp-Branes mit ungeradem p enthalten kann. Mit einem $\mathbb{Z}_N$ Twist Θ (vergl. Abschnitt 3.4) gelangt man zu einer symmetrischen Typ IIB/$\mathbb{Z}_N$ Orbifold. Erneute faktorisierte T-Dualität (D_1) liefert eine asymmetrische $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Orbifold (vergl. Abschnitt 3.5). Das sieht man wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
\text{Typ IIA} \arrow[r, "D_1"] \arrow[d, "\hat{\Theta}"'] & \text{Typ IIB} \arrow[d, "\Theta"] \\
\text{Typ IIA}/\hat{\mathbb{Z}}_N \arrow[r, "D_1"'] & \text{Typ IIB}/\mathbb{Z}_N
\end{tikzcd}$$

Abbildung 5.1: Kommutierendes Diagramm zur Konstruktion von asymmetrischen Orbifolds.

Es ist wiederum sinnvoll zu komplexen Koordinatenfeldern $Z_{L/R} = X^1_{L/R} + iX^2_{L/R}$ auf T^2 überzugehen. Die faktorisierte T-Dualität D_1 wirkt auf die Felder $Z_{L/R}$ nach (2.9) gemäß

$$D_1 : (Z_L, Z_R) \to (Z_L, -\bar{Z}_R) \; . \tag{5.1}$$

Ein symmetrischer $\mathbb{Z}_N$-Twist Θ wirkt auf (Z_L, Z_R) gemäß (3.2) und (3.22) wie folgt:

$$\Theta : (Z_L, Z_R) \to (e^{i\theta} Z_L, e^{i\theta} Z_R) \; . \tag{5.2}$$

Dabei wurde $\theta = 2\pi\phi$ gesetzt. Daraus folgt mit $D_1^{-1} = D_1$ für $\hat{\Theta}$

$$\hat{\Theta} = D_1 \Theta D_1^{-1} : (Z_L, Z_R) \to (e^{i\theta} Z_L, e^{-i\theta} Z_R) \; . \tag{5.3}$$

Man gelangt also zu einer asymmetrischen $\hat{\mathbb{Z}}_N$-Orbifold (3.28). $\hat{\mathbb{Z}}_N$ und $\mathbb{Z}_N$ Orbifolds sind durch faktorisierte T-Dualität in 1-Richtung D_1 verbunden. $\hat{\Theta}$ agiert auf dem D_1-dualen Torus $\hat{T}^2$ (vergleiche Abschnitt 5.2). Das Diagramm kommutiert.

Damit gehört die $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Orbifold zu einer schon 1991 in [16] betrachteten, allgemeineren Klasse von asymmetrischen Orbifolds. Dort wurden anstatt D_1 beliebige Transformation der T-Dualitäts-Gruppe zugelassen.

Um diese asymmetrischen Orbifolds zu untersuchen, ist es für einige Anwendungen besser direkt den asymmetrischen Twist durchzuführen, für andere jedoch das Diagramm zu „umlaufen“.

5.2 Der D_1-duale Torus

Der Torus T^2 sei durch die beiden Vektoren

$$e_1 = R_1 \quad \text{und} \quad e_2 = R_2 \, e^{i\alpha} \tag{5.4}$$

definiert. Das enspricht einer Metrik

$$G = \begin{pmatrix} R_1^2 & R_1 R_2 \cos\alpha \\ R_1 R_2 \cos\alpha & R_2^2 \end{pmatrix} \; . \tag{5.5}$$

Das antisymmetrische Hintergrundfeld sei durch $B_{ij} = b \, \epsilon_{ij}$ gegeben. Damit folgt für komplexe und *Kähler*-Struktur aus (2.56)

$$U = \frac{R_2}{R_1} e^{i\alpha} \; , \quad T = b + iR_1 R_2 \sin\alpha \; . \tag{5.6}$$

Dabei wurde in (2.56) o.B.d.A. $R=\sqrt{\alpha'}$ gesetzt, weil in der Definition von e_1 und e_2 die Kompaktifizierungsradien explizit angegeben sind. Die links- und rechtslaufenden dimensionslosen Nullmodenimpulse $l_{L/R}$ sind durch (2.57) gegeben. Gemäß (2.59) vertauscht D_1 komplexe und *Kähler*-Struktur. Nach D_1-Dualität gilt für komplexe und *Kähler*-Struktur also

$$\hat{U}\equiv\hat{U}_1+i\hat{U}_2=T \quad \text{und} \quad \hat{T}\equiv\hat{b}+i\hat{T}_2=U\ . \tag{5.7}$$

Daraus erhält man den D_1-dualen Torus. Er ist definiert über

$$\hat{e}_1=\frac{1}{R_1}\ ,\quad \hat{e}_2=\frac{b}{R_1}+iR_2\sin\alpha \tag{5.8}$$

mit dem antisymmetrischen Hintergrundfeld

$$\hat{b}=\frac{R_2}{R_1}\cos\alpha\ . \tag{5.9}$$

Mit Hilfe von (5.7) lassen sich die Nullmodenimpulse in Abhängigkeit von D_1-dualer komplexer und *Kähler*-Struktur schreiben. Es folgt:

$$\begin{aligned} l_L &= -\frac{1}{i\sqrt{2\hat{U}_2\hat{T}_2}}\left[\hat{U}w^1+n_2-\bar{\hat{T}}(n_1-\hat{U}w^2)\right] \\ l_R &= -\frac{1}{i\sqrt{2\hat{U}_2\hat{T}_2}}\left[\hat{U}w^1+n_2-\hat{T}(n_1-\hat{U}w^2)\right]\ . \end{aligned} \tag{5.10}$$

Die Impulse $\hat{l}_{L/R}$ sind durch das Analogon von (2.57) gegeben (n, w, U und T „gehutet"). Mit $\hat{l}_{L/R}=l_{L/R}$ (das Spektrum bleibt invariant) findet man durch Vergleich für KK- und Windungszahlen

$$\hat{n}_1=-w^1\ ,\quad \hat{n}_2=n_2\ ,\quad \hat{w}^1=-n_1 \quad \hat{w}^2=w^2\ , \tag{5.11}$$

wie erwartet, denn gemäß Abschnitt 2.7.3 werden durch D_1 nur in 1-Richtung KK- und Windungszahl vertauscht, in 2-Richtung bleiben die entsprechenden Größen invariant. Die obige Rechnung fixiert die Vorzeichen in (5.11), welche von der Wahl der komplexen Struktur abhängen.

Wenn nun das *Narain*-Gitter zu T^2 invariant unter der $\mathbb{Z}_N$-Symmetrie ist, gilt dies auch für das *Narain*-Gitter zu $\hat{T}^2$ bzgl. der $\hat{\mathbb{Z}}_N$-Symmetrie.

5.3 Asymmetrische Rotationen von D-Branes

In diesem Abschnitt wird untersucht, welchen Einfluß der asymmetrische Twist auf D-Branes hat. Um eine diskrete Symmetrie aus einer gegebenen Theorie ausmodden zu können, muß die Theorie diese Symmetrien reflektieren. Das impliziert, daß auch die D-Branes der Symmetrie entsprechend angeordnet werden müssen. Im Folgenden soll betrachtet werden, wie sich eine D0-Brane unter asymmetrischen Twists verhält. Nach (5.3) gilt für die asymmetrisch rotierten Koordinatenfelder[1]

$$\begin{pmatrix} X^{(3)}_{1,L} \\ X^{(3)}_{2,L}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{\equiv A}\begin{pmatrix}X_{1,L}\\ X_{2,L}\end{pmatrix}\ ,\quad \begin{pmatrix} X^{(3)}_{1,R} \\ X^{(3)}_{2,R}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{=A^T=A^{-1}}\begin{pmatrix}X_{1,R}\\ X_{2,R}\end{pmatrix}\ . \tag{5.12}$$

[1]Der obere eingeklammerte Index der Koordinatenfelder dient zur Unterscheidung, in welcher Theorie die entsprechenden Felder „leben". Er bezieht sich auf das Diagramm in Abbildung 5.1. Kein Index $\hat{=}$ links oben; (1) $\hat{=}$ rechts oben; (2) $\hat{=}$ rechts unten; (3) $\hat{=}$ links unten.

Dabei sind die θ aufrund der Orbifold-Konstruktion diskret. Diese Gleichungen gelten jedoch auch für den Fall einer unkompaktifizierten Theorie. Dann können die θ kontinuierliche Werte annehmen, die A und A^T beschreiben asymmetrische Rotationen. Nun wird das kommutierende Diagramm aus Abbildung 5.1 „umlaufen". Die D0-Brane besitzt *Dirichlet*-Randbedingungen. Wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, werden unter faktorisierter T-Dualität *Dirichlet*- und *Neumann*-Randbedingungen vertauscht. Die D0-Brane der Typ IIA Theorie wird also unter D_1 zu einer in 1-Richtung ausgedehnten D1-Brane der Typ IIB Theorie. Damit sind die offenen Strings in 1-Richtung vom *Neumann*-Typ, die in 2-Richtung vom *Dirichlet*-Typ:

$$\partial_\sigma X_1^{(1)} = 0 \,, \quad \partial_\tau X_2^{(1)} = 0 \,. \tag{5.13}$$

Die symmetrische Rotation dreht die D1-Brane um den Winkel θ in der 1-2 Ebene. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

Damit folgt aus (5.13) für die Randbedingungen in der D_1-dualen und dann symmetrisch getwisteten Theorie

$$\begin{aligned} \partial_\sigma X_1^{(2)} + \tan\theta \, \partial_\sigma X_2^{(2)} &= 0 \,, \\ \partial_\tau X_2^{(2)} - \tan\theta \, \partial_\tau X_1^{(2)} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

In Abhängigkeit vom Winkel θ, um den die D1-Brane in der 1-2 Ebene gedreht wird, können zwei mögliche Fälle auftreten:

(A) Die D1-Brane trifft auf einen Gitterpunkt und schließt aufgrund der periodischen Identifizierung damit in sich selbst. Sie ist auf dem Torus aufgewickelt. Für diesen Fall spricht man von „rationalen" D-Branes.

(B) Die D1-Brane trifft nie auf einen Gitterpunkt und bedeckt damit dicht den gesamten Torus.

In [5] ist gezeigt worden, daß nur für den Fall (A) weiterhin quantisierte KK- und Windungs-Impulse existieren. Die Interpretation von (B) ist nicht klar. Für die Betrachtungen dieses Abschnitts spielt es keine Rolle, ob die D-Brane rational ist oder nicht[2].

Umläuft die D1-Brane den Torus nun gemäß (A) n mal in e_1- und m mal in e_2-Richtung bevor sie auf einen Gitterpunkt trifft, gilt

$$\cot\theta = \cot\alpha + \frac{n}{mU_2} \,. \tag{5.16}$$

Diese Relation kann man aus Abbildung 5.2 entnehmen, wo eine solche Situation für $n = 2$ und $m = 1$ exemplarisch dargestellt ist. Der Sinussatz liefert $\sin(\alpha - \theta)/\sin\theta = (nR_1)/(mR_2)$. Mit $U_2 = (R_2/R_1)\sin\alpha$ folgt (5.16).

[2] In [32] wurde gezeigt, daß für den Fall rationaler D-Branes immer eine T-Dualitätstransformation existiert, die einen nichtkommutativen in einen kommutativen Torus überführt. Dieser Beweis beruht allerdings auf einer speziellen $\alpha' \to 0$-Näherung, die geschlossene und offene Strings entkoppelt. Da in dieser Diplomarbeit letztendlich geklärt werden soll, ob Nichtkommutativitäten auch in heterotischen Theorien auftreten können und diese keinen offenen Sektor besitzen, ist diese Näherung hier ohne Bedeutung.

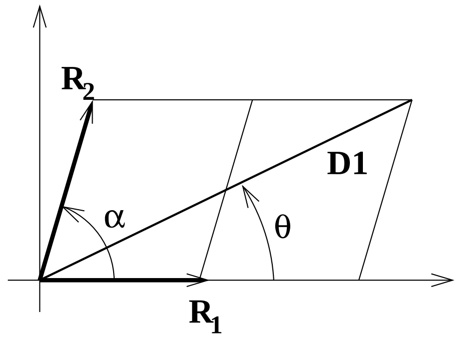

Abbildung 5.2: Rotierte D1-Brane, die zweimal e_1 und einmal e_2 umläuft, bevor sie in sich selbst schließt.

Über faktorisierte T-Dualität in 1-Richtung D_1 gelangt man zur $\hat{\mathbb{Z}}_N$-Orbifold. Mit der Vertauschung von *Dirichlet*- und *Neumann*-Randbedingungen (4.30) folgt aus (5.15)

$$\begin{aligned} \partial_\sigma X_1^{(3)} + \cot\theta\, \partial_\tau X_2^{(3)} &= 0\,, \\ \partial_\sigma X_2^{(3)} - \cot\theta\, \partial_\tau X_1^{(3)} &= 0\,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Der asymmetrisch Twist hat also den Effekt, daß reine *Dirichlet*-Randbedingungen in gemischte Randbedingungen überführt werden. In diesem konkreten Fall ist eine D0-Brane zu einer D2-Brane geworden. Dieser Weg läßt sich allerdings kanonisch verallgemeinern. So hätte man z.B. auch mit *Neumann*-Randbedingungen starten können.

In Abschnitt 4.6 wurde gezeigt, daß gemischte Randbedingungen auftreten, falls offene Strings an D-Branes mit Hintergrundfeldern A^D und/oder B^D koppeln[3]. Sei $F_{ij}^D = \epsilon_{ij} f^D$, $B_{ij}^D = \epsilon_{ij} b^D$ und $\mathcal{F}_{ij}^D = \epsilon_{ij} \mathcal{F}^D$. Dann folgt aus (4.58)

$$\begin{aligned} \partial_\sigma X_1^{(3)} - \mathcal{F}^D \partial_\tau X_2^{(3)} &= 0\,, \\ \partial_\sigma X_2^{(3)} + \mathcal{F}^D \partial_\tau X_1^{(3)} &= 0\,. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Vergleich von (5.17) und (5.18) liefert

$$-\cot\theta = \mathcal{F}^D = b^D + 2\pi\alpha' f^D \tag{5.19}$$

und damit

$$\mathcal{F}^D = B^D + 2\pi\alpha' F^D = \begin{pmatrix} 0 & \cot\theta \\ -\cot\theta & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{5.20}$$

Es besteht also ein Zusammenhang zwischen den asymmetrischen $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Orbifolds und D-Branes mit Hintergrundfeldern. Die Betrachtungen in Abschnitt 4.2 haben gezeigt, daß Typ II Theorien mit D-Branes automatisch offene Strings enthalten. Das Argument dafür war T-Dualität. Nach den Betrachtungen in diesem Abschnitt wird das D-Brane-Bild um eine Komponente reicher. Auf asymmetrische Operationen reagiert der offene Sektor der Theorie dadurch, daß auf den D-Branes Hintergrundfelder „eingeschaltet“ werden. T-Dualität spielt dabei wiederum eine große Rolle.

[3]Hintergrundfelder auf der D-Brane werden hier zur besseren Unterscheidung mit einem Index D gekennzeichnet.

5.4 Der Zusammenhang mit nichtkommutativer Geometrie

In Abschnitt 4.6 wurde gezeigt, daß gemischte Randbedingungen zu Nichtkommutativitäten führen und im letzten Abschnitt, daß asymmetrische Rotationen gemischte Randbedingungen implizieren. Es stellt sich nun die Frage, ob man mit Hilfe von asymmetrischen Rotationen direkt nichtkommutative Eigenschaften herleiten kann. Dies ist in der Tat der Fall. In den folgenden Abschnitten werden einige Beispiele gezeigt.

Die Anwendungen dieser Konstruktion ist damit jedoch nicht erschöpft. Wie in [9] gezeigt wurde, kann man auch asymmetrische Orientifolds und damit letztlich Typ I Vakua konstruieren. Beispiele dafür können z.B. in [8, 7, 3, 10] und [17] gefunden werden. Auf diese sehr interessanten Aspekte kann im Rahmen dieser Diplomarbeit jedoch nicht eingegangen werden.

5.4.1 Propagator auf der Scheibe

Im Folgenden wird mit Hilfe der asymmetrischen Roatationen der Propagator auf der Scheibe untersucht und anschließend mit dem Ergebnis von Abschnitt 4.6 verglichen. Die Koordinatenfelder X_i beschreiben offene Strings, die auf D0-Branes enden. Die Strings haben also *Dirichlet*-Randbedingungen. Der Einfachheit halber sei der Raum flach, also $G_{ij} = \delta_{ij}$. Der Propagator auf der Scheibe für *Dirichlet*-Randbedingungen lautet

$$\langle\, X_i(z)X_j(z')\,\rangle = -\alpha'\delta_{ij}(\ln|z-z'| - \ln|z-\bar{z}'|)\ . \tag{5.21}$$

Nun kann man $\langle\, X_i(z)X_j(z')\,\rangle$ formal mit Hilfe von $X_i(z) = X_{Li}(z) + X_{Ri}(\bar{z})$ zerlegen. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\langle\, X_i(z)X_j(z')\,\rangle &= \langle\, X_{Li}(z)X_{Lj}(z')\,\rangle + \langle\, X_{Ri}(\bar{z})X_{Rj}(\bar{z}')\,\rangle + \\ &\quad + \langle\, X_{Li}(z)X_{Rj}(\bar{z}')\,\rangle + \langle\, X_{Ri}(\bar{z})X_{Lj}(z')\,\rangle\ .\end{aligned} \tag{5.22}$$

Die Zerlegung der Logarithmen aus (5.21) liefert

$$\ln|z-z'| - \ln|z-\bar{z}'| = \tfrac{1}{2}[\,\ln(z-z') + \ln(\bar{z}-\bar{z}') - \ln(z-\bar{z}') - \ln(\bar{z}-z')\,]\ . \tag{5.23}$$

Mit Hilfe dieser Zerlegungen können die einzelnen Beiträge aus (5.21) anhand der Abhängigkeiten von z, z', $\bar{z}$ und $\bar{z}'$ identifiziert werden. Es gilt

$$\begin{aligned}&\langle\, X_{Li}(z)X_{Lj}(z')\,\rangle = -\tfrac{\alpha'}{2}\delta_{ij}\ln(z-z') &&\langle\, X_{Ri}(\bar{z})X_{Rj}(\bar{z}')\,\rangle = -\tfrac{\alpha'}{2}\delta_{ij}\ln(\bar{z}-\bar{z}') \\ &\langle\, X_{Li}(z)X_{Rj}(\bar{z}')\,\rangle = -\tfrac{\alpha'}{2}\delta_{ij}\ln(z-\bar{z}') &&\langle\, X_{Ri}(\bar{z})X_{Lj}(z')\,\rangle = -\tfrac{\alpha'}{2}\delta_{ij}\ln(\bar{z}-z')\end{aligned} \tag{5.24}$$

Wegen (5.12) wirkt die asymmetrische Rotation gemäß

$$X_L \to X_L^{(3)} = AX_L\ , \quad X_R \to X_R^{(3)} = A^T X_R\ , \tag{5.25}$$

mit $A \in \mathrm{SO}(2)$ und damit $AA^T = \mathbb{1}$. Weiterhin gilt

$$(A^2)_{ij} = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\delta_{ij} + 2\cos\theta\,\sin\theta\epsilon_{ij}\ . \tag{5.26}$$

Damit erhält man die entsprechenden Ausdrücke von (5.24) für $X^{(3)}$ und letztlich für den asymmetrisch rotierten Propagator auf der Scheibe (die Indizes (3) sind hier der Übersichtlichkeit wegen weggelassen):

$$\begin{aligned}\langle\, X_i(z)X_j(z')\,\rangle &= -\alpha'\delta_{ij}\ln|z-z'| - \alpha'\delta_{ij}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,\ln|z-\bar{z}'| + \\ &\quad +\alpha'\epsilon_{ij}\sin\theta\,\cos\theta\,\ln\left(\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'}\right)\ .\end{aligned} \tag{5.27}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis und (4.60), so sind beide mit der Identifizierung (5.20) identisch. Es ist also möglich den Propagator auf der Scheibe direkt durch asymmetrische Rotationen zu bestimmen, ohne dabei explizit auf die Randbedingungen oder Hintergrundfelder auf der D-Brane Bezug zu nehmen.

Desweiteren erkennt man, daß die kommutativen D0-Branes mit den nichtkommutativen D2-Branes durch eine glatte Abbildung miteinander verbunden sind. Diese Tatsache überträgt sich auf die effektiven Theorien, wo eine solche Abbildung in [32] gefunden wurde. Dort wurde auch ein Regularisierungsschema benutzt, sogenanntes „Point splitting", mit dem man direkt nichtkommutative effektive Theorien erhält. In [2] wurde schließlich ein Hybrid-Regularisierungsschema vorgesschlagen, das die verschiedenen Möglichkeiten der Regularisierung durch einen Parameter glatt verbindet. Diese Zusammenhänge sind also sowohl in den Stringtheorien als auch den effektiven Theorien bis hin zu den Regularisierungsschemata zu finden und liefern damit starke Symmetrien für alle Bereiche.

5.4.2 Die OPE von Vertexoperatoren

Da die OPEen von Tachyonvertexoperatoren direkt mit der nichtkommutativen assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ (vergleiche Abschnitt 4.5) verknüpft sind[4], ist es interessant asymmetrisch rotierte OPEen von Tachyonvertexoperatoren zu untersuchen.

Der Tachyonvertexoperator ist gegeben durch $\mathcal{O}(z) = e^{ipX}(z)$, wobei p der kanonische Impuls ist. Die OPE zweier solcher Vertexoperatoren auf einem *Dirichlet*-Rand liefert in erster divergenter Näherung ($\sim$) mit $|z| > |z'|$:

$$: e^{ipX}(z) :: e^{iqX}(z') \quad \sim \quad \frac{(z-z')^{\frac{\alpha'}{2}p_{\mathrm{L}}q_{\mathrm{L}}}(\bar{z}-\bar{z}')^{\frac{\alpha'}{2}p_{\mathrm{R}}q_{\mathrm{R}}}}{(z-\bar{z}')^{\frac{\alpha'}{2}p_{\mathrm{L}}q_{\mathrm{R}}}(\bar{z}-z')^{\frac{\alpha'}{2}p_{\mathrm{R}}q_{\mathrm{L}}}} : e^{i(p+q)X}(z') : + \dots \tag{5.28}$$

Dabei ist zu beachten, daß aufgrund der nichtkommutativen Struktur die Reihenfolge von links- und rechtslaufenden Beiträgen nicht vertauscht werden darf.

Wie schon beim Propagator, wird jetzt die asymmetrische Rotation angewendet, also

$$p_{\mathrm{L}} \to Ap_{\mathrm{L}} \,, \quad p_{\mathrm{R}} \to A^T p_{\mathrm{R}} \,, \tag{5.29}$$

$$q_{\mathrm{L}} \to Aq_{\mathrm{L}} \,, \quad q_{\mathrm{R}} \to A^T q_{\mathrm{R}} \,. \tag{5.30}$$

Weil offene Strings betrachtet werden, identifiziert man gemäß $p_{\mathrm{L}} = p_{\mathrm{R}} \equiv p$ und $q_{\mathrm{L}} = q_{\mathrm{R}} \equiv q$. Damit folgt

$$: e^{ipX}(z) :: e^{iqX}(z') \quad \sim \quad \frac{[(z-z')(\bar{z}-\bar{z}')]^{\frac{\alpha'}{2}pq}}{[(z-\bar{z}')(\bar{z}-z')]^{\frac{\alpha'}{2}\cos(2\theta)pq}} \left(\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'}\right)^{-\frac{\alpha'}{2}\epsilon_{ij}p_i q_j \sin(2\theta)} : e^{i(p+q)X}(z') : + \dots \tag{5.31}$$

Da die Vertexoperatoren auf dem Rand der Weltfläche eingesetzt werden, der wie in Abschnitt 4.6 durch $z = \bar{z}$ definiert ist, folgt mit Re $z = \tau$ und Re $z' = \tau'$ aus (5.31):

$$: e^{ipX}(\tau) :: e^{iqX}(\tau') := (\tau-\tau')^{\alpha' pq(1+\sin^2\theta-\cos^2\theta)} \exp(-i\pi\alpha' \sin\theta\cos\theta\epsilon_{ij}p_i q_j) : e^{i(p+q)X}(\tau') : + \dots \,. \tag{5.32}$$

[4]Der genaue Zusammenhang ist z.B. in [32] zu finden. Die Details sind schwierig. An dieser Stelle soll nur gezeigt werden, wie asymmetrische Operationen zu nichtkommutativen Eigenschaften führen.

Der Schnitt des Logarithmus wurde, wie in Abschnitt 4.6, in die untere komplexe Halbebene gelegt.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit (4.50), findet man

$$:e^{ipX}(\tau) :: e^{iqX}(\tau') : \sim \quad e^{ipX} * e^{iqX}(\tau') \tag{5.33}$$

wobei der nichtkommutative Parameter θ_{ij} durch

$$\theta_{ij} = 2\pi\alpha' \sin\theta \, \cos\theta \epsilon_{ij} \tag{5.34}$$

gegeben ist.
Asymmetrische Rotationen führen also via OPEen zum $*$-Produkt der nichtkommutativen Algebra $\mathcal{A}$.

5.4.3 Der Kommutator der Koordinatenfelder

Zum Abschluß dieses Kapitels wird der Kommutator der Koordinatenfelder betrachtet. Die Ergebnisse sind für Kapitel 6 wichtig .

Dazu werden die bosonischen Koordinatenfelder eines offenen Strings quantisiert, dessen Enden auf je einer D0-Brane liegen. In der D_1-dualen und dann getwisteten Beschreibung erhält man also zwei D1-Branes, die in der 1-2 Ebene um verschiedene Winkel θ_1 und θ_2 gedreht sind. Diese Situation ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Die Branes schließen einen

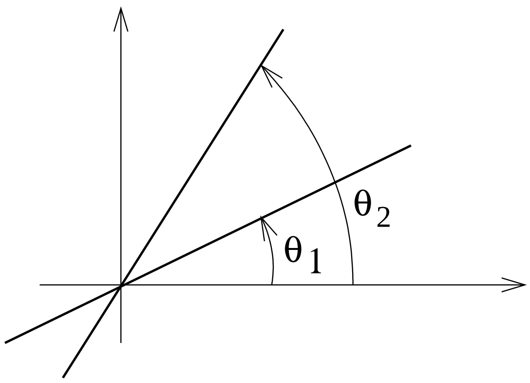

Abbildung 5.3: Zwei D1-Branes, die einen Winkel $(\theta_2 - \theta_1)$ einschließen.

Winkel $(\theta_2 - \theta_1)$ ein. Damit ergibt sich für einen offenen String, der von der einen zur anderen D1-Brane läuft, am Ende $\sigma = 0$ aus (5.15) die Randbedingung

$$\partial_\sigma X_1^{(2)} + \tan\theta_1 \, \partial_\sigma X_2^{(2)} = 0 \ , \tag{5.35}$$
$$\partial_\tau X_2^{(2)} - \tan\theta_1 \, \partial_\tau X_2^{(2)} = 0 \tag{5.36}$$

und analog für das Ende $\sigma = \pi$

$$\partial_\sigma X_1^{(2)} + \tan\theta_2 \, \partial_\sigma X_2^{(2)} = 0 \ , \tag{5.37}$$
$$\partial_\tau X_2^{(2)} - \tan\theta_2 \, \partial_\tau X_2^{(2)} = 0 \ . \tag{5.38}$$

Die Oszillatorentwicklung des offenen Strings, die beide Randbedingungen erfüllt, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
X_1^{(2)} &= x_1^{(2)} + i\sqrt{\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_{n+\nu}}{n+\nu}e^{-i(n+\nu)\tau}\cos[(n+\nu)\sigma+\theta_1] + \\
&\quad + i\sqrt{\alpha'}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_{m-\nu}}{m-\nu}e^{-i(m-\nu)\tau}\cos[(m-\nu)\sigma-\theta_1]\ , \\
X_2^{(2)} &= x_2^{(2)} + i\sqrt{\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_{n+\nu}}{n+\nu}e^{-i(n+\nu)\tau}\sin[(n+\nu)\sigma+\theta_1] + \\
&\quad + i\sqrt{\alpha'}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_{m-\nu}}{m-\nu}e^{-i(m-\nu)\tau}\sin[(m-\nu)\sigma-\theta_1]\ ,
\end{aligned}$$

wobei $\nu = (\theta_2 - \theta_1)/\pi$ gesetzt wurde. Mit

$$[\alpha_{n+\nu}, \alpha_{m-\nu}] = (n+\nu)\delta_{m+n,0} \tag{5.39}$$

und dem Verschwinden des Kommutators der Schwerpunktkoordinaten $[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}] = 0$ findet man für den Kommutator bei gleichen „Zeiten“ ($\tau = \tau'$)

$$[X_i^{(2)}(\tau,\sigma), X_j^{(2)}(\tau,\sigma')] = 0\ . \tag{5.40}$$

Die Geometrie kommutiert. D_1-Dualität und symmetrische Rotationen alleine reichen also nicht aus, um eine nichtkommutative Struktur zu erzeugen.
Eine weitere D_1-Dualität führt gemäß (5.17) für $\sigma = 0$ zu den Randbedingungen

$$\partial_\sigma X_1^{(3)} + \cot\theta_1\,\partial_\tau X_2^{(3)} = 0\ , \tag{5.41}$$
$$\partial_\sigma X_2^{(3)} - \cot\theta_1\,\partial_\tau X_1^{(3)} = 0 \tag{5.42}$$

und für $\sigma = \pi$ zu

$$\partial_\sigma X_1^{(3)} + \cot\theta_2\,\partial_\tau X_2^{(3)} = 0\ , \tag{5.43}$$
$$\partial_\sigma X_2^{(3)} - \cot\theta_2\,\partial_\tau X_2^{(3)} = 0\ . \tag{5.44}$$

Für diese Randbedingungen findet man die Oszillatorentwicklung

$$\begin{aligned}
X_1^{(3)} &= x_1^{(3)} - \sqrt{\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_{n+\nu}}{n+\nu}e^{-i(n+\nu)\tau}\sin[(n+\nu)\sigma+\theta_1] - \\
&\quad - \sqrt{\alpha'}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_{m-\nu}}{m-\nu}e^{-i(m-\nu)\tau}\sin[(m-\nu)\sigma-\theta_1]\ , \\
X_2^{(3)} &= x_2^{(3)} + i\sqrt{\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_{n+\nu}}{n+\nu}e^{-i(n+\nu)\tau}\sin[(n+\nu)\sigma+\theta_1] - \\
&\quad - i\sqrt{\alpha'}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_{m-\nu}}{m-\nu}e^{-i(m-\nu)\tau}\sin[(m-\nu)\sigma-\theta_1]\ .
\end{aligned}$$

Damit folgt für den Kommutator

$$[X_1^{(3)}(\tau,\sigma), X_2^{(3)}(\tau,\sigma')] = [x_1^{(3)}, x_2^{(3)}] + i\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{2\alpha'}{n+\nu}\sin[(n+\nu)\sigma+\theta_1]\sin[(n+\nu)\sigma'+\theta_1]\ . \tag{5.45}$$

Die Berechnung der Summe ist relativ umfangreich. In dieser Arbeit soll nur das Ergebnis angegeben werden. Details sind in [11, 12] ausgeführt. Es gilt:

$$i\sum_{n\in\mathbb{Z}}\cdots = \begin{cases} \left(\frac{2\pi i\alpha'}{\mathcal{F}_1^D-\mathcal{F}_2^D}\right)\left(\frac{\mathcal{F}_1^D\mathcal{F}_2^D+1}{(\mathcal{F}_1^D)^2+1}\right) & \text{für} \quad \sigma=\sigma'=0 \\ \left(\frac{2\pi i\alpha'}{\mathcal{F}_1^D-\mathcal{F}_2^D}\right)\left(\frac{\mathcal{F}_1^D\mathcal{F}_2^D+1}{(\mathcal{F}_2^D)^2+1}\right) & \text{für} \quad \sigma=\sigma'=\pi \\ \left(\frac{2\pi i\alpha'}{\mathcal{F}_1^D-\mathcal{F}_2^D}\right) & \text{sonst} \end{cases} . \tag{5.46}$$

Für $\mathcal{F}_1^D = \mathcal{F}_2^D$ sind alle Terme singulär, aber gleich. Mittels kanonischer Quantisierung findet man für die Schwerpunktkoordinaten

$$[x_1^{(3)}, x_2^{(3)}] = -\frac{2\pi i\alpha'}{\mathcal{F}_1^D - \mathcal{F}_2^D} \tag{5.47}$$

und damit schließlich den endgültigen Ausdruck für den Kommutator der Koordinatenfelder (5.45):

$$[X_1^{(3)}(\tau,\sigma), X_2^{(3)}(\tau,\sigma')] = \begin{cases} -2\pi i\alpha'\left(\frac{\mathcal{F}_1^D}{(\mathcal{F}_1^D)^2+1}\right) & \text{für} \quad \sigma=\sigma'=0 \\ +2\pi i\alpha'\left(\frac{\mathcal{F}_2^D}{(\mathcal{F}_2^D)^2+1}\right) & \text{für} \quad \sigma=\sigma'=\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{5.48}$$

An diesem wichtigen Ergebnis kann man erkennen, daß die Koordinatenfelder nur auf dem Rand der Weltfläche, also auf den D-Branes nicht kommutieren. Desweiteren hängt der Kommutator ausschließlich von den Eichfeldern der D-Brane ab, auf der sich auch das Ende des Strings befindet. Nichtkommutativität ist also eine lokale Eigenschaft von D-Branes.

Liegen beide Enden des Strings auf ein und derselben D-Brane, gilt $\theta_1 = \theta_2$ und $\mathcal{F}_1^D = \mathcal{F}_2^D$. Sowohl der Kommutator der Schwerpunktkoordinaten (5.47), als auch die Summen (5.46) werden singulär. Da aber die Summen (5.46) in diesem Fall identisch sind, muß dies auch für die Terme in (5.48) gelten. Daraus folgt, daß die Koordinatenfelder $X_1^{(3)}$ und $X_2^{(3)}$ dann und nur dann auf den D-Branes kommutieren, wenn

$$F_1^D = F_2^D = 0 \tag{5.49}$$

ist. Diese Aussage ist wegen (5.16) äquivalent zu der Aussage, daß für die Rotationswinkel

$$\theta_1 = \theta_2 \in \{0, \pi/2\} \tag{5.50}$$

gilt. Diese Winkel entsprechen wiederum reinen *Dirichlet*- bzw. *Neumann*-Randbedingungen. In allen anderen Fällen leben die Enden der Strings in einer nichtkommutativen Raumzeit.

Kapitel 6

Nichtkommutativität bei heterotischen Strings?

In diesem Kapitel soll untersucht werden inwiefern es möglich ist nichtkommutative Geometrie auch in heterotischen Stringtheorien zu finden. Heterotische Stringtheorien besitzen keine offenen Strings und somit keine D-Branes. Trotzdem ergeben sich einige mögliche Hinweise, die hier betrachtet werden sollen. In Abschnitt 6.1 wird auf eine Koinzidenz bezüglich simultan T-dualisierter Hintergrundfelder und dem Propagator für offene Strings auf dem Rand der Scheibe hingewiesen. In Abschnitt 6.2 wird untersucht, ob sich mit Hilfe der asymmetrischen Orbifolds aus Kapitel 5 Hinweise auf nichtkommutative Geometrie in den heterotischen Theorien finden lassen. Dazu werden die masselosen Spektren einer symmetrischen und einer asymmetrischen heterotischen Orbifold vorgestellt und verglichen. Abschließend wird der asymmetrisch rotierte heterotische Propagtor berechnet und diskutiert.

6.1 Simultane T-Dualität und der nichtkommutative Parameter θ_{ij}

Betrachtet man den Propagator auf der Scheibe für offene Strings und die dort definierte offene Stringmetrik sowie den nichtkommutativen Parameter (4.64), so stellt man eine erstaunliche Koinzidenz fest. Für das Fehlen von U(1) Eichfeldern und damit $\mathcal{F} = B$ erkennt man, daß die Gleichungen (4.64) genauso aussehen wie (2.53) und (2.54). Demnach entspricht die via simultane T-Dualität transformierte Metrik G' der effektiven Metrik $\widehat{G}$ für offene Strings und das via simultane T-Dualität transformierte antisymmetrische Hintergrundfeld B' dem nichtkommutativen Parameter θ.

Diese Konizidenz ist allerdings kein Hinweis auf Nichtkommutativität in heterotischen Theorien, sondern vielmehr Folge der Konstruktion von Propagatoren. Den Propagator geschlossener Strings erhält man kanonisch aus der Variation der Wirkung. Er ist gegeben durch

$$\langle\, X^i(z)X^j(z')\,\rangle = -\alpha' \left(\frac{1}{G+B}\right)^{ij} \ln|z-z'|^2 \ . \tag{6.1}$$

Die Aufspaltung von $1/(G+B)$ in symmetrischen und antisymmetrischen Anteil liefert (2.53) und (2.54). Für das Auftreten dieser Terme sowohl im Propagator geschlossener Strings als auch bei simultaner T-Dualität existiert möglicherweise ein Zusammenhang. Hinweise könnten sich daraus ergeben, daß für bestimmte Hintergrundkonfigurationen (wie z.B. beim ($k=2$)-Fall in Abschnitt 2.8) eine Trialität zwischen den Generatoren der $\mathrm{O}(k,k,\mathbb{Z})$ und denen der modularen Weltflächentransformationen besteht (siehe z.B. [19]). Diese Trialität gilt allerdings nur für sehr spezifische Hintergründe und innerhalb von Theorien geschlossener Strings. Sie kann also keine Verbindung zu offenen Strings herstellen. Deshalb wird hier auf eine genauere Untersuchung verzichtet.

Vergleicht man nun den Propagator (6.1) mit dem eines offenen Strings (4.63), so erkennt man, daß letzterer mit dem symmetrischen Anteil von (6.1) übereinstimmt[1]. Der symmetrische Anteil ist gerade durch (2.53) gegeben. Interessanter ist nun der antisymmetrische Anteil (2.53). Dieser Anteil tritt im Propagator auf der Scheibe als Koeffizient von $\ln|z-z'|$ überhaupt nicht auf. Der Grund dafür ist, daß bei der Berechnung eines Kommutators wie bei (4.66) der antisymmetrische Anteil einfach wegfallen würde. Der nichtkommutative Parameter θ ergibt sich in (4.63) nur aufgrund der Spiegelterme, die wegen der Weltflächenränder von offenen Strings in den Propagator einfließen. Im heterotischen Propagator existieren keine solchen Spiegelterme und damit kann auch das simultan T-dualisierte B'-Feld nicht an die Stelle des nichtkommutativen Parameters treten. Die beiden Terme können also nicht miteinander identifiziert werden. Die Koinzidenz ist somit kein Hinweis auf nichtkommutative Geometrie in heterotischen Stringtheorien.

6.2 Asymmetrische heterotische Orbifolds

Es stellt sich nun die Frage, ob man vielleicht mit Hilfe der asymmetrischen $\hat{\mathbb{Z}}_N$ Twists neue Einblicke in die heterotischen Theorien gewinnen kann. In Abschnitt 3.5 wurde gezeigt, daß man für jede konsistente $\mathbb{Z}_N$ Orbifold auch eine entsprechende asymmetrische Orbifold konstruieren kann. Diese Modelle sind also prinzipiell mit heterotischen Strings kompatibel. Dazu sei bemerkt, daß die Konsistenz der verallgemeinerten Form asymmetrischer heterotischer Orbifolds (also mit D_1 durch eine beliebige T-Dualitätstransformation ersetzt) schon in [22] und [16] gezeigt wurde. Der Beweis durch die Berechnung von Korrelationsfunktionen ist allerdings recht ausgedehnt und wurde deshalb in dieser Arbeit nicht vorgestellt.

Der Unterschied zwischen Typ II und heterotischen Theorien ist, daß bei den heterotischen Theorien im Raumzeitsektor keine linkslaufenden Fermionen existieren. Dafür gibt es linkslaufende Fermionen im internen Eichsektor. Um nun eine möglichst genaue Analogie zu den in Kapitel 5 betrachteten Typ II Modellen zu gewährleisten, bietet es sich an die Standardeinbettung für die Twists der Eichgruppe zu wählen. Standardeinbettung bedeutet, daß die Felder des Eichsektors genauso behandelt werden, wie die Linksläufer im Raumzeitsektor. Mit den Konventionen von Kapitel 3 gilt dann

$$\beta_I = (\phi_2, \phi_3, \phi_4, 0^5; 0^8) \tag{6.2}$$

Die ersten drei Eichfermionen werden also behandelt, als ob sie in der Raumzeit lägen. Alle weiteren internen Felder bleiben ungetwistet.

Die nun folgenden Betrachtungen beziehen sich zunächst auf eine heterotische $T^6/\mathbb{Z}_3$ Orbifold mit Eichgruppe $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$, die später mit der entsprechenden asymmetrischen $\hat{\mathbb{Z}}_3$ Orbifold verglichen wird. Es werden nur die Ergebnisse für den masselosen Sektor angegeben.

[1]Der Faktor 2 tritt aufgrund der unterschiedlichen Normierung von offenen und geschlossenen Strings auf. Er spielt für die folgenden Symmetriebetrachtungen keine Rolle.

Auf eine explizite Darstellung der Rechnungen wird verzichtet, weil diese wenig Einsichten in die Physik liefern.

6.2.1 Die symmetrische heterotische $\mathbb{Z}_3$ Orbifold

Der symmetrische Twist sei gegeben durch

$$(\phi_2, \phi_3, \phi_4) = (1/3, 1/3, -2/3) \tag{6.3}$$

und Standardeinbettung im Eichsektor. Die Konsistenzbedingungen aus Abschnitt 3.4 sind erfüllt, und die Orbifold besitzt $\mathcal{N}$=1 SUSY. Die Eichgruppe bricht durch das Orbifolden wie folgt:

$$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8' \to \mathrm{E}_6 \times \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{E}_8' \ . \tag{6.4}$$

Darstellungen beziehen sich auf die Eichgruppen immer in der hier angegebenen Reihenfolge. Damit folgt für die adjungierten Darstellungen der gebrochenen E_8:

$$\mathbf{248} \to (\mathbf{78}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{8}) + (\mathbf{27}, \mathbf{3}) + (\overline{\mathbf{27}}, \bar{\mathbf{3}}) \ . \tag{6.5}$$

Die Eigenwerte der links- und rechtslaufenden Zustände unter dem Twist werden mit α^0, α^1 bzw. α^2 gekennzeichnet, wobei $\alpha = e^{2\pi i/3}$ gesetzt wurde. Die Eigenwerte für den rechtslaufenden Anteil werden mit Tilden gekennzeichnet. Die hier beschriebene symmetrische $\mathbb{Z}_3$ Orbifold ist z.B. in [15] ausführlich beschrieben. Für den ungetwisteten Sektor ergibt die Tensorierung von linkslaufenden Bosonen und rechtslaufenden Fermionen im NS-Sektor

$$\begin{array}{lcll} \alpha^0\tilde{\alpha}^0 & : & \alpha^{\mu}_{-1}\tilde{\psi}^{\nu}_{-1/2}|\,0\,\rangle & \mu,\nu \in \{0,1\} \\ \alpha^1\tilde{\alpha}^2 & : & \alpha^{i}_{-1}\tilde{\psi}^{\bar{\jmath}}_{-1/2}|\,0\,\rangle & i,\bar{\jmath} \in \{2,3,4\} \\ \alpha^2\tilde{\alpha}^1 & : & \alpha^{\bar{\imath}}_{-1}\tilde{\psi}^{j}_{-1/2}|\,0\,\rangle & \bar{\imath},j \in \{2,3,4\} \end{array} \tag{6.6}$$

und für die Tensorierung von linkslaufenden Eichfermionen (in der bosonisierten Beschreibung) mit rechtslaufenden NS-Fermionen

$$\begin{array}{lcll} \alpha^0\tilde{\alpha}^0 & : & \tilde{\psi}^{\mu}_{-1/2}|\,a\,\rangle & |\,a\,\rangle \in \{(\mathbf{78},\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{8},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{248})\} \\ \alpha^1\tilde{\alpha}^2 & : & \tilde{\psi}^{\bar{\imath}}_{-1/2}|\,b\,\rangle & |\,b\,\rangle = (\mathbf{27},\mathbf{3},\mathbf{1}) \\ \alpha^2\tilde{\alpha}^1 & : & \tilde{\psi}^{i}_{-1/2}|\,c\,\rangle & |\,c\,\rangle = (\overline{\mathbf{27}},\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1}) \ . \end{array} \tag{6.7}$$

Die Tensorierung der Linksläufer mit den rechtslaufenden R-Fermionen liefert die Superpartner zu den Zuständen aus (6.6) und (6.7).

Für den getwisteten Sektor findet man die masselosen Zustände

$$\begin{array}{ll} |\,a\,\rangle \otimes |\,\tilde{0}\,\rangle & |\,a\,\rangle = (\overline{\mathbf{27}},\mathbf{1},\mathbf{1}) \\ \alpha^{\bar{\imath}}_{-1/3}|\,b\,\rangle \otimes |\,\tilde{0}\,\rangle & |\,b\,\rangle = (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1}) \ , \end{array} \tag{6.8}$$

wobei die $|\,\tilde{0}\,\rangle$ die getwisteten rechtslaufenden Grundzustände sowohl aus NS- als auch R-Sektor sein können. Auf die Multiplizitäten der einzelnen Zustände kommt es hier nicht an.

6.2.2 Die asymmetrische heterotische $\hat{\mathbb{Z}}_3$ Orbifold

Die asymmetrische $\hat{\mathbb{Z}}$ Orbifold unterscheidet sich nun von der symmetrischen wie folgt: Der Twist für die Linksläufer ist gegeben durch

$$(\phi_2, \phi_3, \phi_4) = (-1/3, -1/3, 2/3) \tag{6.9}$$

und der Twist für die Rechtsläufer durch

$$(\tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3, \tilde{\phi}_4) = (1/3, 1/3, -2/3) \ , \tag{6.10}$$

also wie bei der symmetrischen Orbifold. Damit drehen sich wegen der Standardeinbettung auch die Vorzeichen für die Twists des Eichsektors um. Die Multiplikation aller Einträge mit -1 ist jedoch eine Symmetrietransformation der *Weyl*-Gruppe. Somit könnte man für die Eichtwists auch die gleichen Vorzeichen wählen, wie bei der symmetrischen Orbifold. Entscheidend sind die unterschiedlichen Vorzeichen in den Twists der Raumgruppe. Die Eigenwerte der Zustände unter Twists werden mit dem gleichen α gekennzeichnet, wie bei der symmetrischen Orbifold.

Im ungetwisteten Sektor findet man aus der Tensorierung von linkslaufenden Bosonen und rechtslaufenden NS-Fermionen

$$\begin{array}{lcl} \alpha^0\tilde{\alpha}^0 & : & \alpha^{\mu}_{-1}\tilde{\psi}^{\nu}_{-1/2}|\,0\,\rangle \\ \alpha^1\tilde{\alpha}^2 & : & \alpha^{\bar{\imath}}_{-1}\tilde{\psi}^{\bar{\jmath}}_{-1/2}|\,0\,\rangle \\ \alpha^2\tilde{\alpha}^1 & : & \alpha^{i}_{-1}\tilde{\psi}^{j}_{-1/2}|\,0\,\rangle \end{array} \tag{6.11}$$

und aus der Tensorierung von linkslaufenden Eichfermionen (in der bosonisierten Beschreibung) mit rechtslaufenden NS-Fermionen

$$\begin{array}{lcll} \alpha^0\tilde{\alpha}^0 & : & \tilde{\psi}^{\mu}_{-1/2}|\,a\,\rangle & |\,a\,\rangle \in \{(\mathbf{78},\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{8},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{248})\} \\ \alpha^1\tilde{\alpha}^2 & : & \tilde{\psi}^{\bar{\imath}}_{-1/2}|\,b\,\rangle & |\,b\,\rangle = (\overline{\mathbf{27}},\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1}) \\ \alpha^2\tilde{\alpha}^1 & : & \tilde{\psi}^{i}_{-1/2}|\,c\,\rangle & |\,c\,\rangle = (\mathbf{27},\mathbf{3},\mathbf{1}) \ . \end{array} \tag{6.12}$$

Wiederum liefern die entsprechenden Tensorierungen mit den rechtslaufenden R-Fermionen die Superpartner.
Für den getwisteten Sektor findet man die masselosen Zustände

$$\begin{array}{ll} |\,a\,\rangle \otimes |\,\tilde{0}\,\rangle & |\,a\,\rangle = (\mathbf{27},\mathbf{1},\mathbf{1}) \\ \alpha^{\bar{\imath}}_{-1/3}|\,b\,\rangle \otimes |\,\tilde{0}\,\rangle & |\,b\,\rangle = (\mathbf{1},\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1}) \end{array} \tag{6.13}$$

6.2.3 Vergleich

Vergleicht man beide Spektren miteinander, so erkennt man, daß sich zwar einige Sektoren verändert haben, die Gesamtheit aller Zustände jedoch gleich geblieben ist. Dafür gibt es einen relativ einfachen Grund: Ein linkslaufender Zustand in den komplexen Dimensionen 2, 3 und 4, der in der symmetrischen Orbifold mit einem Eigenwert α unter dem Twist transformiert, hat in der asymmetrischen einen Eigenwert α^2. Dies läßt sich sofort verallgemeinern. Hat in einer symmetrischen $\mathbb{Z}_N$ Orbifold ein linkslaufender Raumzeit-Zustand den Eigenwert α^k, so hat derselbe Zustand in der asymmetrischen Konstruktion einen Eigenwert α^{N-k}. Bei der Tensorierung hat dies – wie für das $\mathbb{Z}_3$ Beispiel – den Effekt, daß die Sektoren im Vergleich zur symmetrischen Orbifold vermischt werden. In der Summe treten jedoch letztendlich alle Zustände wieder auf. Das Massenspektrum im Ganzen bleibt invariant.

6.2.4 Der asymmetrisch rotierte Propagator

Die in Abschnitt 6.1 über den Propagator geschlossener Strings gefundenen Ergebnisse lassen sich mit Hilfe der asymmetrischen Rotationen sehr gut verifizieren: In Analogie zu den in Abschnitt 5.4.1 vorgestellten Betrachtungen, wird die gleiche Rechnung für den geschlossenen Propagator durchgeführt. Der Raum sei wieder flach, also $G_{ij} = \delta_{ij}$. Dann ist der Propagator durch

$$\langle\, X_i(z) X_j(z')\, \rangle = -\alpha' \delta_{ij} \ln |z - z'|^2 \tag{6.14}$$

gegeben. Die rechte Seite läßt sich mit Hilfe von

$$\ln |z - z'|^2 = \ln(z - z') + \ln(\bar{z} - \bar{z}') \tag{6.15}$$

zerlegen. Analog zu (5.24) kann man diese Beiträge gemäß

$$\langle\, X_{Li}(z) X_{Lj}(z')\, \rangle = -\alpha' \delta_{ij} \ln(z - z')\ , \quad \langle\, X_{Ri}(\bar{z}) X_{Rj}(\bar{z}')\, \rangle = -\alpha' \delta_{ij} \ln(\bar{z} - \bar{z}') \tag{6.16}$$

identifizieren und wiederum die asymmetrischen Rotationen

$$X_L \to A\, X_L\ , \quad X_R \to A^T\, X_R \tag{6.17}$$

durchführen. Man findet für den asymmetrisch rotierten Propagator

$$\langle\, X_i(z) X_j(z')\, \rangle = -\alpha' \delta_{ij} \ln |z - z'|^2\ . \tag{6.18}$$

Das Ergebnis ist mit (6.14) identisch. Der Propagator hat sich durch die asymmetrischen Rotationen nicht verändert.

Damit läßt sich sagen, daß die asymmetrischen Rotationen nur Einfuß auf einen offenen Sektor haben, falls es diesen gibt. In den heterotischen Theorien läßt sich mit Hilfe der asymmetrischen Orbifolds keine nichtkommutative Geometrie finden. Dieses Ergebnis überträgt sich genauso auf den geschlossenen Sektor der Typ II Theorien im D-Brane-Bild.

Kapitel 7

Ausblick

In dieser Arbeit konnte mit Hilfe der hier vorgestellten Methoden gezeigt werden, daß nichtkommutierende Koordinatenfelder nur bei offenen Strings auftreten. Die antisymmetrischen Tensorfelder sind zwar in beiden Theorien vorhanden, führen aber nur für offene Strings zu nichtkommutativen Eigenschaften. Fundamentaler Grund dafür ist das Auftreten von Randbedingungen bei der Variation der Weltflächenwirkung offener Strings. Es sind die Randbedingungen, die das Auftreten der Spiegelterme im Propagator erzwingen und damit letztlich zu nichtkommutativer Geometrie führen. Es wurde gezeigt, daß die Nichtkommutativitäten eng mit den antisymmetrischen Hintergrundfeldern auf den D-Branes verknüpft sind. D-Branes werden aber ebenfalls durch Randbedingungen definiert und sind deshalb in den hier vorgestellten heterotischen Stringkompaktifizierungen nicht vorhanden. Diese Ergebnisse werden durch den Zugang über asymmetrische Rotationen bestätigt. Auch hier treten die Nichtkommutativitäten letztlich auf den D-Branes und damit über Randterme auf.

Die Ergebnisse für den heterotischen String lassen sich auf den geschlossenen Sektor der Typ I Theorie übertragen. Damit kann auch begründet werden, warum der in [32] betrachtete Limes $\alpha' \to 0$, der geschlossene und offen Strings entkoppelt, sinnvoll ist. Nichtkommutierende Koordinatenfelder sind eine auf offene Strings beschränkte Eigenschaft. Es sind also scheinbar nur die offenen Strings, die die nichtkommutative Geometrie der Raumzeit „spüren“.

Anhang A

Einige Ergebnisse aus CFTen und Stringquantisierung

In diesem Abschnitt werden einige Ergebnisse aus den konformen Feldtheorien (CFTen) aufgelistet, die für diese Arbeit wichtig sind. Die Liste ist nicht vollständig (Es werden z.B. sowohl OPEen als auch die Gültigkeit der Operator-Zustands-Korrelation als bekannt vorausgesetzt) und dient dazu, einige Größen einzuführen und die Konventionen zu fixieren.

Zu einer gegebenen CFT kann aus dem *Noether*-Theorem ein Energie-Impuls-Tensor T hergeleitet werden. Seien $a, b \in \{\sigma, \tau\}$. Man kann zeigen, daß $T_a^{\ a} = 0$ gilt. Der Energie-Impuls-Tensor ist spurlos. In komplexen Weltflächenkoordinaten bedeutet dies:

$$T_{z\bar{z}} = 0 \ .$$

Aus der Erhaltung von $\partial^a T_{ab}$ folgert man damit

$$\bar{\partial} T_{zz} = \partial T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \ .$$

Also hängt T_{zz} nur von z und $T_{\bar{z}\bar{z}}$ nur von $\bar{z}$ ab, $T(z) \equiv T_{zz}(z)$ ist holomorph und $\tilde{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$ antiholomorph. Damit kann man diese beiden Größen in einer *Laurent*-Reihe entwickeln:

$$T(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}} \ , \quad \tilde{T}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_m}{\bar{z}^{m+2}} \ .$$

Die *Laurent*-Koeffizienten sind nach *Cauchy* gegeben durch

$$L_m = \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i z}\, z^{m+2}\, T(z) \ ,$$

analog die $\tilde{L}_m$. Dabei ist C ein geschlossener Weg, der den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn umläuft. L_m und $\tilde{L}_m$ werden *Virasoro*-Generatoren genannt. Geht man zu Weltflächenkoordinaten $w = \sigma^1 + i\sigma^2$ über ($z = e^{-iw}$), so entspricht die *Laurent*-Entwicklung in den z-Koordinaten einer gewöhnlichen *Fourier*-Entwicklung in den w-Koordinaten:

$$\begin{aligned} T_{ww}(w) &= -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\sigma^1 - m\sigma^2)\, T_m \ , \\ T_{\bar{w}\bar{w}}(\bar{w}) &= -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-im\sigma^1 - m\sigma^2)\, \tilde{T}_m \ , \end{aligned}$$

wobei

$$T_m = L_m - \delta_{m,0}\frac{c}{24}\ , \quad \tilde{T}_m - \delta_{m,0}\frac{\tilde{c}}{24}\ . \tag{A.1}$$

Die Größen c und $\tilde{c}$ werden Zentralladungen genannt. Sie treten auf, wenn man das Verhalten von $T(z)$ bzw. $\tilde{T}(\bar{z})$ unter konformen Transformationen betrachtet. Die Details sollen hier nicht näher erörtert werden. Entscheidend ist, daß $T(z)$ und $\tilde{T}(\bar{z})$ (im Gegensatz zu T_{ww} und $T_{\bar{w}\bar{w}}$) keine Tensoren sind. Es gilt:

$$T_{ww} = (\partial_w z)^2 T_{zz} + \frac{c}{24}\ .$$

Insofern entsprechen die Zentralladungen also Korrekturen zum Tensortransformationsverhalten.
Die Hamiltonfunktion H von Zeittranslationen in w-Koordinaten ist gegeben durch

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\sigma^1}{2\pi} T_{22} = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c+\tilde{c}}{24}\ .$$

Die L_m und $\tilde{L}_m$ erzeugen die *Virasoro*-Algebra

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)\, L_{m+n} + \frac{c}{12}\,(m^3 - m)\,\delta_{m,-n} \\
[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n] &= (m-n)\, \tilde{L}_{m+n} + \frac{\tilde{c}}{12}\,(m^3 - m)\,\delta_{m,-n}\ .
\end{aligned}$$

In Tabelle A.1 sind die Zentralladungen für verschiedene Teilchen zusammengestellt, die Rechnungen findet man z.B. in [28]. Zentralladungen sind additiv. In einer konsistenten Stringtheorie müssen die Gesamtzentralladungen c_{ges} und $\tilde{c}_{\text{ges}}$ unabhängig voneinander verschwinden, um Anomaliefreiheit in den OPEen zu gewährleisten. Trotzdem ist es nötig, die Zentralladungen einzelner Teilchen zu kennen, um verschiedene Größen (wie z.B. L_0 und T_0) ineinander transformieren zu können.

Teilchen	reele Dimension	Zentralladung ($c = \tilde{c}$)
reelles Boson	1	1
komplexes Boson	2	2
reelles Fermion	1	1/2
komplexes Fermion	2	1

Tabelle A.1: Zentralladungen für einige Teilchen.

In einer gegebenen freien CFT können die Koordinatenfelder immer in einen holomorphen und einen antiholomorphen Anteil zerlegt werden. Sei ϕ ein Koordinatenfeld mit gegebenen Randbedingungen. Dann kann man für das Feld eine Oszillatorentwicklung vornehmen. Für die Ableitungen gilt

$$\partial\phi^\mu(z) = -i\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}}\ , \quad \bar{\partial}\phi^\mu(\bar{z}) = -i\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^{m+1}}\ .$$

Die Oszillatoren α und $\tilde{\alpha}$ wirken für negative Indizes als Erzeugungs- und für positive Indizes als Vernichtungsoperatoren. Man kann zeigen, daß sich L_0 schreiben läßt als

$$L_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + N + a^\phi \quad \text{mit} \quad N = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^\mu\, \alpha_{\mu n})\ ,$$

$\tilde{L}_0$ analog. N ist der Besetzungszahloperator, p der kanonische Impuls und a^ϕ die Normalordnungskonstante für das entsprechende Feld. Die Nullpunktsenergien A lassen sich aus

$$A = (\pm 1)\left[\frac{1}{24} - \frac{1}{8}(2\theta - 1)^2\right]$$

berechnen. Diese Gleichung gilt für komplexe Teilchen. Für Bosonen ist das positive Vorzeichen zu nehmen, für Fermionen das negative. θ gibt die Modenverschiebung bei nichttrivialen Randbedingungen an. Eine Herleitung dieser Formel kann z.B. in [28] gefunden werden.

Die Nullpunktenergie A entspricht der Normalordnungskonstante für die Generatoren in w-Koordinaten T_0. Für die Normalordnungskonstanten der *Virasoro*-Generatoren L_0 folgt damit aus (A.1)

$$a = A + \frac{c}{24} \; .$$

In dieser Arbeit wird A als Nullpunktenergie, a als Normalordnungskonstante bezeichnet.

Für die Berechnung von Orbifolds ist es nötig, die Normalordungskonstanten etwas näher zu betrachten. Für ein komplexes Boson (cb) und ein komplexes Fermion (cf) findet man

$$a^{\mathrm{cb}} = -\tfrac{1}{2}\theta(\theta - 1) \; , \quad a^{\mathrm{cf}} = \tfrac{1}{2}(\theta - \tfrac{1}{2})^2 \; .$$

Beide Größen sind in Abbildung A.1 in Abhängigkeit von θ aufgetragen. Für komplexe Bo-

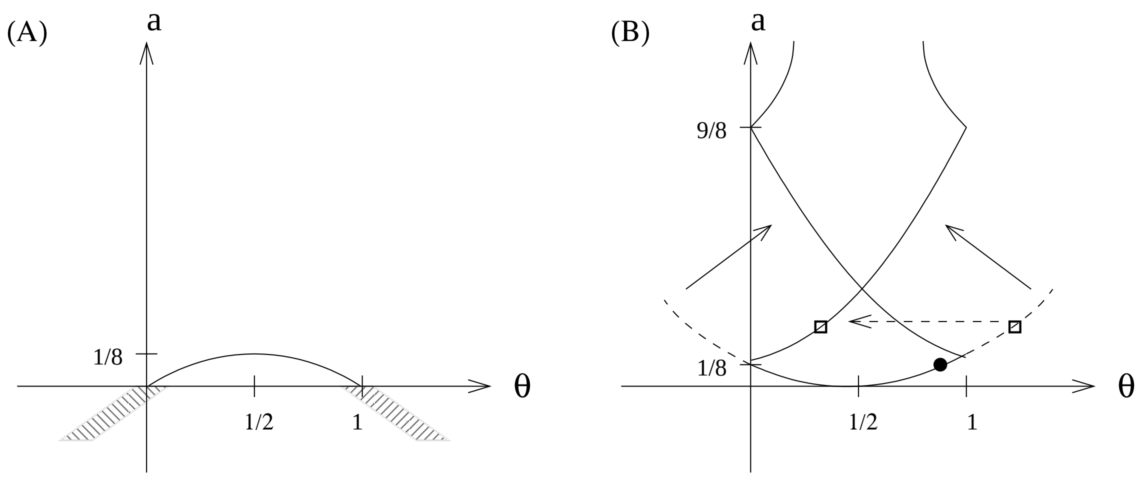

Abbildung A.1: Normalordnungskonstanten a in Abhängigkeit von θ für ein komplexes Boson (A) und ein komplexes Fermion (B). In (B) ist ein möglicher Grundzustand ($\bullet$) und ein möglicher angeregter Zustand ($\Box$) eingezeichnet.

sonen (A) kann a^{cb} im Prinzip negative Werte annehmen (schraffiert dargestellt). Unitäre CFTen, wie sie in Stringtheorien auftreten, sind jedoch nur für $a \geq 0$ konsistent. Damit muß gelten, daß $\theta \in [0,1]$. Für komplexe Fermionen (B) ist auch $\theta \notin [0,1]$ erlaubt, man gelangt jedoch dann auf angeregte Niveaus. Dieses Verhalten wird als „spektraler Fluß" bezeichnet. Ein angeregter Zustand ist in der Abbildung durch ein Quadrat dargestellt. Bei der Konstruktion von fermionischen Grundzuständen muß man also darauf achten, daß $\theta \in [0,1]$ ist.

Anhang B

Theta-Funktionen und Poisson-Resummierung

Theta-Funktionen und *Poisson*-Resummierung sind wichtige Hilfsmittel zur Berechnung von Wechselwirkungsamplituden und Zustandssummen. In diesem Abschnitt werden ein Teil der Theta-Funktionen, die *Dedekind*sche η-Funktion und *Poisson*-Resummierung vorgestellt.
Die Theta-Funktion ist für $\nu, \tau \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\vartheta(\nu,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \nu) \ .$$

Die Theta-Funktion erfüllt die Periodizitätsbedingungen

$$\begin{aligned} \vartheta(\nu+1,\tau) &= \vartheta(\nu,\tau) \ , \\ \vartheta(\nu+\tau,\tau) &= \exp(-\pi i \tau - 2\pi i \nu)\, \vartheta(\nu,\tau) \ . \end{aligned}$$

Unter modularen Transformation verhält sich die Theta-Funktion gemäß

$$\begin{aligned} \vartheta(\nu,\tau+1) &= \vartheta(\nu+1/2,\tau) \\ \vartheta(\nu/\tau,-1/\tau) &= \sqrt{-i\tau}\, \exp(\pi i \nu^2/\tau)\vartheta(\nu,\tau) \ . \end{aligned}$$

Weiterhin besitzt die Theta-Funktion eine Darstellung als unendliches Produkt. Seien $q = \exp(2\pi i \tau)$ und $z = \exp(2\pi i \nu)$. Dann gilt:

$$\vartheta(\nu,\tau) = \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^m)(1+zq^{m-1/2})(1+z^{-1}q^{m-1/2}) \ .$$

Die Theta-Funktionen mit Charakteristik sind definiert als

$$\begin{aligned} \vartheta \left[{a \atop b} \right] (\nu,\tau) &= \exp\left[\pi i a^2 \tau + 2\pi i a(\nu+b)\right] \, \vartheta(\nu + a\tau + b, \tau) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[\pi i (n+a)^2 \tau + 2\pi i (n+a)(\nu+b)\right] \ . \end{aligned}$$

Sei

$$\vartheta_{11}(\nu,\tau) = \vartheta \left[{1/2 \atop 1/2} \right] (\nu,\tau) \ .$$

Dann ist die η- oder auch *Dedekind*-Funktion definiert durch

$$\eta(\tau) = \left[\frac{\partial_\nu \vartheta_{11}(0,\tau)}{-2\pi}\right]^{1/3} = q^{1/24} \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^m) \ .$$

Unter modularen Transformationen verhält sich die η-Funktion gemäß

$$\begin{aligned} \eta(\tau+1) &= \exp(i\pi/12)\,\eta(\tau) \ , \\ \eta(-1/\tau) &= \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau) \ . \end{aligned}$$

Die *Poisson*-Resummierungs-Gleichung lautet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi a n^2 + 2\pi i b n) = \sqrt{1/a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi(m-b)^2}{a}\right] \ .$$

Anhang C

Masselose Spektren von Typ I und Typ II Theorien

In diesem Abschnitt sind die masselosen Spektren der unkompaktifizierten Typ I und Typ II Superstringtheorien aufgelistet.

Dazu werden zunächst die SO(8)-Produktdarstellungen aufgelistet, die bei den masselosen Zuständen geschlossener Strings auftreten. Die SO(8) spielt als kleine Gruppe von masselosen SO(9, 1) Teilchen eine übergeordnete Rolle. Die tensorierten Sektoren werden in der Form (NS+,R–) angegeben. Der linke Eintrag in der Klammer steht für die linkslaufenden Felder, der rechte Eintrag für die rechtslaufenden Felder. NS bzw. R bezeichnen *Neveu-Schwarz-* bzw. *Ramond*-Sektor für die jeweiligen Fermionen. Die Vorzeichen stehen für die GSO-Projektionen $\exp(\pi i F) = \pm 1$ im linkslaufenden respektive $\exp(\pi i \tilde{F}) = \pm 1$ im rechtslaufenden Sektor. F und $\tilde{F}$ sind die entsprechenden Fermionenzahlen auf der Weltfläche. Die Notation bei den Tensoren ist wie folgt: $[m]$ bezeichnet einen antisymmetrischen m-Tensor, (n) einen symmetrischen n-Tensor. Ein tiefgestelltes $+$ steht für selbstdual, ein $-$ für antiselbstdual.

Sektor	Darstellung unter SO(8)		Tensorzerlegung		Dimension
(NS+,NS+)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v$	$=$	$[0] + [2] + (2)$	$=$	$\mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}$
(R+,R+)	$\mathbf{8} \times \mathbf{8}$	$=$	$[0] + [2] + [4]_+$	$=$	$\mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}_+$
(R+,R–)	$\mathbf{8} \times \mathbf{8}'$	$=$	$[1] + [3]$	$=$	$\mathbf{8}_v + \mathbf{56_t}$
(R–,R–)	$\mathbf{8}' \times \mathbf{8}'$	$=$	$[0] + [2] + [4]_-$	$=$	$\mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}_-$
(NS+,R+)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}$			$=$	$\mathbf{8}' + \mathbf{56}$
(NS+,R–)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}'$			$=$	$\mathbf{8} + \mathbf{56}'$

Tabelle C.1: Einige Produkte von SO(8)-Darstellungen. Die Darstellungen von (R,NS) und (NS,R) sind identisch.

Typ IIA Superstringtheorie

Die Typ IIA Superstringtheorie besteht aus folgenden Sektoren:

$$\text{IIA} : \quad (\text{NS}+,\text{NS}+) \quad (\text{R}+,\text{NS}+) \quad (\text{NS}+,\text{R}-) \quad (\text{R}+,\text{R}-) \; .$$

Mit Hilfe von Tabelle C.1 folgt für das masselose Spektrum mit entsprechenden GSO-Projektionen:

Sektor	Darstellung unter SO(8)		Dimension und physikalische Teilchen
(NS,NS)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v$	$=$	$\mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}$
		$=$	Dilaton + antisymm. Tensor + Graviton
(NS,R)+(R,NS)	$(\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_c) + (\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_v)$	$=$	$(\mathbf{8}_c + \mathbf{56}_c) + (\mathbf{8}_s + \mathbf{56}_s)$
		$=$	2 Dilatinos + 2 Gravitinos entgegengesetzter Chiralität
(R,R)	$\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_c$	$=$	$\mathbf{8}_v + \mathbf{56}_t$
		$=$	1 + 3-Form-Potential

Tabelle C.2: Masseloses Spektrum der Typ IIA Superstringtheorie.

Typ IIB Superstringtheorie

Die Typ IIB Superstringtheorie besteht aus folgenden Sektoren:

$$\text{IIB} : \quad (\text{NS}+,\text{NS}+) \quad (\text{R}+,\text{NS}+) \quad (\text{NS}+,\text{R}+) \quad (\text{R}+,\text{R}+) \; .$$

Mit Hilfe von Tabelle C.1 folgt für das masselose Spektrum mit entsprechenden GSO-Projektionen:

Sektor	Darstellung unter SO(8)		Dimension und physikalische Teilchen
(NS,NS)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v$	$=$	$\mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}$
		$=$	Dilaton + antisymm. Tensor + Graviton
(NS,R)+(R,NS)	$(\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_s) + (\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_v)$	$=$	$(\mathbf{8}_s + \mathbf{56}_s) + (\mathbf{8}_s + \mathbf{56}_s)$
		$=$	2 Dilatinos + 2 Gravitinos gleicher Chiralität
(R,R)	$\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_s$	$=$	$\mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}$
		$=$	0 + 2 + 4-Form-Potential

Tabelle C.3: Masseloses Spektrum der Typ IIB Superstringtheorie.

Nichtorientierte $SO(32)$ Typ I Superstringtheorie

Für die nichtorientierte Typ I Superstringtheorie lassen sich die Sektoren nicht ohne weiteres geschlossen angeben wie bei den Typ II Theorien. Das liegt daran, daß durch Ausmodden der Weltflächenparität einige Darstellungen herausfallen (vergleiche auch 4.3). Das masselose Spektrum ist gegeben durch (In der Tabelle bezieht sich „Ausmodden“ immer auf die Weltflächenparität):

Geschlossener Sektor			
Sektor	Darstellung unter SO(8) (nicht ausgemoddet)		Dimension (ausgemoddet) und physikalische Teilchen
(NS,NS)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v$	=	$\mathbf{1} + \mathbf{35}$
		=	Dilaton + Graviton
(NS,R)+(R,NS)	$(\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_s) + (\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_v)$	=	$\mathbf{8}' + \mathbf{56}$
		=	Dilatino + Gravitino
(R,R)	$\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_s$	=	$\mathbf{28}$
		=	antisymmetrischer Tensor

Offener Sektor			
Sektor	Darstellung unter SO(8) (ausgemoddet)		Dimension (ausgemoddet) und physikalische Teilchen
(NS,R)	$(\mathbf{8}_v + \mathbf{8})_{\mathrm{SO(32)}}$	=	$(\mathbf{8}_v + \mathbf{8})_{\mathrm{SO(32)}}$
		=	Eichbosonen + Gauginos

Tabelle C.4: Masseloses Spektrum der Typ I Superstringtheorie.

Literaturverzeichnis

[1] A. Abouelsaood, C. G. Callan, C. R. Nappi, and S. A. Yost, *Open strings in background gauge fields*, Nucl. Phys. **B280** (1987), 599.

[2] O. Andreev and H. Dorn, *On open string sigma-model and noncommutative gauge fields*, Phys. Lett. **B476** (2000), 402–410, `hep-th/9912070`.

[3] C. Angelantonj and R. Blumenhagen, *Discrete deformations in type I vacua*, Phys. Lett. **B473** (2000), 86–93, `hep-th/9911190`.

[4] I. Antoniadis, H. Partouche, and T. R. Taylor, *Lectures on heterotic-type I duality*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **61A** (1998), 58, `hep-th/9706211`.

[5] F. Ardalan, H. Arfaei, and M. M. Sheikh-Jabbari, *Noncommutative geometry from strings and branes*, JHEP **02** (1999), 016, `hep-th/9810072`.

[6] J. Bagger and J. Wess, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton University Press, 1992.

[7] R. Blumenhagen, L. Görlich, and B. Körs, *Supersymmetric 4D orientifolds of type IIA with D6-branes at angles*, JHEP **01** (2000), 040, `hep-th/9912204`.

[8] R. Blumenhagen, L. Görlich, and B. Körs, *Supersymmetric orientifolds in 6D with D-branes at angles*, Nucl. Phys. **B569** (2000), 209–228, `hep-th/9908130`.

[9] R. Blumenhagen, L. Görlich, B. Körs, and D. Lüst, *Asymmetric orbifolds, noncommutative geometry and type I string vacua*, Nucl. Phys. **B582** (2000), 44, `hep-th/0003024`.

[10] R. Blumenhagen, L. Görlich, B. Körs, and D. Lüst, *Noncommutative compactifications of type I strings on tori with magnetic background flux*, (2000), `hep-th/0007024`.

[11] B. Chen, H. Itoyama, T. Matsuo, and K. Murakami, *pp' system with B field, branes at angles and noncommutative geometry*, Nucl. Phys. **B576** (2000), 177–195, `hep-th/9910263`.

[12] C.-S. Chu, *Noncommutative open string: Neutral and charged*, (1999), `hep-th/0001144`.

[13] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.

[14] J. O. Conrad, *Private Aufzeichnungen.*

[15] L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa, and E. Witten, *Strings on orbifolds*, Nucl. Phys. **B261** (1985), 678–686.

[16] J. Erler, D. Jungnickel, and H. P. Nilles, *Space duality and quantized Wilson lines*, Phys. Lett. **B276** (1992), 303–310.

[17] S. Förste, G. Honecker, and R. Schreyer, *Supersymmetric $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ orientifolds in 4D with D-branes at angles*, (2000), `hep-th/0008250`.

[18] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Nonlinear electrodynamics from quantized strings*, Phys. Lett. **B163** (1985), 123.

[19] A. Giveon, M. Porrati, and E. Rabinovici, *Target space duality in string theory*, Phys. Rept. **244** (1994), 77–202, `hep-th/9401139`.

[20] A. Giveon, E. Rabinovici, and G. Veneziano, *Duality in string background space*, Nucl. Phys. **B322** (1989), 167.

[21] L. E. Ibanez, J. Mas, H. P. Nilles, and F. Quevedo, *Heterotic strings in symmetric and asymmetric orbifold backgrounds*, Nucl. Phys. **B301** (1988), 157.

[22] J. Lauer, J. Mas, and H. P. Nilles, *Twisted sector representations of discrete background symmetries for two-dimensional orbifolds*, Nucl. Phys. **B351** (1991), 353–424.

[23] K. S. Narain, *New heterotic string theories in uncompactified dimensions* < 10, Phys. Lett. **B169** (1986), 41.

[24] K. S. Narain, M. H. Sarmadi, and C. Vafa, *Asymmetric orbifolds*, Nucl. Phys. **B288** (1987), 551.

[25] K. S. Narain, M. H. Sarmadi, and E. Witten, *A note on toroidal compactification of heterotic string theory*, Nucl. Phys. **B279** (1987), 369.

[26] H. P. Nilles, *Supersymmetry, supergravity and particle physics*, Phys. Rept. **110** (1984).

[27] J. Polchinski, *TASI lectures on D-branes*, (1996), `hep-th/9611050`.

[28] J. Polchinski, *String theory vol. 1: An introduction to the bosonic string*, Cambridge, Uk: Univ. Pr. 402 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics), 1998.

[29] J. Polchinski, *String theory vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge, Uk: Univ. Pr. 531 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics), 1998.

[30] R. Schreyer, *D-Branes und Orientifolds*, Talk given at the seminar „Aktuelle Themen der Elementarteilchenphysik“ (1999).

[31] J. H. Schwarz, *Lectures on superstring and M theory dualities*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B** (1997), 1, `hep-th/9607201`.

[32] N. Seiberg and E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, JHEP **09** (1999), 032, `hep-th/9908142`.

[33] A. Shapere and F. Wilczek, *Selfdual models with theta terms*, Nucl. Phys. **B320** (1989), 669.

[34] R. Slansky, *Group theory for unified model building*, Phys. Rept. **79** (1981), 1–128.

[35] P. K. Townsend, *Four lectures on M-theory*, (1996), `hep-th/9612121`.

[36] E. Witten, *Toroidal compactification without vector structure*, JHEP **02** (1998), 006, `hep-th/9712028`.