Supersymmetrische vereinheitlichte Theorie mit Eichgruppe SO(10)

von
Martin Weber

Diplomarbeit in Physik
angefertigt im
Physikalischen Institut

vorgelegt der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität
Bonn

im Februar 2000

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. Hans–Peter Nilles
Koreferent: Prof. Dieter Schütte

Zusammenfassung

Der Verlauf der Eichkopplungen im Standardmodell legt, neben der so erfolgreichen Vereinigung der elektromagnetischen mit der schwachen Wechselwirkung, eine weitere Vereinigung mit der starken Wechselwirkung auf einer sehr hohen Energieskala ($> 10^{15} GeV$) nahe. Die Schwierigkeiten beim Aufstellen einer *vereinheitlichten Theorie* (Grand Unified Theory) lassen sich bei einer *supersymmetrischen* (SUSY) Version entscheidend verringern.

In dieser Arbeit werden SUSY-GUTs untersucht mit Betonung auf dem inzwischen favorisierten Fall mit Eichgruppe $SO(10)$. Dabei werden die Vorteile der Wahl von $SO(10)$ als Eichgruppe gegenüber einer einfachen $SU(5)$-Theorie aufgezeigt.

Ähnlich wie im Fall der $SU(5)$, (den ich kurz im Anhang darstelle) kann man zunächst ein minimales $SO(10)$-Modell konstruieren. Ausgehend davon ist eine ganze Vielzahl von Erweiterungen denkbar, die durch Hinzufügen von Higgsmultipletts entstehen. Um realistische Modelle zu konstruieren ist es wichtig, die Eigenschaften der Darstellungen von Higgskandidaten zu kennen. Deren Rolle widme ich daher einen eigenen Abschnitt, in dem ich insbesondere die Möglichkeiten zur erfolgreichen Implementierung des benötigten „Dublett-Triplett-Splits“ beleuchte. Ein weiterer wichtiger Punkt betrifft die Art und Weise, wie die $SO(10)$ zur Symmetriegruppe des MSSM gebrochen werden kann. Ich bespreche daher im Zusammenhang mit den Higgsteilchen auch die Möglichkeiten von *Zwischensymmetrien*.

Daran schließe ich die ausführliche Diskussion eines speziellen Modells an und zeige abschließend die sich aus der Vereinigungsbedingung der Kopplungen ergebenden Vorhersagen und Grenzen dieses Modells auf. Für diese Untersuchungen stelle ich die Renormierungsgruppengleichungen auf und erhalte Einschränkungen aus dem Verlauf der Eichkopplungen.

Die Untersuchungen zeigen, daß man als effektive freie Parameter lediglich zwei Energiequotienten und drei Kopplungsparameter übrig behält. Die Wahl dieser Parameter ist vor allem durch die Größe der starken Kopplung, die auf der schwachen Energieskala bekannt ist, stark eingeschränkt. Bei der Diskussion möglicher Parameterkombinationen untersuche ich auch die möglichen Energiebereiche der Zwischensymmetrien.

Neben den Eichkopplungen ist auch der Verlauf der Yukawakopplungen wichtig, da deren Verhalten bei niedrigen Energien durch die beobachteten Fermionenmassen eingeschränkt ist. Für die Analyse der Yukawakopplungen stelle ich die benötigten 1-loop Renormierungsgleichungen auf und entwickle diese bis zur schwachen Energieskala. Ich zeige, daß auch diese Kopplungen im Einklang mit bestehenden Einschränkungen gewählt werden können.

Die Zwischenenergien haben eine wichtige Bedeutung bezüglich der Vorhersagen zum Protonzerfall und den Neutrinomassen. Diese schätze ich abschließend im Rahmen des diskutierten Modells ab. Auf diese Weise kann das Modell an Experimenten zum Protonzerfall und zu den Neutrinomassen (Neutrinooszillationen) getestet werden.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Bezeichnungen

ln	Natürlicher Logarithmus
lg	Logarithmus zur Basis 10
#	Anzahl
Tr(A)	Spur des Endomorphismus A
$G' < G$	G' ist Untergruppe von G
GeV	Gigaelektronenvolt (10^9eV)
TeV	Teraelektronenvolt (10^{12}eV)
QFT	Quantenfeldtheorie
RGE	Renormierungsgruppengleichung
SUSY	Supersymmetrie
SM	Standard-Modell
MSSM	Minimale Supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells
Materiefamilien	Chirale Multipletts mit Familienindizes, die die Fermionen des Standardmodells enthalten
GUT	Grand Unified Theory (Große vereinheitlichte Theorie)
SSB	Spontane Symmetriebrechung
vev	Vakuum-Erwartungswert
irrep	Irreduzible Darstellung
DTS	Dublett-Triplett-Split
DW-Mechanismus	Dimopoulos-Wilczek Mechanismus
LR-Modell	Links-Rechts symmetrisches Modell
PS-Gruppe	Pati-Salam Gruppe, $SU(4)_c \otimes SU(2)_R \otimes SU(2)_L$
W.W.	Wechselwirkung
$SO(10)$	Lie-Gruppe Gruppe $SO(10)$
$so(10)$	Lie-Algebra von $SO(10)$

Gruppen

G_{31}	$SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$
$G_{321} = G_{SM}$	$SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$
G_{3122}	$SU(3)_c \otimes U(1)_{BL} \otimes SU(2)_R \otimes SU(2)_L$
$G_{422} = G_{PS}$	$SU(4)_c \otimes SU(2)_R \otimes SU(2)_L$

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Symmetrien

Symmetrie hat sich in der Physik als sehr tragfähiges weitgehendes Konzept herausgestellt. Wie die Erfahrung zeigt, sind allerdings nicht alle der in der Natur auftretenden Symmetrien so „offensichtlich“ wie z.B. die Isometrie des Raumes. Es handelt sich dann um sog. *verborgene* oder auch *gebrochene* Symmetrien. Als klassisches Beispiel betrachte man z.B. die Keplerellipsen als spezielle Lösungen des (radialsymmetrischen) Keplerproblems. Während die Bewegungsgleichungen drehinvariant sind, zeigt eine einzelne Lösung diese Eigenschaft nicht mehr, sondern stellt eine Auswahl dar, die in diesem Beispiel von der Wahl der Anfangsbedingungen abhängt.

In der Teilchenphysik spielen folgende Symmetrien eine wichtige Rolle:

- „Äußere Symmetrie“: Poincaré- und Supersymmetrie,
- „Innere Symmetrie“: Eichsymmetrie und Familienreplikation.

Mathematisch entspricht der intuitive Begriff einer Symmetrie dem einer *Gruppe*. So beschreibt man z.B. die Eichsymmetrie im SM(=Standard-Modell) mit der Gruppe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Diese Gruppe enthält bereits die Colour- und Flavoursymmetrie und „erklärt“ lediglich die Familienreplikation nicht[1]. Das Ziel und die Grundidee einer GUT(=Grand Unified Theory) ist es nun, die $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie als Teil einer größeren Symmetriegruppe herauszustellen, die alle Eichsymmetrien in sich vereint [1]. Eine solche Symmetrie hat weitgehende Konsequenzen, darunter auch einige unerwünschte, wie z.B. den Protonzerfall. Da das SM experimentell über einen weiten Energiebereich gut bestätigt ist, muß eine GUT-Symmetrie auf geeignete Weise „verborgen“ werden. Das begründet die Hoffnung, in einer großen vereinheitlichten Theorie die elektro-schwache mit der starken Wechselwirkung zu vereinen, wie es bereits mit der elektrischen und magnetischen (Maxwell) und dann zusätzlich mit der schwachen Wechselwirkung (Weinberg/Salam) gelang.

[1]Die Gruppe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ist nach obigen Bemerkungen ebenfalls (im Bereich kleiner Energien) nicht „offensichtlich“, da $SU(2)_L \times U(1)_Y$ gebrochen ist zu $U(1)_{em}$.

Mit der Entdeckung der *Eichtheorie* ist ein enger Zusammenhang zwischen Symmetrie und physikalischen Wechselwirkungen deutlich geworden. Das folgende Bild gibt einen kurzen Überblick über die gefundenen und vermuteten Vereinigungen der in der Natur beobachteten Kräfte [2].

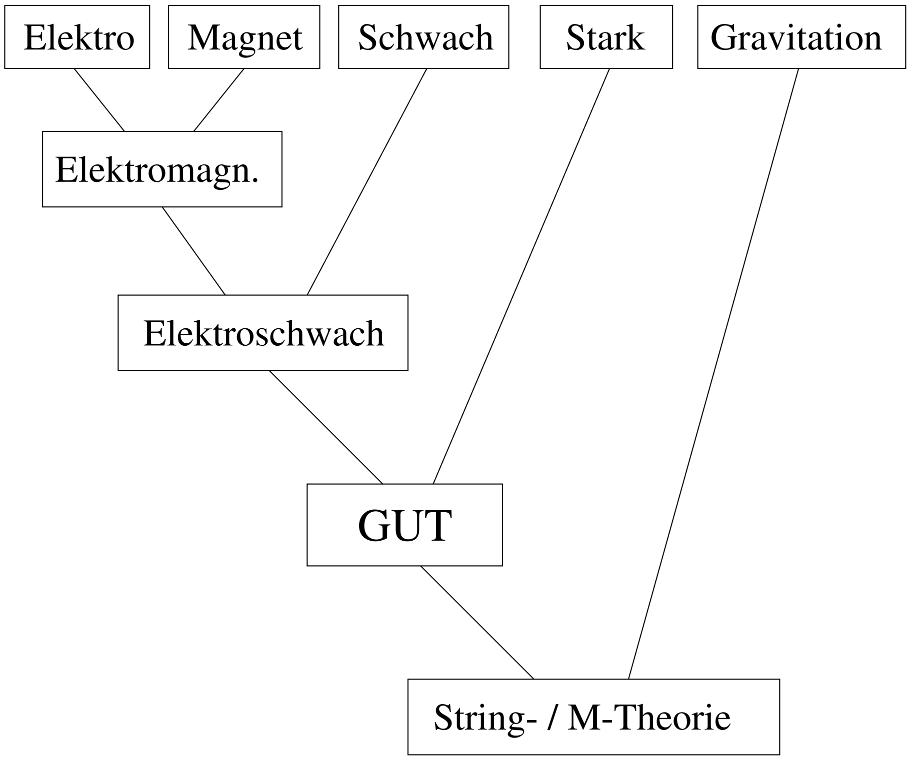

Abbildung 1.1: Vereinheitlichung der Kräfte. Bisher ist die Vereinigung der elektrischen, der magnetischen und der schwachen Wechselwirkungen gelungen.

Die Reduktion der Symmetrie erfolgt bei einer Beschreibung mit Hilfe von Quantenfeldtheorien(=QFT) durch den *Higgsmechanismus*, und man bezeichnet einen solchen Vorgang als SSB(=Spontane Symmetriebrechung). Wie schon betont wurde, kann man eine solche „Brechung“ auch als *Auswahl* einer Lösung ansehen. Diese Auswahl besteht im vorliegenden Fall in der Wahl einer nichtinvarianten Vakuumlösung.

Diese Arbeit behandelt Modelle, die für die Vereinigung aller Wechselwirkungen außer der Gravitation vorgeschlagen worden sind. Die bestehenden Modelle sind inzwischen relativ weit entwickelt worden, und es ist zu hoffen, daß zukünftige Experimente die Vorhersagen dieser Modelle bestätigen werden.

Um die vermutete entgültige Vereinigung mit der Gravitation angehen zu können, wird man nach heutigem Wissen den Rahmen der QFTen verlassen müssen. Vorgeschlagen wurden daher Stringtheorien, deren möglicher Ursprung in einer noch näher zu untersuchenden M-Theorie liegen mag.

1.2 Beschreibung durch eine Quantenfeldtheorie

Es erscheint daher vernünftig, diesen nächsten Schritt zu einer vereinheitlichten elektro-schwach-starken Wechselwirkung noch im Rahmen einer Feldtheorie anzugehen. Bei der Suche nach einem phänomenologisch akzeptablen und theoretisch beherrschbaren Modell möchte ich folgende Forderungen an mögliche Kandidaten stellen:

- Den Rahmen für die Untersuchungen in dieser Arbeit bildet die Quantenfeldtheorie[2]. Es wird vermutet, daß eine solche Feldtheorie sich als *effeftive* Theorie aus einer Stringtheorie ableiten läßt. Die Feldtheorie erlaubt es, die oben angesprochenen Symmetrien und Konzepte, wie z.B. den Vorgang einer SSB, in Form einer SUSY-Eichtheorie erfolgreich zu beschreiben.

- Im niederenergetischen Limes müssen sich die Ergebnisse mit denen des SM (bzw. des MSSM) decken.

- Es soll der Einfachheit halber nur *globale* SUSY betrachtet werden. Eine Erweiterung dieser Symmetrie zu einer *lokalen* SUSY führt zu nichtrenormierbaren SUGRA(=Supergravitations)-Theorien. Der Gültigkeitsbereich der in dieser Arbeit betrachteten Modelle liegt damit bei Energien unterhalb der Planck-Skala, wo die Gravitation einen nicht mehr vernachlässigbaren Einfluß ausübt[3].

- Die SUSY-Brechung der Theorie wird hier nicht explizit behandelt, da sie im Energiebereich der schwachen W.W. stattfindet. Im hier interessierenden Energiebereich haben wir es also mit einer supersymmetrischen Theorie zu tun.

Die schon durch die Bezeichnungen „starke“- und „schwache“ Wechselwirkung angedeuteten unterschiedlichen Kopplungsstärken scheinen auf den ersten Blick einer Vereinigung im Weg zu stehen. Bei der Aufstellung einer konsistenten Quantenfeldtheorie wird man allerdings ohnehin gezwungen, das Konzept von Kopplungs-*Konstanten* im strengen Sinne aufzugeben und stattdessen mit *renormierten* Kopplungen zu arbeiten.

Bei der Renormierung wird die Quantenfeldtheorie nach einem bestimmten Schema regularisiert. Zur Durchführung eines solchen Renormierungsprogramms ist es erforderlich, eine unphysikalische Renormierungsmasse einzuführen. Natürlich muß die S-Matrix und alle anderen Observablen, die man zur Berechnung von Teilchenreaktionen aufstellt, von diesem willkürlichen Parameter unabhängig sein. Diese Unabhängigkeit findet ihren Ausdruck in den sogenannten *Renormierungsgruppengleichungen*. Als Folge der Renormierungsgruppengleichungen kann man mit *effektiven* Kopplungen arbeiten, die sich mit der betrachteten Energieskala ändern und daher als *laufende Kopplungen* bezeichnet werden.

[2]Allerdings kann die Wahl der $SO(10)$ als Eichgruppe und bestimmter Higgsfelder durch Stringtheorien motiviert werden (siehe z.B. [3]), wobei von Stringtheorie aus betrachtet, die zugehörige Feldtheorie als effektive Theorie anzusehen ist.

[3]Die Gravitation zeigt selbstverständlich aufgrund ihrer ausschließlich anziehenden Eigenschaft auch bei niedrigen Energien ihre Wirkung; die effektive Kopplungsstärke kann jedoch im Vergleich zu den Kopplungsstärken der anderen Wechselwirkungen vernachlässigt werden.

Es ist diese intrinsische Eigenschaft von Quantenfeldtheorien, die eine Vereinigung von Kopplungen überhaupt erst ermöglicht und damit den Weg für eine vereinheitlichte Theorie eröffnet. Im einfachsten Modell kann man die auf der schwachen Energieskala bekannten Kopplungen des SM auf diese Weise zu höheren Energien extrapolieren und die Möglichkeit und Lage eines Schnittpunktes aller Eichkopplungen untersuchen. In der Tat erhält man in diesem einfachen Modell einen Vereinigungspunkt der Eichkopplungen nur dann, wenn man Supersymmetrie fordert und somit zu jedem bekannten Teilchen seinen SUSY-Partner miteinbezieht. Das ist ein sehr beeindruckendes Ergebnis, da man die SUSY-Theorie schon aus anderen Gründen (Hierarchieproblem, Stabilisierung der sonst instabilen schwachen Skala s. [4]) vermutet.

Leider hat auch das einfachste SUSY-Modell Probleme. Um diese Probleme zu lösen, wurden bereits zahlreiche erweiterte Modelle vorgeschlagen. Seitdem es Hinweise für die Existenz rechtshändiger Neutrinos gibt, scheint die Gruppe $SO(10)$ aufgrund der vorhandenen 16-dimensionalen Darstellung ein geeigneter Kandidat zu sein, da man nun genau eine ganze Familie in einer irrep unterbringen kann. Auch die anderen angesprochenen Probleme scheinen in $SO(10)$ eine natürlichere Lösung als z.B. im Fall der $SU(5)$ zu haben. Wenngleich es Alternativen geben mag, scheint $SO(10)$ eine minimale Version zu sein, die vermutlich zumindest als Zwischenstufe auftritt.

1.3 Weitere Gliederung

Das nächste Kapitel enthält eine Zusammenstellung von benötigten Begriffen, Definitionen und grundlegenden Konzepten. Diese werden in einer Weise vorgestellt, wie sie in der ganzen folgenden Arbeit verwendet werden. Unterstützt wird dieser Teil durch Beispiele, die detaillierter im Anhang aufgeführt sind und als erste unvollkommene Prototypen bei der Suche nach einem geeigneten Modell angesehen werden können.

In Kapitel 3 wird ein realistisches Modell mit Eichgruppe $SO(10)$ ausführlich diskutiert. Dazu werden zunächst Mechanismen zur Bewältigung der Probleme, die sich bei den einfachen Modellen ergeben hatten, vorgestellt. Anschließend wird ein Modell vorgestellt, in dem diese Mechanismen erfolgreich eingebaut wurden.

Daran schließen sich Abschnitte über die möglichen Parameterbereiche des Modells und die Diskussion von experimentell überprüfbaren Vorhersagen an.

Kapitel 2

Allgemeine Techniken

Ziel dieses Kapitels ist es, grundlegende Ergebnisse in einer Form zusammenzufassen, wie sie für das Weitere benötigt wird. Es sei schon hier erwähnt, daß diese Theorie später sowohl auf den Fall $G = SO(10)$, als auch auf zu betrachtende Untergruppen $G' < G$, wie sie in der jeweiligen Brechungskette auftreten, angewendet wird. Die Analyse der benötigten (irreduziblen) Darstellungen wird schon in diesem Kapitel für die Berechnung von Koeffizienten der Renormierungsgleichungen benötigt. Natürlich spiegeln sich die Eigenschaften der benutzten Darstellungen in der Struktur des jeweiligen Modells wider. Daher wird man versuchen, die Wahl der Darstellungen so anzupassen, daß ein realistisches Modell entsteht. Der Nutzen einzelner Darstellungen wird allerdings erst im nächsten Kapitel genauer besprochen, wenn ein spezielles Modell mit besonderen Eigenschaften ausgewählt werden soll.

2.1 Allgemeines zur Symmetrie

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, stellt die Struktur einer *Gruppe* die geeignete mathematische Struktur zur Beschreibung von Symmetrien dar. Aus der Vielzahl von möglichen Gruppen sind für diese Arbeit vor allem die Lie-Gruppen von Bedeutung. Sie sind geeignet, um *kontinuierliche* Symmetrietransformationen auszudrücken, wie man sie sowohl bei den äußeren als auch bei den inneren Symmetrien benutzt.

Definition 2.1.1. *Lie Gruppe*
Eine Lie-Gruppe ist eine mit einer Gruppenstruktur ausgestattete analytische Mannigfaltigkeit. (Wobei die Gruppenverknüpfung und Inversenbildung analytisch sein müssen.)

Eine ausführlichere Behandlung ist in [5] zu finden. Aufgeführt seien an dieser Stelle die zwei Beispiele:

Beispiel 2.1.2. $SO(10)$
Die Gruppe $SO(10)$ kann als Teil der Isometriegruppe von $\mathbb{R}^{10}$ eingeführt werden:

$$SO(10) := \{A \in End(\mathbb{R}^{10}) | \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^{10}, det(A) = 1\}. \qquad (2.1.2.1)$$

Beispiel 2.1.3. $SO(3,1)$
Auch die Symmetriegruppe der Raumzeit kann als Isometriegruppe geschrieben werden:

$$SO(3,1) := \{A \in End(\mathbb{R}^{3,1}) | g(Ax, Ay) = g(x,y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^{3,1}, det(A) = 1\}, \qquad (2.1.2.2)$$

wobei $g(x,y) := x_0 y_0 - \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$.

Die *lokale* Struktur einer Lie-Gruppe spiegelt sich vollständig in der Lie-Algebra wider, die man einer Lie-Gruppe eindeutig zuordnen kann (s. Anhang D). Anschaulich kann man die Elemente der Lie-Algebra als infinitesimale Symmetrietransformationen oder auch über die Exponentialabbildung als *Generatoren* der Lie-Gruppe auffassen. Da die Lie-Algebra ein Vektorraum ist, ist es in der Regel wesentlich einfacher, mit der Lie-Algebra anstelle der Lie-Gruppe zu rechnen.

Neben der Gruppenstruktur sind auch deren Realisierungen in Form von *Darstellungen* von Bedeutung. Für eine Definition verweise ich auf Anhang D.

Unter der Menge der Darstellungen einer Gruppe sind vor allem die *irreduziblen* Darstellungen (=irrep) von Bedeutung, da sie in einem gewissen Sinne die kleinsten Darstellungen sind und beliebige Darstellungen aus ihnen kombiniert werden können.

2.2 Äußere Symmetrie: Poincaré und SUSY

In der speziellen Relativitätstheorie nimmt man als Raumzeitsymmetrie die Poincaré Invarianz an. Sie schließt neben den aus der klassischen Mechanik bekannten Ort-, Zeitverschiebungen und Drehungen auch „boosts“ mit ein. Ihre Struktur setzt sich als semidirektes Produkt zusammen:

Definition 2.2.1. *Poincaré Gruppe*

$$(\Lambda, a) : \mathbb{R}^{3,1} \to \mathbb{R}^{3,1}, x \mapsto \Lambda x + a, \qquad (2.2.2.1)$$

wobei $\Lambda \in SO(3,1)$ *und* $a \in \mathbb{R}^{3,1}$. *Das führt zur Multiplikationsregel,*

$$(\Lambda', a') \circ (\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a'). \qquad (2.2.2.2)$$

Auch in diesem Fall ist es häufig sinvoll, mit der zugehörigen Lie-Algebra zu arbeiten:

Definition 2.2.2. *Poincaré Algebra*

$$\begin{aligned} \left[P^\lambda, P^\mu\right] &= 0 && (2.2.2.3)\\ \left[M^{\mu\nu}, P^\lambda\right] &= i(g^{\nu\lambda} P^\mu - g^{\mu\lambda} P^\nu) && (2.2.2.4)\\ \left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] &= i(g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) && (2.2.2.5) \end{aligned}$$

In der Supersymmetrischen Theorie wird diese Algebra wie folgt erweitert:

Definition 2.2.3. *SUSY-Algebra*

$$\begin{aligned} [P^\mu, Q_\alpha] &= 0 & (2.2.2.6)\\ \left[P^\mu, \bar{Q}_{\dot\alpha}\right] &= 0 & (2.2.2.7)\\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu, & (2.2.2.8)\end{aligned}$$

wobei Q_α und $\bar{Q}_{\dot\beta}$ Weyl-Spinoren sind.

Die SUSY-Algebra stellt wegen der Antikommutatoren keine Lie-Algebra mehr dar, sie ist ein Beispiel für eine *Super-Lie-Algebra*, die man auch als zugehörige Algebra einer *Super-Lie-Gruppe* einführen kann (siehe [6]).

Bemerkung 2.2.4. *Aus den Gleichungen (2.2.2.6) und (2.2.2.7) folgt, daß die Supersymmetrietransformationen den 4-er Impuls nicht verändern und damit insbesondere wegen $M^2 = P^2$ die Teilchenmassen invariant lassen. Wie aus Gleichung (2.2.2.8) deutlich wird, bezeichnet man die Supersymmetrie zurecht als äußere Symmetrie.*

Da die Poincaré-Gruppe nicht kompakt ist, wird man zur Betrachtung von unendlich dimensionalen Darstellungen in Form von *Feldern* geführt. Durch Quantisierung entstehen daraus die benötigten Quantenfelder.

Aus diesem Grund soll kurz angegeben werden, wie die SUSY-Algebra auf solchen Feldern operiert. Da eine SUSY-Transformation ein Boson in ein Fermion (und umgekehrt) transformiert, ist es für eine einheitliche Beschreibung nötig, diese in einem Objekt zusammenzufassen. Dieses Objekt nennt man Superfeld.

Definition 2.2.5. *Superfeldformalismus*
Die Menge der Superfelder ist der von den Basiselementen θ und $\bar\theta$ (beides Weyl-Spinoren) erzeugte Ring, wobei die Basiselemente die SUSY-Algebra erfüllen und und mit skalaren Feldern multipliziert werden. Ein jedes Superfeld besteht demnach i.A. sowohl aus bosonischen als auch aus fermionischen Anteilen. Da die θ und $\bar\theta$ jeweils anti-vertauschen, läßt sich jedes Superfeld in der folgenden Form (s. [7, 8]) schreiben:

$$\begin{aligned} F(x,\theta,\bar\theta) = f(x) + \theta\phi(x) + \bar\theta\bar\chi(x) + \theta\theta m(x) + \bar\theta\bar\theta n(x) +\\ \theta\sigma^\mu\theta V_\mu(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\lambda(x) + \bar\theta\bar\theta\theta\psi(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta d(x), \end{aligned} \quad (2.2.2.9)$$

wobei die Spinorindizes kontrahiert worden sind, und griechische Buchstaben für Weyl-Spinoren stehen.

Konkret sieht die Darstellung der Algebra auf dem Superfeld F wie folgt aus:

$$\begin{aligned} P_\mu &= i\partial_\mu & (2.2.2.10)\\ iQ_\alpha &= \partial_{\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu & (2.2.2.11)\\ i\bar{Q}_{\dot\alpha} &= -\partial_{\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu & (2.2.2.12)\end{aligned}$$

Zusätzlich definiert man die später benötigten kovarianten Ableitungen folgendermaßen:

Definition 2.2.6. *Kovariante Ableitung*

$$\begin{aligned} D_\alpha &:= \partial_{\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu && (2.2.2.13)\\ \bar D_{\dot\alpha} &= -\partial_{\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu && (2.2.2.14)\end{aligned}$$

Die Frage nach den irreduziblen Darstellungen führt für Superfelder auf die folgenden zwei wichtigen Fälle:

- **Definition 2.2.7.** *Chirales Superfeld: Das Superfeld ϕ heißt* chiral*, wenn*

$$\bar D_{\dot\alpha}\phi = 0 \tag{2.2.2.15}$$

  gilt. Wie z.B. in [9] gezeigt wird, enthält ein chirales Superfeld Komponenten mit Spin 0*, Spin* $\frac{1}{2}$ *und Spin* 1*. Leztere Komponente stellt sich allerdings beim weiteren Aufbau der Theorie als nicht propagierendes Hilfsfeld heraus und kann mit Hilfe der Bewegungsgleichungen eliminiert werden.*

- **Definition 2.2.8.** *Vektorsuperfeld: Das Superfeld V heißt* Vektorsuperfeld *wenn*

$$V^\dagger = V \tag{2.2.2.16}$$

  gilt. Ein Vektorsuperfeld besteht nach dem Eliminieren der Hilfsfelder aus einer Spin $\frac{1}{2}$ *und einer Spin* 1 *Komponente.*

2.3 Innere Symmetrie: Eichgruppe

Im Gegensatz zur äußeren Symmetrie handelt es sich bei der $SO(10)$ um eine *kompakte* Gruppe. Daher verfügt man über *endlichdi mensionale* unitäre Darstellungen und kann diese weiterhin in irreps zerlegen.

Im Anhang D findet sich eine ausführliche Liste der hier benötigten irreduzibelen Darstellungen von $SO(10)$. Ergänzt wird diese Liste durch die im Anhang E aufgeführten Tabellen, aus denen das Verhalten unter spontaner Symmetriebrechung und die Werte der im folgenden benötigt gruppentheoretischen Faktoren hervorgehen. An dieser Stelle gebe ich daher mit Tabelle 2.1 nur kurz die wichtigsten irreps zusammen mit deren Anwendungsbereichen an und werde im folgenden auf die entsprechenden Stellen im Anhang verweisen, wenn die dort beschriebenen Details benötigt werden.

Eine explizite Realisierung der irreduziblen Darstellungen ist im Anhang in Abschnitt D.2.1 zu finden.

Für das grundlegende Beispiel eines einfachen $SO(10)$-SUSY-Modells verweise ich auf den Anhang C. Entscheidend für die Anwendbarkeit der irreps als Multiplett von chiralen oder Vektorsuperfeldern ist, neben der Dimensionalität, vor allem deren Struktur bei der Beschränkung auf Untergruppen, wie sie bei der Symmetriebrechung auftauchen. Dabei werden ehemals irreduzible Darstellungen i.A. reduzibel. Die so erhaltene Darstellung

Dimension	Bildung	Hauptanwendungen
10	Fundamental	enthält MSSM-Higgsteilchen
16	Spinor	Materiefamilien, Higgsteilchen
45	Adjungierte	Vektormultiplett, Higgsteilchen
54	Spurfrei, symmetrisch	Higgsteilchen
126	Selbstdualer Tensor	Higgsteilchen

Tabelle 2.1: Wichtige irreduzible Darstellungen der Gruppe $SO(10)$

kann man nun wiederum in irreduzible Komponenten zerlegen. Besonders für die Anwendung als Higgsteilchen ist es hierbei entscheidend, ob bei dieser Zerlegung ein Singlett auftritt. Wenn dies der Fall ist, hat man durch einen nichtverschwindenden vev in dieser Komponente die Möglichkeit, die Gruppe zur Untergruppe zu brechen. Als Invariante der Untergruppe beeinträchtigt ein solcher vev nicht die Symmetrie der Untergruppe, wohl aber die der ursprünglichen Gruppe, unter der sich der vev nichttrivial transformiert. Auf die Anwendung einiger Darstellungen als Higgsfelder komme ich in Abschnitt 2.6.1 zurück, wo auch die möglichen Brechungsketten angesprochen werden.

2.4 Synthese: SUSY-Eichtheorie

Kombiniert man die Überlegungen der zwei vorangegangenen Abschnitte, so wird deutlich, daß die Bausteine einer $SO(10)$-SUSY Theorie Quantenfelder sind, die sich zusätzlich unter der Gruppe $SO(10)$ transformieren. Bisher wurde noch nicht festgelegt, ob eine solche Transformation auf das Feld als Ganzes, oder nur an einzelnen Stellen angewendet werden soll.

- Die zuerst genannte Option bezeichnet man als *globale* Symmetrie. Sie führt auf eine einfache Produktstruktur der Symmetrien.
- Führt man bei der an zweiter Stelle genannten Option an jedem Punkt eine (bis auf Glattheitseigenschaften) beliebige Transformation aus, so bezeichnet man die Symmetrie als *lokal* oder auch als *Eichsymmetrie*.

Wie man erkennt, geht die Eichsymmetrie weit über die globale Symmetrie hinaus, und es stellt sich die Frage, ob man nicht-triviale Quantenfeldtheorien mit einer so gewaltigen Symmetriegruppe formulieren kann.

Ausgangspunkt für die Quantenfeldtheorie bildet die Konstruktion einer invarianten Wirkung. Die Wirkung kann über

$$S = i \int \mathcal{L} d^4 x \tag{2.4.2.1}$$

aus einer Lagrangedichte gewonnen werden, die der Struktur nach in einen kinetischen und einen potentiellen Teil zerlegt werden kann.

- Dabei enthält der potentielle Teil keine Ableitungen. Falls dieser Teil die globale $SO(10)$-Symmetrie hat, so folgt automatisch auch die lokale.

- Der kinetische Teil besteht aus bilinearen Ausdrücken in den Ableitungen der Felder. Selbst wenn dieser Teil die globale $SO(10)$-Symmetrie hat, ist die lokale Symmetrie nicht gegeben.

In der Eichtheorie gelingt es jedoch durch Hinzunahme von weitern Feldern (sog. Eichfelder) eine Modifikation des kinetischen Teils zu erreichen, die tatsächlich die geforderte lokale Symmetrie ermöglicht. Bei einer solchen Konstruktion ersetzt man die gewöhnlichen Ableitungen durch *kovariante Ableitungen*, in denen die Eichfelder auftreten und die Symmetrie restaurieren[1]. Eine ausführlichere Darstellung befindet sich in [10].

Interessant ist nun, die physikalische Konsequenz der so eingeführten Eichfelder. So verläuft deren Wechselwirkung mit den bereits vorhandenen Feldern durch bestimmte Kopplungen, die alleine durch die Eichgruppe festgelegt sind. Wie in der Einleitung erwähnt wurde, ist es bereits gelungen alle Wechselwirkungen mit Ausnahme der Gravitation aus einem solchen Eichprinzip zu erhalten.

2.4.1 (Lokale) SUSY-Eichsymmetrie, Lagrangedichte und Teilcheninhalt

Ich beginne zunächst mit beliebiger Eichgruppe G. Wie bekannt, erklärt das Prinzip der Eichsymmetrie die Wechselwirkung der Teilchen aus einer Symmetrie. Die Symmetriegruppe legt damit, wie in Abschnitt 2.4 angesprochen wurde, die Dynamik fest („Eichkräfte").

Grundlegend ist nun das folgende Resultat (für eine ausführliche Begründung siehe z.B. [8]):

Theorem 2.4.1. *Jeder Lagrangian für eine SUSY-Feldtheorie mit G-Eichsymmetrie ist von der Form:*

$$L = L_{gauge-kin} + L_{gauge-coupl} + L_{superpot}, \tag{2.4.2.2}$$

Dabei ist:

$$L_{gauge-kin} = [\frac{1}{4}H(\phi)WW + h.c.]_F \textit{ mit } \quad W_\alpha = -\frac{1}{4g}\bar{D}\bar{D}e^{-gV}D_\alpha e^{gV} \tag{2.4.2.3}$$

$$L_{gauge-coupl} = [K(\phi^+ e^{gV}, \phi)]_D \tag{2.4.2.4}$$

$$L_{superpot} = [P(\phi) + h.c.]_F \tag{2.4.2.5}$$

Für eine renormierbare Theorie erhält man weitere Einschränkungen:

[1] Daraus ergibt sich als Forderung an die kovariante Ableitung D: Geht ϕ bei der lokalen Transformation über in ϕ', so muß $D\phi$ übergehen in $D'\phi' = (D\phi)'$.

$$
\begin{aligned}
L_{gauge-kin} &= [\frac{1}{4}WW + h.c.]_F && (2.4.2.6)\\
L_{gauge-coupl} &= [\phi^\dagger e^{gV}\phi]_D && (2.4.2.7)\\
L_{superpot} &= [P(\phi) + h.c.]_F,\ P(\phi) = \frac{\mu}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{3}\phi^3 && (2.4.2.8)
\end{aligned}
$$

Dabei enthält ϕ alle chiralen Materiesuperfelder (einschließlich der Higgsfelder), während V für alle Eichsuperfelder steht.

In obigen Formeln bedeuten ϕ^2 und ϕ^3 jeweils G-invariante bi-/trilineare Produkte der Darstellung R.

Bemerkung 2.4.2. *Man beachte, daß eine renormierbare Theorie vollständig gegeben ist, sobald die Gruppe G, der Materieteilcheninhalt und die Kopplungen im Superpotential*[2] *festgelegt sind.*

2.4.2 Skalares Potential und tree-level Massen

Einführung des skalaren Potentials

Das skalare Potential ist für die weiteren Untersuchungen sehr wichtig. Um die *spontane Symmetriebrechung* einer SUSY-Eichtheorie zu untersuchen, benötigt man Informationen über das Vakuum und die Teilchenmassen. Diese Information steckt vollständig im sog. *skalaren Potential.*

Bemerkung 2.4.3. *Wie der Name schon andeutet, handelt es sich um das Tree-level Potential für die skalaren Teilchen der chiralen Multipletts.*

Definition 2.4.4. *Skalares Potential*

$$V_{skalar} := -L|\text{alle ableitungs Terme und alle Fermionen gleich 0 gesetzt} \tag{2.4.2.9}$$

Theorem 2.4.5. *Ausdruck für skalares Potential*

$$V_{skalar} = \sum_{i=1}^{dim(R)} |F_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{dim(G)} D_a^2, \tag{2.4.2.10}$$

wobei

$$F_i^\dagger := -\partial W/\partial\phi_i, \tag{2.4.2.11}$$

und

$$D_a := -\phi^\dagger g T_a \phi. \tag{2.4.2.12}$$

Dabei bezeichnen die T_a die Gruppengeneratoren für die Darstellung R, wobei mit R die innere Symmetrie von ϕ gemeint ist.

[2]Man beachte, daß die Terme im Superpotential Eichsinglett sein müssen, so daß die meisten der $(dim(\phi))^2 + (dim(\phi))^3$ Parameter verschwinden.

Für die F- und D Terme ergibt sich (für den obigen Lagrangian),

$$-F_i^\dagger = \mu\psi_i + \lambda k_i^{j,k}\phi_j\phi_k \tag{2.4.2.13}$$

und

$$-D_a = \sum_{i=1}^{dim(R)} q_i(T_a)\phi_i^\dagger\phi_i. \tag{2.4.2.14}$$

(in Eicheigenzustandsbasis)

Das (im Fall einer SSB nicht mehr invariante) Vakuum wird nun aus der Menge der (absoluten) Minima des skalaren Potentials spontan gewählt. Gesucht ist daher die Menge konstanter Felder ($\phi(x) = v\ \forall x$), die V_{skalar} minimiert. Wie man leicht aus Gleichung (2.4.2.10) sieht, gilt stets $V_{skalar} \geq 0$. Daraus folgt eine wichtige Beobachtung:

Bemerkung 2.4.6. *Bevorzugung von supersymmetrischen Vakua*
Falls es ein supersymmetrisches Vakuum gibt, so hat dies aufgrund der verschwindenden F- und D-Terme [3] $V_{skalar} = 0$ *zur Folge. Es handelt sich damit um ein absolutes Minimum.*

Teilchenmassen

Die Massen von Teilchen ergeben sich nun aus den bilinearen Ausdrücken im skalaren Potential und können daher mit Hilfe der zweiten Ableitung bestimmt werden. Zu beachten ist, daß die zweite Ableitung an der Stelle des Vakuums ausgewertet werden muß, welches von 0 verschieden sein kann.

Bezeichnet man den vev der Darstellung ϕ mit v, so erhält man:

- Massen der chiralen Teilchen:

$$M_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial\phi_i\partial\phi_j}V(\phi)|_{\phi=v} \tag{2.4.2.15}$$

- Massen der Eichteilchen:

$$M^{ab} = v^\dagger(gR^a)^\dagger(gR^b)v \tag{2.4.2.16}$$

  Dabei bezeichen die R^a die Generatoren der Eichgruppe G, wenn man diese auf der Darstellung ϕ operieren läßt.

Bemerkung 2.4.7. *Massenlose Eichteilchen:*
Im Fall des verschwindenen Vakuum-Erwartungswertes v sind Eichteilchen masselos. Bei nicht-verschwindenden vevs dagegen erhalten entsprechend des allgemeinen Higgs-Mechanismus auch einige Eichteilchen über deren Kopplungen an ϕ *(s. Gleichung (2.4.2.7)) eine Masse. Die Eichsymmetrie ist gebrochen.*

[3] In [8] wird gezeigt, daß die F- und D- Terme als Ordnungsparameter für die Brechung der Supersymmetrie benutzt werden können. Im supersymmetrischen Fall verschwinden diese Terme.

Bemerkung 2.4.8. *Massenentartung:*
Falls — wie im später behandelten Modell — die SUSY ungebrochen ist, entsprechen die Massen der skalaren Teilchen auch denen der fermionischen Partner $M = M_b^2 = M_f^\dagger M_f$*. Chirale Teilchen werden dann jeweils als Paar massiv. Nimmt man an, daß die Masse hauptsächlich durch F-Terme zustande kommt (vernachlässigt also den Beitrag der D-Terme), so kann man die Massenmatrix* M_f *ohne weitere Rechnung dem Superpotential entnehmen: Ersetzt man nämlich dort alle kondensierten Teilchen durch ihre vevs, so ergeben die verbleibenden bilinearen Kombinationen gerade die fermionische Massenmatrix* M_f*.*

2.5 RGE und der Verlauf von Kopplungen

2.5.1 Eichkopplungen

Um die Energieabhängigkeit der Eichkopplungen einer QFT(=Quantenfeldtheorie) zu behandeln, definiert man die β-Funktion (s. [10])

$$\beta_g := M\frac{\partial g}{\partial M}, \tag{2.5.2.1}$$

wobei M die zur Regularisierung eingeführte Größe mit der Dimension einer Masse bezeichnet. Benutzt man zur Renormierung das MS-Schema (Minimal Subtraction) in 1-loop Approximation, so erhält man:

$$\beta_g \overset{1-loop}{=} -\frac{b}{16\pi^2}g^3, \tag{2.5.2.2}$$

wobei sich für den (in 1-loop Rechnung konstanten) Faktor b im supersymmetrischen Fall nach [8]

$$b = 3c_1(G) - \sum_R c_2(R) \tag{2.5.2.3}$$

ergibt. Dabei bezeichnet G die Eichgruppe und R die Darstellung aller chiralen Felder. c_1 und c_2 resultieren aus den Loop-Integrationen der Eichteilchen ($\to c_1$) bzw. denen der chiralen Teilchen ($\to c_2$).

Da sie im folgenden häufiger benötigt werden, gehe ich kurz auf die Definitionen von c_1 und c_2 ein:

Seien

$$T_a(a = 1, .., dim(G)),\ [T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c \tag{2.5.2.4}$$

die Generatoren der Gruppe G (d.h. eine Basis der Lie-Algebra). Und seien weiterhin

$$R_a(a = 1, .., dim(G)) \tag{2.5.2.5}$$

die Darstellungsmatrizen zur betrachteten Darstellung R der Gruppe. [4]

Definition 2.5.1. *Definition von c_1:*
c_1 ist über die Cartan-Metrik definiert:

$$g_{ab} := B(T_a, T_b) := Tr(ad(T_a)ad(T_b)) = Tr([T_a, [T_b, .]]) = \sum_{c,d} if^c_{ad} if^d_{bc} \tag{2.5.2.6}$$

Man wähle nun eine (bzgl. dieser Bilinearform) orthogonale Basis und definiert dann c_1 durch die Gleichung

$$g_{ab} = c_1 \delta_{ab}. \tag{2.5.2.7}$$

Die übliche Normierung ist konventionsgemäß so, daß $c_1(SU(N)) = N$.

Definition 2.5.2. *Definition von c_2:*
c_2 ist auf ähnliche Weise definiert:

$$Tr(R_a R_b) = c_2 \delta_{ab}. \tag{2.5.2.8}$$

- Diese Definition ist wegen der Basis-Unabängigkeit der Spur unabhängig von der Wahl einer Basis im Darstellungsraum V. Damit ist c_2 wohldefiniert.

- Wählt man $R_a := ad(T_a)$, so sieht man, daß die Definition von c_1 auch als Spezialfall derer von c_2 angesehen werden kann. In der üblichen Normierung erhält man nun $c_2(Fund.Darst.vonSU(N)) = \frac{1}{2}$

Die Berechnung der c_2 Faktoren für die Darstellungen der $SO(10)$ ergibt die in Anhang E angegebenen Werte.

Die Differentialgleichung für die Kopplung g vereinfacht sich wesentlich, wenn man anstelle der Variablen (M, g) die neuen Variablen (t, y) verwendet:

$$t := ln(M/1\text{GeV}), \ \alpha := \frac{g^2}{4\pi}, \ y := \frac{1}{\alpha} \tag{2.5.2.9}$$

Man erhält nämlich dann $\beta_g = \frac{\partial g}{\partial t}$ und somit

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{8\pi}{g^3}\frac{g}{t} = -\frac{8\pi}{g^3}\beta_g \overset{1-loop}{=} \frac{1}{2\pi} b. \tag{2.5.2.10}$$

Die Eichkopplungen laufen damit in diesen Variablen (und in der 1-loop Näherung) auf Geraden, deren Steigungen aus den b-Faktoren folgen. Dieser einfache Zusammenhang wird später nützlich sein, wenn es darum gehen wird, die Kopplungen verschiedener (Teil-) Gruppen zu vereinigen. (s. Abschnitt 3.4).

Abschließen möchte ich diesen Abschnitt mit einer Beobachtung, die auch für die spätere Analyse bedeutsam und auch schon für das folgende Beispiel interessant ist:

[4] Das Generatorsystem ist hier zunächst völlig beliebig, auch was die Normierung angeht. c_1 und c_2 werden allerdings von dieser Wahl abhängen. Das ist auch einsichtig, wenn man an die Kombination $gT_a = (gf)(\frac{1}{f}T_a)(f \in \mathbb{C}^*)$ im Exponenten der Eichtransformation denkt (die von der Normierung unabhängig ist). Es muß also eine konsistente Normierung der Generatoren vorgenommen werden, die dann die zugehörigen Faktoren c_1 und c_2 festlegt.

Bemerkung 2.5.3. *Die Präsenz von vollständigen Darstellungen hat keinen Einfluß auf die Energie, an der sich Kopplungen der Faktorgruppen schneiden.*

Diese Behauptung mag vielleicht zunächst verblüffen, da wie soeben gezeigt, die c_2 Faktoren einer jeden Darstellung über den b-Faktor zur β-Funktion beitragen. Der entscheidende Punkt ist aber, daß dies bei vollständigen Darstellungen zu einer *gleichmässigen* Änderung der c_2 Faktoren (und damit der b-Faktoren) führt (vgl. Anhang E) und somit die Geradensteigungen aller beteiligten Faktorgruppen um einen gemeinsammen Wert verschiebt. Eine solche Verschiebung ändert die Stärke der Kopplungen, nicht jedoch die t-Koordinate ihres Schnittpunktes[5].

Eichkopplungen bei one-step SUSY-GUT Modellen

In diesem Abschnitt will ich das oben Angesprochene konkret am Beispiel der „one-step Unification" (=der Vereinigung ohne Zwischensymmetriestufen) illustrieren. Sei also M ein SUSY GUT-Modell, dessen Teilcheninhalt bei Energien unterhalb der GUT-Energie (und oberhalb der elektroschwachen Skala) bis auf Singletts gleich dem Teilcheninhalt des MSSM ist. Den Teilcheninhalt des MSSM habe ich kurz im Anhang A zusammengestellt. Zwei solcher Modelle mit Eichgruppen $SU(5)$ bzw. $SO(10)$ befinden sich ebenfalls in den Anhängen B und C. Dabei nehme ich an, daß wie dort besprochen die Higgstripletts auf eine zunächst nicht geklärte Weise bereits auf der GUT-Skala entkoppeln.

Erwähnt sei an dieser Stelle die in der gesamten Arbeit gemachte Annahme (s. auch Abschnitt 2.6.2), daß der Verlauf der Kopplungen nur unwesentlich von der offenbar nötigen Brechung der Supersymmetrie beeinflußt wird; sie läßt sich rechtfertigen, wenn man bedenkt, daß diese Brechung auf der TeV-Skala erwartet wird, dagegen die GUT-Skala bei ca. $10^{16} GeV$ liegt. Entwickelt man die Kopplungen also beginnend von der GUT-Skala bis zur Z-Masse herunter, so ändert sich der Verlauf gegenüber dem durchweg supersymmetrischen Modell nur etwa auf der letzten der 14 Zehnerpotenzen.

Die bei der Berechnung benötigten gruppentheoretischen Konstanten c_1 sind offensichtlich. Die Konstanten c_2 kann man aus der Tabelle E.2 im Anhang E entnehmen. Man erhält so:

$$b_3 = b(SU(3)) = 3 \cdot 3 - [n_G(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}) + n_H 0] = 3, \tag{2.5.2.11}$$

$$b_2 = b(SU(2)) = 3 \cdot 2 - [n_G(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}) + n_H \frac{1}{2}] = -1, \tag{2.5.2.12}$$

$$b_1 = b(U(1)) = 3 \cdot 0 - [n_G(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}) + n_H \frac{3}{10}] = -\frac{33}{5}, \tag{2.5.2.13}$$

dabei ist $n_G = 3$ die Anzahl der Generationen bzw. Familien und $n_H = 2$ die Anzahl der Higgsdubletts.

Nun kann man die Stärke der elektroschwachen und der starken Wechselwirkungen aus Laborexperimenten berechnen. Ich will hier zunächst mit den relativ genau bekannten

[5] Sei $y_i(t) = a_i t + b_i, i \in \{1..2\}$ und sei $y_1(t_0) = y_2(t_0)$. Nun betrachte $\bar{y_i}(t) = (a_i + c)t + b_i$. Dann folgt $\bar{y_1}(t_0) = y_1(t_0) + ct_0 = y_2(t_0) + ct_0 = \bar{y_2}(t_0)$.

Werten der elektroschwachen Theorie ansetzen:

Üblicherweise findet man die Kopplungen an der Masse M_Z parametrisiert durch y_{em} und $\sin^2(\theta_W)$. Die experimentellen Werte sind:

$$\begin{aligned} M_Z &= 91,187 \pm 0,091\text{GeV} \quad \text{(nach [11])} && (2.5.2.14) \\ y_{em}|_{M_Z} &= 127,90 \pm 0,09 \quad \text{(nach [12])} && (2.5.2.15) \\ \sin^2(\theta_W)|_{M_Z} &= 0,2312 \pm 0,00017 \quad \text{(nach [12])} && (2.5.2.16) \end{aligned}$$

Beachtet man die geeignete Normierung der Hyperladung [6], so erhält man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} y_{em} &= y_1' + y_2, && (2.5.2.17) \\ y_1 &= \frac{3}{5} y_1', && (2.5.2.18) \\ \tan^2(\theta_W) &= \frac{y_2}{y_1}, && (2.5.2.19) \end{aligned}$$

für die Kopplungen die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{3}{5} y_{em}(1 - \sin^2(\theta_W)), && (2.5.2.20) \\ y_2 &= y_{em} \sin^2(\theta_W). && (2.5.2.21) \end{aligned}$$

Damit sind die zwei Geraden für den Verlauf dieser Kopplungen festgelegt. Am Schnittpunkt dieser Geraden können die Kopplungen vereinigt werden. Setzt man die Vereinigung voraus, so liegt durch den gemeinsamen Schnittpunkt auch der Verlauf der starken Kopplung fest, und man kann deren Wert an der Z-Masse bestimmen. Man erhält so zunächst:

$$\begin{aligned} dZU &:= -\frac{2\pi}{b_2 - b_1}(y_2 - y_1), && (2.5.2.22) \\ \ln(M_U/1\text{GeV}) &= \ln(M_Z/1\text{GeV}) + dZU, && (2.5.2.23) \\ y_U &= y_2 + \frac{b_2}{2\pi} dZU, && (2.5.2.24) \\ y_3|_{M_Z} &= y_U - \frac{b_3}{2\pi} dZU, && (2.5.2.25) \end{aligned}$$

und daraus die Werte:

[6] Die hier angegebene Normierung gilt sowohl für $SU(5)$ als auch $SO(10)$. Andere Gruppen können allerdings auch zu anderen Normierungen führen, wie in [12] ausgeführt ist.

$$\begin{aligned} \lg(M_U/1GeV) &= 16,30, && (2.5.2.26)\\ y_1|_{M_Z} &= 59,00, && (2.5.2.27)\\ y_2|_{M_Z} &= 29,57, && (2.5.2.28)\\ y_3|_{M_Z} &= 8,55 \quad \text{oder} \quad \alpha_3 = 0,117, && (2.5.2.29)\\ y_U &= 24,32. && (2.5.2.30) \end{aligned}$$

Den Wert für die starke Kopplung findet man üblicherweise angegeben als

$$\alpha_{3exp} = 0,1190 \pm 0,003 \text{ (nach [11])}. \tag{2.5.2.31}$$

Dieser Wert ist also gut mit dem aus der einfachen Vereinigungshypothese berechneten verträglich.

Den Verlauf der Eichkopplungen habe ich in der Abbildung 2.1 dargestellt[7].

Zum Ende dieses Abschnittes will ich noch kurz auf den Fall eingehen, in dem die MSSM-Higgsdubletts simultan mit den „Tripletts“ als volle Darstellung massiv werden. Dies ist eigentlich —ohne weitere Modifikationen— auch in den Beispielen aus Anhang B und C der Fall.

Der Fall mit Higgstripletts

Mit Hilfe der Bemerkung 2.5.3 sieht man leicht, wie jetzt die Vorhersage für die starke Kopplung aussieht. Da nämlich alle chiralen Teilchen (also die Materiefamilien und die Higgsmultipletts) im Energiebereich zwischen der schwachen Skala und M_{GUT} (bis auf Singletts) als vollständige Darstellungen präsent bleiben, hängt die Vereinigungsenergie lediglich von den Faktoren c_1 ab:

$$y_i - y_j = \frac{b_i - b_j}{2\pi} dZU = \frac{3}{2\pi}(c_1(G_i) - c_1(G_j))dZU, \tag{2.5.2.32}$$

wobei hier $G_1 = U(1)$ und $G_n = SU(n)$ für $n > 1$ bezeichnen.

Für $i = 2, j = 1$ ist $c_1(G_i) - c_1(G_j) = 2$; damit folgt:

$$dZU = \frac{2\pi}{6}(y_2 - y_1). \tag{2.5.2.33}$$

[7] Alle in dieser Arbeit auftretenden Rechnungen wurden mit Hilfe der Programmiersprache C++ [13] und dem Variablentyp „double“ durchgeführt.

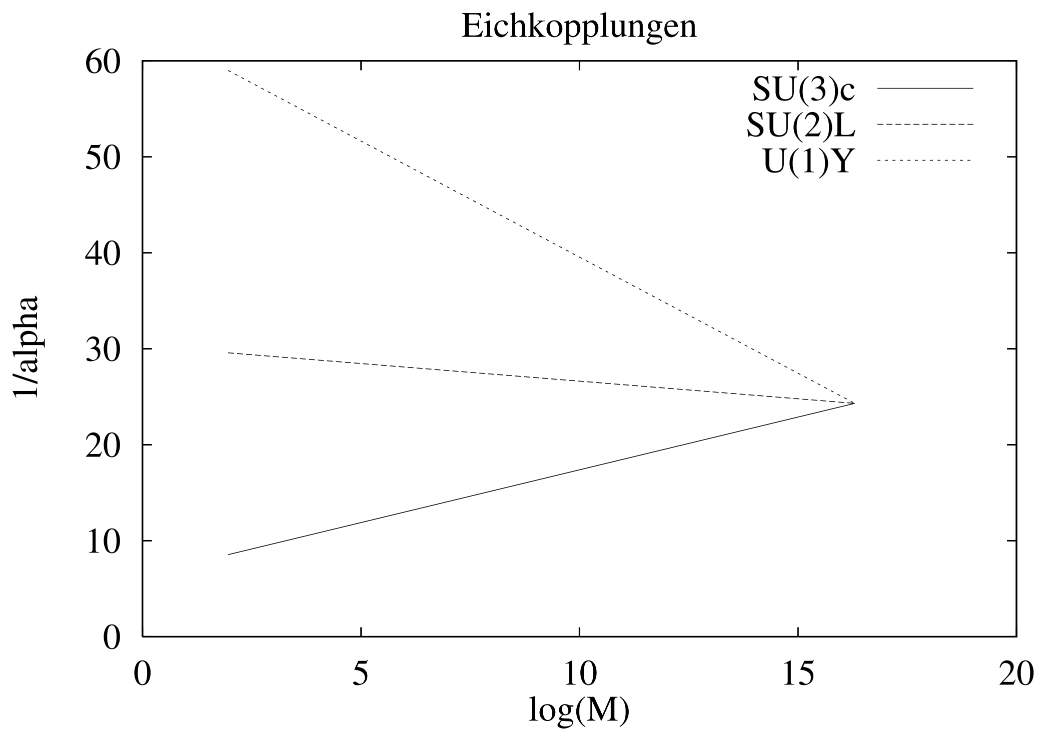

Abbildung 2.1: Verlauf der Eichkopplungen bei 1-step Vereinigung in 1-loop Ordnung. Nur der Verlauf der Kopplungen oberhalb der GUT-Energie ist vom Modell abhängig. Aufgetragen ist der in Wert der inversen Kopplungsquadrate in Abhängigkeit der logarithmierten Energievariablen t beginnend mit dem Wert der Z-Masse bis hin zur GUT-Energie.

Mit $i = 3, j = 1$ ist dann $c_1(G_i) - c_1(G_j) = 3$, und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_1 + \frac{9}{2\pi} dZU, && (2.5.2.34) \\ &= y_1 + \frac{3}{2}(y_2 - y_1), \\ &= \frac{1}{2}(3y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Der daraus erhaltene Wert von $\alpha_3 = \frac{1}{y_3} \approx 0,067$ ist sehr weit vom oben angegebenen experimentellen Wert entfernt. Es gibt weitere gute Gründe dafür, von den Higgsdarstellungen lediglich die Dubletts übrig zu behalten, wie ich in Kapitel 3 detaillierter erläutern werde. Dort werde ich auch einen Mechanismus vorstellen, der einen solchen „Split" von Darstellungen generieren kann.

2.5.2 Yukawakopplungen

Die Yukawakopplungen stellen sich im Superfeldformalismus als trilineare Kopplungen dar. Wie schon bei den Eichkopplungen ist es zweckmässig, anstelle der Energie den Parameter t zu verwenden und die Energieabhängigkeit wieder mit Hilfe einer β-Funktion zu beschreiben:

$$\text{Trilinearer Kopplungsterm:} \quad h_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k,$$
$$\beta_{h_{ijk}} := M\frac{\partial h_{ijk}}{\partial M} = \frac{\partial h_{ijk}}{t}. \qquad (2.5.2.35)$$

Nach [14] erhält man für $\beta_{h_{ijk}}$ in 1-loop Ordnung nach einigen Umbenennungen den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \beta_{h_{ijk}} &\overset{1-loop}{=} \sum_p h_{ijp}C_{pk} + (k \leftrightarrow i) + (k \leftrightarrow j) && (2.5.2.36) \\ C &= \frac{1}{16\pi^2}(A - 2B) && (2.5.2.37) \\ A_{ij} &:= \frac{1}{2}\sum_{k,l} h_{ikl}h_{jkl} && (2.5.2.38) \\ B_{ij} &:= \sum_k g_k^2 \sum_{a|G_k}((R^a)^2)_{ij}, && (2.5.2.39) \end{aligned}$$

wobei in der letzten Formel a jeweils die Generatoren des Gruppenfaktors G_k indiziert.

In den nun folgenden Abschnitten soll die konkrete Berechnung von A und B durchgeführt werden.

Teilchenindex

Bisher wurden die trilinearen Produkte ohne Ausnutzung von irgend welchen Symmetrien behandelt und einfach komponentenweise indiziert. Um die folgenden Rechnungen abzukürzen, ist es sinvoll, die Darstellungsindizes durch etwas zu ersetzen, das ich Teilchenindex nennen will:

$$\begin{aligned} \text{Sei } G > G' &= G_1 \otimes ... \otimes G_m \\ R &= \oplus_r R_r, R_r : \text{irrep. von G} \end{aligned}$$

Dann zerfällt R_r in irreduzible Bestandteile der Gruppenfaktoren:

$$\begin{aligned} R_r &= \oplus_l (R_r^l)_1 \otimes ... \otimes (R_r^l)_m =: \oplus_l \phi_{r,l} \\ \phi_\alpha &:= \phi_{r,l} \end{aligned}$$

Beispiel 2.5.4. *Teilchenindizes für eine Familie des MSSM* [8]

$$\alpha \in \{L, Q, \bar{e}, \bar{u}, \bar{d}, h, \bar{h}\} \tag{2.5.2.40}$$

Nun treten in einer Eichtheorie lediglich eichinvariante Terme mit jeweils einer einzigen Kopplung auf. Daher kann ich die Komponentenindizes durch Teilchenindizes ersetzen und mich auf Produkte der Form $h_{\alpha\beta\gamma}\phi_\alpha\phi_\beta\phi_\gamma$ beschränken.

Berechnung von A

Entscheidend für die richtige Berechnung ist die „Multiplizität“, mit der eine Kopplung $h_{\alpha\beta\gamma}$ im Produkt enthalten ist.

Definition 2.5.5. *Multiplizität: Denkt man sich das Produkt $\phi_\alpha\phi_\beta\phi_\gamma$ ausgeschrieben (d.h. mit Komponentenindizes), so sei $n_{\alpha\beta\gamma}$ die Anzahl der so erhaltenen Terme:*

$$n_{\alpha\beta\gamma} := \#(\textit{Eichinvariante Terme im Produkt } \phi_\alpha\phi_\beta\phi_\gamma) \tag{2.5.2.41}$$

Beispiel 2.5.6. *Multiplizität der top-Yukawakopplung*

$$h_t := h_{\bar{u}Qh} \tag{2.5.2.42}$$

- *$\bar{u}$ hat einen freien $SU(3)$-Index.*
- *h hat einen freien $SU(2)$-Index.*

[8] Vergleiche hierzu die im Anhang A eingeführten Bezeichnungen für die Teilchen. In diesem Fall ist $dim(\phi) = 19$ zerlegt worden in $2 + 6 + 1 + 3 + 3 + 2 + 2 = 15 + 4$.

Die Indizes von Q liegen dann eindeutig fest.
Folglich hat man $n_t = n_{\bar{u}Qh} = 6$.

Die weitere Berechnung wird stark vereinfacht, falls (wie beim MSSM) folgende ‘„Diagonalbedingung“ erfüllt ist:

Definition 2.5.7. *(Diagonalbedingung) Kennt man zwei Teilchen eines Vertizes, so gibt es höchstens eine Möglichkeit für den dritten. Formaler:*

$$\forall\alpha,\beta,\gamma \;\; h_{(\alpha\beta\gamma)} \neq 0 \Rightarrow h_{(\alpha\beta\gamma')} = 0 \;\; \forall\gamma' \neq \gamma \tag{2.5.2.43}$$

Offenbar ist dann A wirklich diagonal. Um nun A zu berechnen, fixiert man also eine Superfeldkomponente i und summiert über alle auftretenden Kopplungsprodukte multipliziert mit deren jeweiligen Multiplizität. Bei Verwendung von Teilchenindizes hat man noch durch die Dimension der jeweiligen Darstellung zu dividieren und erhält so z.B. für das MSSM:

Beispiel 2.5.8. *Yukawakopplungen der dritten Familie im MSSM*

Produkt	*Kopplung*	*Multiplizität*
$h_{\bar{u}Qh}\bar{u}Qh$	$h_t := h_{\bar{u}Qh}$	6
$h_{\bar{d}Q\bar{h}}\bar{d}Q\bar{h}$	$h_b := h_{\bar{d}Q\bar{h}}$	6
$h_{\bar{e}L\bar{h}}\bar{e}L\bar{h}$	$h_\tau := h_{\bar{e}L\bar{h}}$	2

Man erhält auf diese Weise in der $L, Q, \bar{e}, \bar{u}, \bar{d}, h, \bar{h}$*-Basis:*

$$\begin{aligned} A &= diag\left(\frac{2}{2}h_\tau^2, \frac{6}{6}h_t^2 + \frac{6}{6}h_b^2, \frac{2}{1}h_\tau^2, \frac{6}{3}h_t^2, \frac{6}{3}h_b^2, \frac{6}{2}h_t^2, \frac{6}{2}h_b^2 + \frac{2}{2}h_\tau^2\right) \\ &= diag(h_\tau^2, h_t^2 + h_b^2, 2h_\tau^2, 2h_t^2, 2h_b^2, 3h_t^2, 3h_b^2 + h_\tau^2) \end{aligned}$$

Der erste Teil der β*-Funktion ist also im gegebenen Beispiel:*

$$\begin{aligned} (16\pi^2)\beta_{h_t}|_A &= h_t(A_{\bar{u}\bar{u}} + A_{QQ} + A_{hh}) \\ &= h_t((2+1+3)h_t^2 + (0+1+0)h_b^2 + (0+0+0))h_\tau^2) \\ &= h_t(6h_t^2 + h_b^2) \qquad (2.5.2.44) \\ (16\pi^2)\beta_{h_b}|_A &= h_b(A_{\bar{d}\bar{d}} + A_{QQ} + A_{\bar{h}\bar{h}}) \\ &= h_b(h_t^2 + 6h_b^2 + h_\tau^2) \qquad (2.5.2.45) \\ (16\pi^2)\beta_{h_\tau}|_A &= h_\tau(A_{\bar{e}\bar{e}} + A_{LL} + A_{\bar{h}\bar{h}}) \\ &= h_\tau(3h_b^2 + 4h_\tau^2) \qquad (2.5.2.46) \end{aligned}$$

Berechnung von B

Für die Berechnung von B ist es nützlich, einen weiteren gruppentheoretischen Faktor einzuführen:

Definition 2.5.9. c_3
Sei G eine einfache Lie Gruppe, R eine irreduzible Darstellung in Standardbasis[9].
Dann definiert man c_3 auf ganz ähnliche Weise wie es für c_2 mit Gleichung (2.5.2) gemacht wurde:

$$c_3(R)\mathbf{1} := \sum_a R_a^2 \tag{2.5.2.47}$$

Bemerkung 2.5.10. *Für die $U(1)$ ist c_3 einfach das Ladungsquadrat.*

Bildet man die Spur, so folgt nun leicht eine nützliche Formel zur Berechnung von c_3 aus c_2:

$$\begin{aligned} c_3(R)dim(R) &= dim(G)c_2(R) \\ \Rightarrow c_3(R) &= \frac{dim(G)}{dim(R)}c_2(R) \end{aligned} \tag{2.5.2.48}$$

Für den vorliegenden allgemeineren Fall ($G' = G_1 \otimes ... \otimes G_m$) gilt dies „komponentenweise“:

$$(c_3(R))_i = \frac{dim(G_i)}{dim(R_\alpha)}(c_2(R_\alpha))_i \tag{2.5.2.49}$$

Alle relevanten c_3-Faktoren lassen sich auf diese Weise berechnen und sind in den Tabellen E.1 und E.2 im Anhang aufgeführt.

Bemerkung 2.5.11. *Diagonalgestalt von B:*
Verwendet man, wie oben angegeben, Standardbasen, so folgt, daß B stets Diagonalgestalt hat und wie folgt aussieht:

$$B = diag\left(\sum_i g_i^2 c_3(\phi_{\alpha_1})_i, \sum_i g_i^2 c_3(\phi_{\alpha_2})_i, ...\right) \tag{2.5.2.50}$$

Beispiel 2.5.12. *$c_3(Q)$ im MSSM*

[9]Damit ist eine Basis gemeint, wie sie bei Definition von c_2 in Gleichung (2.5.2) eingeführt wurde.

Q	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$
$\frac{dim(G)}{dim(R)}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$
c_2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{60}$
c_3	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{60}$

Auf diese Weise erhält man nun B für die Yukawakopplungen des MSSM in der Basis $(L, Q, \bar{e}, \bar{u}, \bar{d}, h, \bar{h})$:

$$\begin{aligned} B &= g_1^2 diag\left(\frac{9}{60}, \frac{1}{60}, \frac{36}{60}, \frac{16}{60}, \frac{4}{60}, \frac{9}{60}, \frac{9}{60}\right) \\ &+ g_2^2 diag\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \\ &+ g_3^2 diag\left(0, \frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0\right) \end{aligned} \tag{2.5.2.51}$$

Daraus folgen die B-Teile der β-Funktionen durch Summation:

$$\begin{aligned} (16\pi^2)\beta_{h_t}|_B &= -2h_t(B_{\bar{u}\bar{u}} + B_{QQ} + B_{hh}) = -h_t\left(\frac{13}{15}g_1^2 + 3g_2^2 + \frac{16}{3}g_3^2\right), \\ (16\pi^2)\beta_{h_b}|_B &= -2h_b(B_{\bar{d}\bar{d}} + B_{QQ} + B_{\bar{h}\bar{h}}) = -h_b\left(\frac{7}{15}g_1^2 + 3g_2^2 + \frac{16}{3}g_3^2\right), \\ (16\pi^2)\beta_{h_\tau}|_B &= -2h_\tau(B_{\bar{e}\bar{e}} + B_{LL} + B_{\bar{h}\bar{h}}) = -h_\tau\left(\frac{9}{5}g_1^2 + 3g_2^2 + 0g_3^2\right). \end{aligned} \tag{2.5.2.52}$$

Damit erhält man aus den beiden Beiträgen A und B folgendes Endergebnis:

$$\begin{aligned} \beta_{h_t} &= \frac{h_t}{16\pi^2}\left[(6h_t^2 + h_b^2 + 0h_\tau^2) - \left(\frac{13}{15}g_1^2 + 3g_2^2 + \frac{16}{3}g_3^2\right)\right], \\ \beta_{h_b} &= \frac{h_b}{16\pi^2}\left[(h_t^2 + 6h_b^2 + h_\tau^2) - \left(\frac{7}{15}g_1^2 + 3g_2^2 + \frac{16}{3}g_3^2\right)\right], \\ \beta_{h_\tau} &= \frac{h_\tau}{16\pi^2}\left[(0 + 3h_b^2 + 4h_\tau^2) - \left(\frac{9}{5}g_1^2 + 3g_2^2 + 0\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.5.2.53}$$

in Übereinstimmung mit [15]. Um einfachere Gleichungen zu erhalten, definiere ich analog zu dem Vorgehen bei den Eichkopplungen (2.5.2.9) wie folgt:

Eichkopplungen:

$$y_i := \frac{4\pi}{g_i^2} \tag{2.5.2.54}$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{8\pi}{g_i^3}\frac{\partial g_i}{\partial t} = -2y_i\frac{\beta_{g_i}}{g_i} \overset{1-loop}{=} -\frac{1}{2\pi}b_i \tag{2.5.2.55}$$

Yukawakopplungen:

$$y_{\alpha\beta\gamma} := \frac{4\pi}{h^2_{\alpha\beta\gamma}} \tag{2.5.2.56}$$

$$\frac{\partial y_{\alpha\beta\gamma}}{\partial t} = -\frac{8\pi}{h^3_{\alpha\beta\gamma}}\frac{\partial h_{\alpha\beta\gamma}}{\partial t} = -2y_{\alpha\beta\gamma}\frac{\beta_{h_{\alpha\beta\gamma}}}{h_{\alpha\beta\gamma}} \tag{2.5.2.57}$$

Die oben hergeleiteten Gleichungen lesen sich jetzt als:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_t}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi}y_t\left[-(\frac{6}{y_t}+\frac{1}{y_b}+\frac{0}{y_\tau})+(\frac{13}{15}\frac{1}{y_1}+3\frac{1}{y_2}+\frac{16}{3}\frac{1}{y_3})\right], \qquad (2.5.2.58)\\
\frac{\partial y_b}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi}y_b\left[-(\frac{1}{y_t}+\frac{6}{y_b}+\frac{1}{y_\tau})+(\frac{7}{5}\frac{1}{y_1}+3\frac{1}{y_2}+\frac{16}{3}\frac{1}{y_3})\right],\\
\frac{\partial y_\tau}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi}y_\tau\left[-(\frac{0}{y_t}+\frac{3}{y_b}+\frac{4}{y_\tau})+(\frac{9}{5}\frac{1}{y_1}+3\frac{1}{y_2}+0\frac{1}{y_3})\right].
\end{aligned}$$

Yukawakopplungen der dritten Familie in einem minimalen $SO(10)$-Modell

Mit Hilfe des Ergebnisses aus dem letzten Abschnitt ist es nun möglich, Kopplungen beispielsweise auf der schwachen Energieskala zu berechnen, vorausgesetzt man kennt diese Kopplungen auf der GUT-Skala.

Wie wir im folgenden sehen werden, kann man letztere in einem einfachen $SO(10)$-Modell und mit einigen einfachen Annahmen bis auf eine gemeinsame Konstante bestimmen. Weiterhin werden wir sehen, daß die Abhängigkeit des physikalisch relevanten Parameters $\tan\beta$ von diesem freien Parameter schwach genug ist, um noch eine Abschätzung für $\tan\beta$ zu erhalten.

Vorab sei der Grund für die Einschränkung auf die dritte Familie angegeben: Im Fall der dritten Familie kann man sich aufgrund der relativ hohen Massen am ehesten auf die Dominanz der tree-level Beiträge verlassen und diese als einzige Massenquelle annehmen.

Weiterhin nehme ich nun an, daß die Gruppe $SO(10)$ in einem Schritt (one step unification) auf die Symmetrie des MSSM reduziert wird [10] und der Teilcheninhalt minimal ist.

Das sich so ergebende Modell ist im Anhang C dargestellt. Zusammenfassend erhält man dort:

[10] In Abschnitt sec:SSB werde ich näher darauf eingehen, wie eine solche SSB ermöglicht werden kann.

Definition 2.5.13. *Einfachstes $SO(10)$-Modell*

Das einfachste $SO(10)$-Modell, das alle Teilchen des MSSM enthält, sieht wie folgt aus:

- *Teilcheninhalt: Das Modell besteht aus einer adjungierten Darstellung 45 von Vektorsuperfeldern (die Eichteilchen) und einer Darstellung R von chiralen Superfeldern (die „Materieteilchen“).*

$$R = 16_1 \oplus 16_2 \oplus 16_3 \oplus 10_H \oplus X \tag{2.5.2.59}$$

  Die Rolle der einzelnen irreduziblen Bestandteile von R ist wie folgt:

  - 16_i *Enthält alle Fermionen und S-Fermionen der i-ten Familie. Neben den 15 Teilchen einer Familie tritt hier ein weiteres chirales Teilchen auf, dessen Transformation unter $SU(5)$ (und damit auch unter G_{SM}) trivial ist. Dieses Teilchen wird sich später als der rechtshändige Partner des Neutrinos herausstellen.*
  - 10_H *enthält die Higgsteilchen h_u und h_d des MSSM.*
  - *X: Weitere Higgsteilchen, die für die SSB von $SO(10)$ benötigt werden (s. Anhang C). Diese sind in diesem einfachsten Modell nicht weiter relevant, da man sie aufgrund ihrer hohen Masse in der Größenordnung der GUT-Skala effektiv nicht zu betrachten braucht.*

- *Kopplungen: Um eichinvariante Terme im Superpotential zu erzeugen, bleiben einem (abgesehen von hier vernachlässigten eventuellen Kopplungen mit X) nur die trilinearen Kopplungen der Form $\lambda_{ij} 16_i \otimes 16_j \otimes 10_H$ übrig. Der Einfachheit halber nehme ich hier zudem an, daß λ diagonal ist. Weitere Detaills sind in Anhang C aufgeführt.*

Damit sieht man sogleich, daß die Yukawakopplungen der i-ten Familie ihren gemeinsamen Ursprung in der Kopplung $16_i \times 16_i \times 10_H$ haben. In diesem einfachen Fall folgt also [11]:

$$h_\tau(M_U) = h_b(M_U) = h_t(M_U) \tag{2.5.2.60}$$

Wenn man nun noch $h(M_U) = 1$ unterstellt, so erhält man beim nummerischen Integrieren der RGE (2.5.2.58) den in Abbildung 2.2 dargestellten Verlauf[12].

Natürlich ist die Wahl $h(M_U) = 1$ willkürlich. Die Veränderung dieses Parameters hat aber, wie die folgende Abbildung 2.3 zeigt, in weiten Grenzen nur vergleichsweise geringen Einfluß auf die resultierenden Yukawakopplungen an der schwachen Energieskala.

---

[11] Im Fall des im Anhang B diskutierten $SU(5)$-Modells würde man dagegen, nur eine teilweise Vereinigung der Kopplungen erwarten, da dort die Kopplungen (letztlich wegen der zwei Darstellungen A und F, die man pro Familie benötigt) ihren Ursprung in *zwei* $SU(5)$-Kopplungen haben: $AAH \to \bar{u}Qh, FA\bar{H} \to \bar{d}Q\bar{h}, \bar{e}L\bar{h}$. Man erhält so lediglich $h_\tau(M_U) = h_b(M_U)$.

[12] Zur numerischen Integration der in dieser Arbeit auftretenden gewöhnlichen Differentialgleichungen wurde ein Runge-Kutta-Allgorithmus verwendet, wie er in [16] vorgestellt wird.

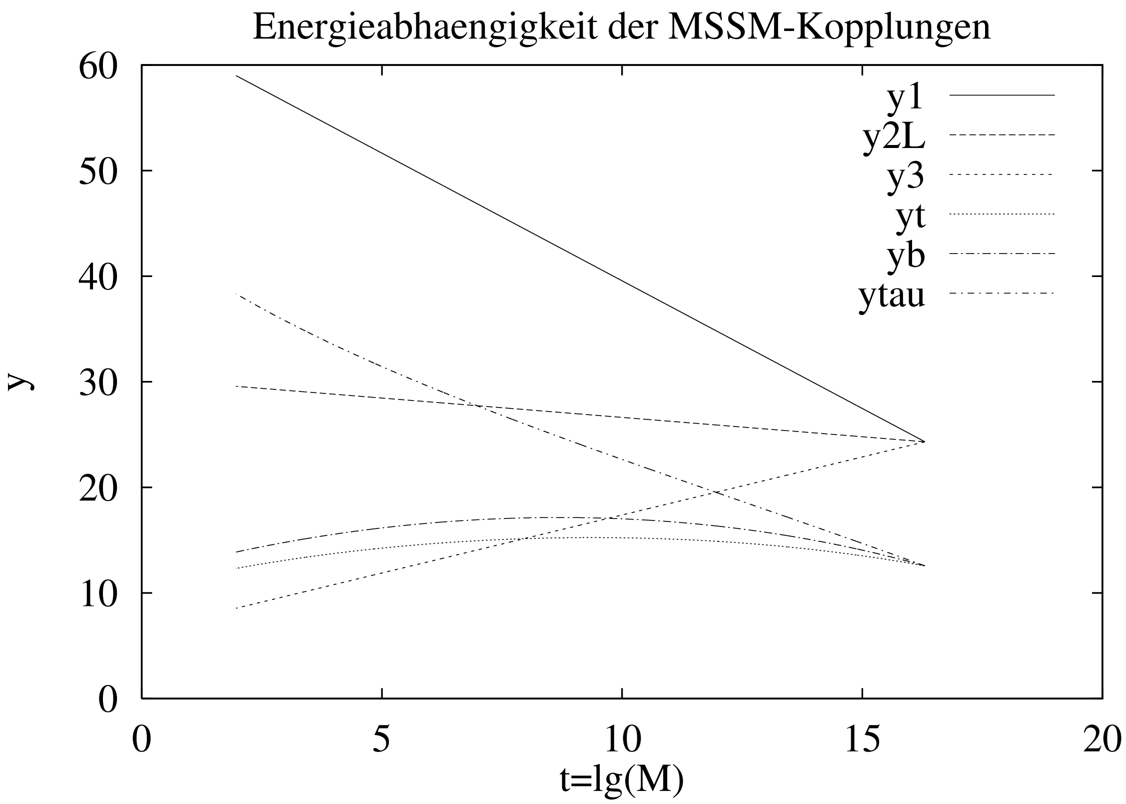

Abbildung 2.2: Die Kopplungen wie sie sich bei 1-step unification aus der 1-loop Rechnung ergeben, wenn man $h(M_U) = 1$ ansetzt. Aufgetragen sind die inversen Kopplungsquadrate y in Abhängigkeit des Skalenparameters t.

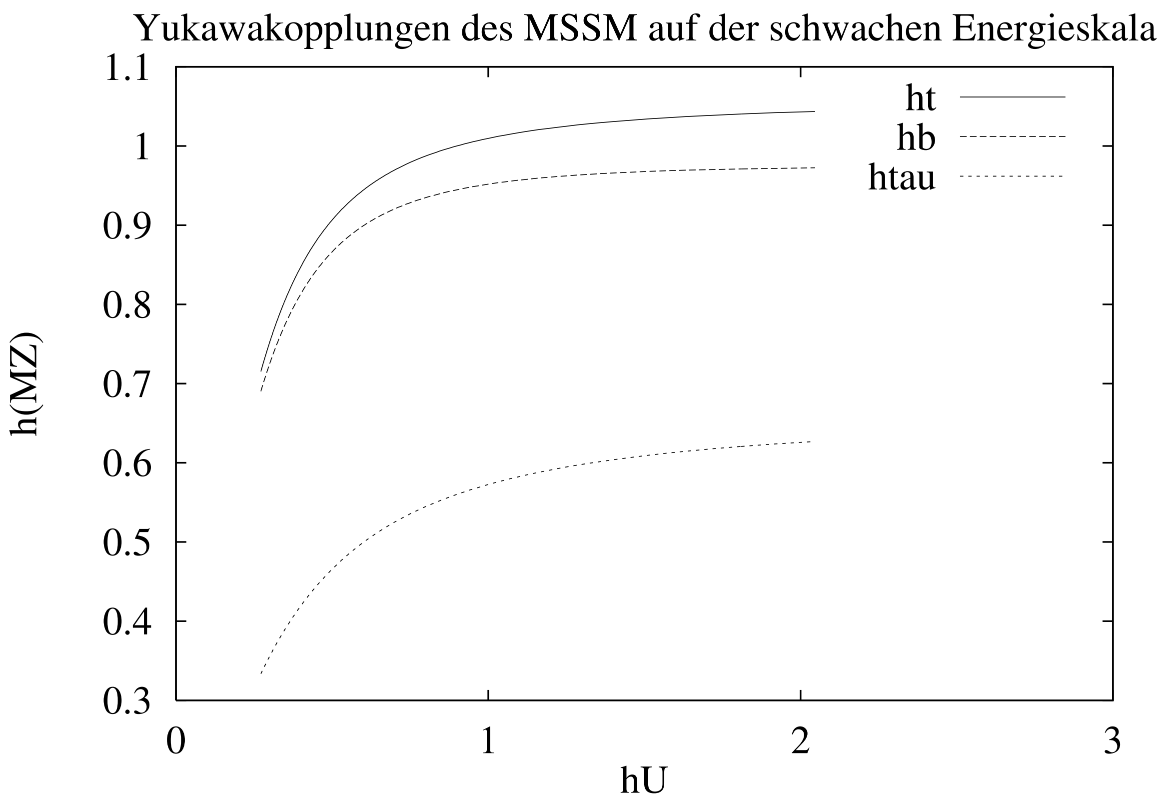

Abbildung 2.3: Die Werte der Yukawakopplungen auf der schwachen Skala in Abhängigkeit der Wahl von $h(M_U)$ bei einer 1-loop Rechnung. Aufgetragen ist der Wert der effektiven Yukawakopplungen an der Z-Masse in Abhängigkeit von deren gemeinsammen Wert an der GUT-Energie.

Die möglichen Werte für $h(M_U)$ können durch meßbare Größen eingeschränkt werden. Das gelingt, da die tree-level Massen (die hier als dominant angenommen werden) proportional zu den Yukawakopplungen sind:

$$\begin{aligned} m_t &= h_t v_u, \\ m_b &= h_b v_d, \\ m_\tau &= h_\tau v_d. \end{aligned} \tag{2.5.2.61}$$

Dabei bezeichnen v_u und v_d jeweils die vevs der Higgsteilchen h bzw. $\bar{h}$. Sieht man diese als unbekannt an, so ist es offenbar nützlich, R einzuführen:

Definition 2.5.14. *von R*

$$R(M) := \frac{m_b(M)}{m_\tau(M)}, \tag{2.5.2.62}$$

wobei M der Renormierungsparameter ist.

Man erkennt dann sogleich, daß $R(M) = \frac{h_b(M)}{h_\tau(M)}$; der Wert von R kann damit in Abhängigkeit von $h(M_U)$ berechnet werden. Andererseits kann R von der Definiton her aus den renormierten Massen berechnet werden und ist so letztlich durch m_b und m_τ gegeben. So findet man z.B. in [17] für den mit Experimenten verträglichen Bereich: $R(M_Z) \in [1,43;1,8]$.

Abbildung 2.4 zeigt den aus dem einfachen 1-step Modell berechneten Wert für R im Vergleich zur angegebenen Grenze.

Man hat also demnach $h(M_U) > 0,60$ zu wählen. Außerdem darf $h(M_U)$ in einer perturbativen Theorie nicht zu groß werden; ich nehme daher auch noch $h(M_U) < 3$ an.

Interessant ist es weiterhin, das Verhältnis

$$\tan(\beta) := \frac{v_u}{v_d} \tag{2.5.2.63}$$

im Rahmen dieses Modells zu bestimmen. Aus den Gleichungen (2.5.2.61) entnimmt man dazu leicht:

$$\tan\beta = \frac{m_t}{m_b}\frac{h_b}{h_t} \tag{2.5.2.64}$$

Nimmt man an, daß die (eigentlich renormierten) Massen m_t und m_b für die Energie M_Z näherungsweise durch die physikalischen Massen ($m_t \approx 175GeV, m_b \approx 4,25GeV$) gegeben sind, so erhält man auf diese Weise $\tan\beta$ in Abhängigkeit von $h(M_U)$.

Andererseits hat man alternativ auch die Möglichkeit, die relativ gute Kenntnis des elektroschwachen Vakuumerwartungswertes $v \approx \frac{1}{\sqrt{2}}245GeV$ über die Beziehung $v^2 = v_d^2 + v_u^2$ zu benutzen:

$$\tan\beta = \frac{v_u}{v_d} = \sqrt{(\frac{v}{v_d})^2 - 1} = \sqrt{(\frac{vh_b}{m_b})^2 - 1} \tag{2.5.2.65}$$

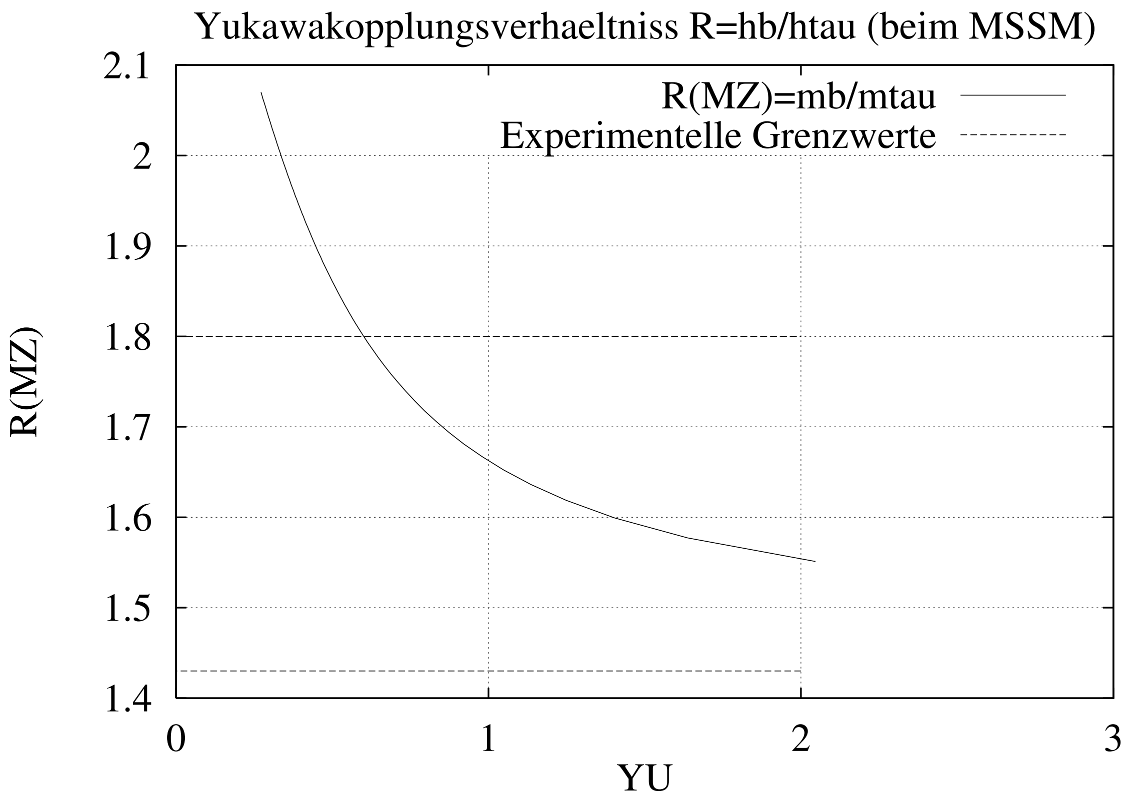

Abbildung 2.4: Dargestellt ist das R-Verhältnis $R(M_Z)$ wie es sich aus der 1-loop Rechnung aus dem Verhältnis $\frac{h_b(M_Z)}{h_\tau(M_Z)}$ in Abhängigkeit von $h(M_U)$ ergibt. Der experimetell erlaubte Bereich $R \in [1,43;1,8]$ ist ebenfalls eingetragen.

oder

$$\tan\beta = \frac{v_u}{v_d} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{v}{v_u})^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{vh_t}{m_t})^2 - 1}} \tag{2.5.2.66}$$

Die letzte Gleichung ist dabei problematisch, wie sich noch zeigen wird.

Trägt man die so erhaltenen drei Ausdrücke in Abhängigkeit von $h(M_U)$ als Parameter auf, so erhält man Abbildung 2.5.

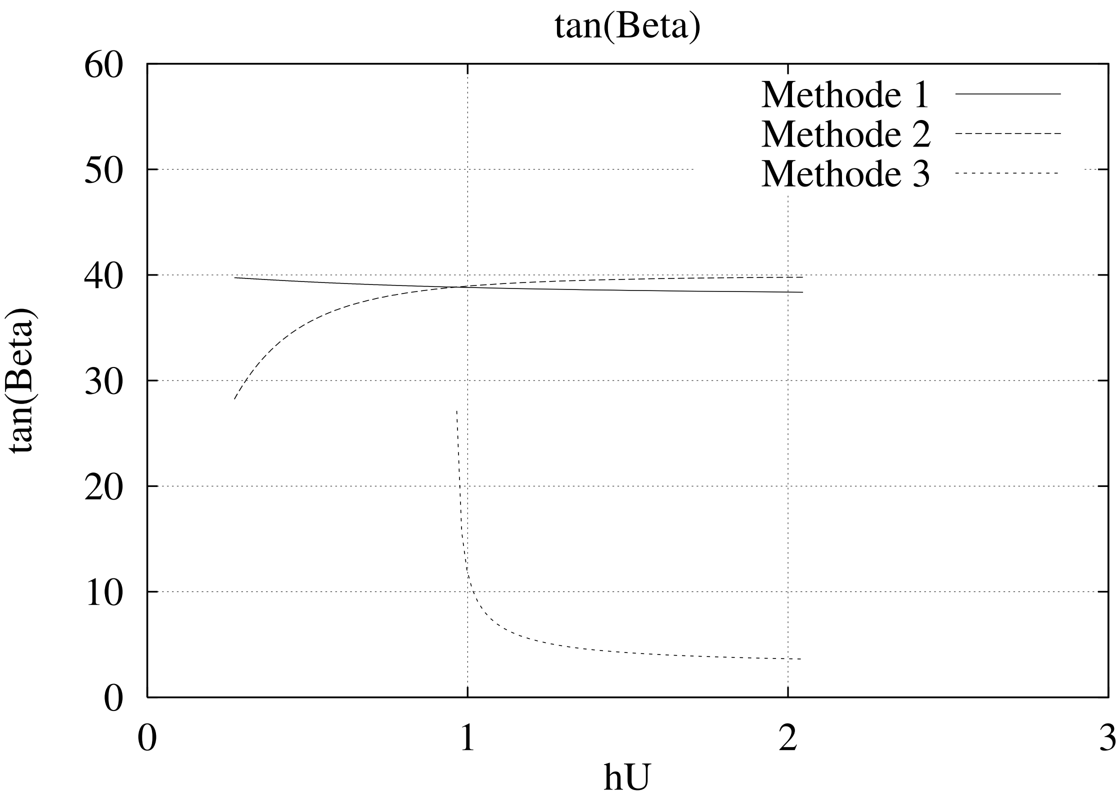

Abbildung 2.5: Aufgetragen ist $\tan(\beta)$ wie es sich aus den 1-loop Rechnungen ergibt, gegen den GUT-Skala Wert der Yukawakopplungen. Benutzt wurden verschiedene Berechnungsmethoden.

Während die beiden ersten Methoden (2.5.2.64) und (2.5.2.65) eine gute Übereinstimmung im erlaubten Parameterbereich zeigen (und somit als „cross-check“ die Rechnung stützen), sind die Werte der letzteren Methode (2.5.2.66) gänzlich verschieden. Die beobachtete Diskrepanz wird verständlich, wenn man die Konditionierung der letzten Methode untersucht: Die angegebene Abbildung ist von der Form $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Setzt man die bekannten Werte ein, so erhält man $x = \frac{vh_t}{m_t} \approx 1$. Dort ist $\frac{\partial f}{\partial x}(1+\delta) \approx -\frac{1}{(2\delta)^{\frac{3}{2}}}$ für $\delta \to 0$ divergent, und die Methode daher nicht sinvoll anwendbar.

Zusammenfassend erhält man folgendes

Resultat. *In diesem Modell ist* $\tan\beta \approx 40$.

2.6 SSB, Higgs Effekt, Vakuum und Massenspektrum

Zum Abschluß dieses Kapitels möchte ich auf den so wichtigen Vorgang der SSB eingehen. Die dafür benötigten Grundsteine wurden bereits in den vorangegangenen Abschnitten gelegt. Bei der *spontanen Symmetriebrechung* wird die (ursprünglich vorhandene) Symmetrie G zu einer kleineren Untergruppe G' reduziert.

Da man weder eine $SO(10)$- noch eine SUSY-invariante Struktur direkt in der Natur beobachtet, müssen diese Symmetrien beide gebrochen vorliegen.

2.6.1 Spontane Brechung der Eichsymmetrie

Die Eichgruppe

Durch Beschleunigerexperimente der 80er Jahre ist es gelungen die Symmetrie des Standardmodells G_{321} sichtbar werden zu lassen. Da diese Symmetrie in der Folgezeit in Präzisionsexperimenten auf hervorragende Weise bestätigt wurde, muß eine mögliche GUT-Gruppe jedenfalls G_{321} als Untergruppe enthalten.

Mathematisch gesehen sucht man nach einer Lie-Gruppe G, die G_{321} als Untergruppe enthält: $G > G_{321}$. Es folgt $rg(G) \geq rg(G_{321}) = 4$. Glücklicherweise liegt eine vollständige Klassifizierung der halbeinfachen Lie-Algebren vor (s. z.B. [5]), so daß man einen guten Überblick über die in Frage kommenden Kandidaten hat.

Wie in [18] bemerkt wurde, ist $SU(5)$ der einzige Kandidat mit Rang=4. Betrachtet man die Darstellungen von $SU(5)$, so wird deutlich daß eine solche Theorie tatsächlich möglich ist; Anhang B beschreibt sie kurz. Wie die nähere Analyse zeigt, ist jedoch vor allem das Dublett-Triplett-Split Problem praktisch nicht lösbar.

Als Kandidat mit Rang 5 bietet sich $SO(10)$ an. Die 16-dimensionale Spinordarstellung bietet einem die Möglichkeit eine gesamte Materiefamilie in einer irrep unterzubringen. Wie Anhang C zeigt ist es in der Tat möglich alle Teilchen mit ihren (MS-)MS Quantenzahlen auf diese Weise zu vereinheitlichen.

Wegen der komplexeren Struktur von $SO(10)$ im Vergleich zu $SU(5)$ ergibt sich eine viel größere Freiheit wie man die Symmetrie auf G_{321} bricht. Mathematisch äußert sich das in der Frage nach den *maximalen Untergruppen* von $SO(10)$, die G_{321} enthalten.

Wie in [19] diskutiert wird, ergeben sich die in Tabelle 2.2 aufgeführten Möglichkeiten.

Wie man erkennt enthalten die letzten drei der in der Tabelle aufgeführten Brechungsketten Zwischensymmetrien, die völlig symmetrisch in den Gruppen $SU(2)_R$ und $SU(2)_L$ sind. Modelle mit solchen Zwischenstufen werden in der Literatur als LR-(symmetrische) Modelle bezeichnet [20]. Die Existenz einer Zwischensymmetrie hat Auswirkungen auf die zu diskutierenden Fragen nach dem Protonzerfall und den Neutrinomassen. Das im nächsten Kapitel behandelte Modell weist eine Brechungskette der in Tabelle 2.2 zuletzt

Symmetrie				Higgsteilchen
$SO(10)$	$SU(5) \otimes U(1)$	$SU(5)$	G_{321}	$16, 45$
$SO(10)$	G_{422}		G_{321}	$54, 16$
$SO(10)$	G_{3122}		G_{321}	$45, 16$
$SO(10)$	G_{422}	G_{3122}	G_{321}	$54, 45, 16$

Tabelle 2.2: Brechungsketten der $SO(10)$ zu G_{321}

aufgeführten Art auf. Die darin auftretende Gruppe G_{422} wird in der Literatur häufig als „Pati-Salam"-Gruppe bezeichent. Die Untergruppe G_{422} entspricht einer Einschränkung von $SO(10)$ auf $SO(6) \otimes SO(4)$:

$$SO(10) > SO(6) \otimes SO(4) \equiv SU(4) \otimes SU(2) \otimes SU(2) \tag{2.6.2.1}$$

Vakuum und Vevs

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde entspricht das Brechen einer Eichsymmetrie der Auswahl eines nicht invarianten Vakuums. Aus Abschnitt 2.4.2 ist bekannt, daß sich das Vakuum aus dem vev von Teilchendarstellungen der Theorie ergibt. Daraus ergibt sich nun leicht folgende

Bemerkung 2.6.1. *Um die Eichgruppe G zu einer Untergruppe G' zu brechen benötigt man eine Darstellung, die eine Komponente enthält, die sich*

- *invariant unter G'*
- *aber nicht invariant unter G*

transformiert.

Da die gesuchte Theorie die Symmertrie $SO(10)$ haben soll, müssen alle in der Theorie auftauchenden Darstellungen und Kopplungen letztlich aus irreduziblen Darstellungen und Kopplungen der $SO(10)$ zusammengesetzt sein.

Schaut man sich die in Anhang E zusammengestellte Liste der irreps von $SO(10)$ an, so erkennt man leicht anhand der G'-Singletts welche Multipletts für die einzelnen Brechungsketten benötigt werden. Die entsprechenden Darstellungen sind in Tabelle 2.2 unter „Higgsteilchen" eingetragen.

Der Higgs-Mechanismus

Der Higgsmechanismus ermöglicht die SSB im Rahmen der QFT. Betrachtet sei der allgemeine Fall, daß eine Brechung von G auf $G' < G$ erfolgt. Das Szenario ist sehr ähnlich zum nicht-supersymmetrischen Fall:

Nimmt man an, daß das Minimum des effektiven Potentials nur noch G' invariant ist, so führt dies zunächst zu einem nicht-verschwindenden vev in (mindestens) einem der Supermultipletts. (Die Teilchen diese Multipletts sollen dann Higgsteilchen heißen.)

Wie man den Gleichungen (2.4.2.15) und (2.4.2.16) entnimmt, werden dadurch i.A. sowohl die Higgsteilchen als auch die Eichteilchen aus G/G' massiv. Und zwar in der Größenordnung der jeweiligen vevs.

Wenn die Masse eines Teilchens oberhalb der für einen Prozeß vorhandenen Energie liegt, sind lediglich virtuelle Wechselwirkungen mit einem solchen Teilchen möglich. Diese sind aber stark unterdrückt und können somit in guter Näherung vernachlässigt werden [13]

Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer *Kondensation* von Teilchen.

Die Massen der Eichteilchen in G/G' geben dadurch eine Massenskala vor, unterhalb derer die Symmetrie G effektiv zur Symmetrie G' gebrochen worden ist.

2.6.2 Spontane Brechung der Supersymmetrie

Da auch die SUSY zu den nicht beobachteten Symmetrien gehört, muß auch sie auf geeignete Weise gebrochen sein. Erinnert man sich an Bemerkung 2.4.6, so wird deutlich daß eine solche Symmetriebrechung im Rahmen der betrachteten Theorie nicht ohne weiteres möglich ist. In der Tat ist die SUSY-Brechung Gegenstand intensiver Forschung und selbst deren Ursache konnte bisher nicht entgültig geklärt werden. Eine Einführung in die Problematik findet man im Zusammenhang mit „soft breaking terms“ z.B. in [8] und eine ausführlichere Diskussion in [21].

Von Bedeutung für diese Arbeit ist die Tatsache, daß die SUSY-Brechung auf einer Energieskala von ca. $1TeV$ erwartet wird und damit –im Vergleich zur typischen GUT-Skala– sehr nah an der schwachen Energieskala liegt.

In dieser Arbeit werde ich daher durchweg die Annahme machen, daß sich die Theorie bis zur schwachen Energieskala wie eine ungebrochene supersymmetrische Theorie verhält.

[13] Die Präsenz solcher Teilchen macht sich aber in Prozessen bemerkbar, die zwar von der Symmetrie her erlaubt, jedoch unterhalb der Brechungsskala stark unterdrückt sind. Wichtige Beispiele die später diskutiert werden sind der Protonzerfall und der Einfluß den superschwere Majorana-Neutrinos ausüben.

Kapitel 3

Ein realistisches $SO(10)$-Modell

Im vorigen Kapitel habe ich Gründe vorgestellt, die für eine Vereinigung der Eichkopplungen sprechen. Dieses Kapitel will ich mit Gründen beginnen, die einer solchen Theorie entgegenstehen. Zu nennen ist vor allem das DTS-Problem, auf das man im Prinzip schon im Abschnitt 2.5.1 gestoßen war. Es ist ein weiterer großer Erfolg von $SO(10)$, daß dieses Problem anders als z.B. in $SU(5)$ eine einfache und natürliche Lösung besitzt.

Im Anschluß werde ich den DW-Mechanismus als einen solchen Lösungsansatz vorstellen, wie er z.B. in [22], [23] und [24] vorgestellt wurde. Motiviert dadurch wird dann ein spezielles Modell näher vorgestellt in dem der DW-Mechanismus auf ökonomische Weise realisiert wird.

Wie bisher soll die supersymmetrische Hochenergietheorie den Ausgangspunkt bilden. Gedanklich bewegt man sich also von einer symmetrischen Hochenergietheorie zu einer Theorie auf der schwachen Energieskala mit reduzierter Symmetrie.

3.1 Das DTS Problem

Setzt man voraus, daß die gesuchte GUT bei niedrigen Energien das MSSM (s. Anhang A) reproduzieren soll, so ist es naheliegend, zunächst mit einer minimale Version anzusetzen, wie sie in Anhang C geschildert ist. Wie schon dort bemerkt, ist ein solches Modell problematisch, was die Kondensation von Higgsfeldern betrifft, und dieses Problem ist ganz generisch:

Sei T eine GUT-Theorie mit Eichgruppe G, die sich bei niedrigen Energien auf das MSSM reduziert[1]. Sei weiterhin darin R die minimale Darstellung, die sich beim Brechen der Symmetrie auf die zwei Higgsdubletts des Standardmodells reduziert.

Dann enthält R definitionsgemäß Anteile, die sich unter $SU(2)_L$ (aufgefasst als Untergruppe von G) als Dubletts transformieren. Schaut man sich die angegebenen Brechungsketten an, so wird deutlich, daß dann R zwangsläufig auch Anteile enthält, die sich nichttrivial unter $SU(3)_c$ transformieren, und die ich kollektiv als Triplettanteile[2] bezeichne. Nun

[1] Das soll heißen dessen Symmetrie und effektiven Teilcheninhalt besitzt.

[2] Bei den in den Anhängen B und C diskutierten Modellen sind dies (wie der Name andeutet) tatsächlich

ist die Masse der Dubletts durch die Lage der schwachen Energieskala vorgegeben, so daß man eine vergleichbare Masse der Triplettanteile annehmen muß[3]. Das bringt aber gleich mehrere Probleme mit sich:

- Zunächst würde die niederenergetische Theorie nicht wirklich wie geplant auf das MSSM, sondern eine Erweiterung davon reduziert.

- Zudem würde die Vereinigung der Eichkopplungen gestört. Dazu erinnere ich an Abschnitt 2.5.1, in dem sich zeigte, daß die supersymmetrische one-step Vereinigung gerade den experimentell ermittelten Wert für die starke Kopplung ergab. Wie im Abschnitt 2.5.1 gesehen, würden die Triplettmultipletts zu einer Veränderung der b-Faktoren führen und diese Vorhersage zestören[4].

- Schließlich würden leichte Higgstripletts zu einem starken Protonzerfall über die (Triplett-)Higgsinos führen. Dies steht im Widerspruch zur beobachteten Stabilität des Protons.

Die Lösung dieser Probleme verlangt nach einer Möglichkeit, die Tripletts supermassiv zu machen (was sie effektiv aus der niederenergetischen Theorie entfernt), ohne dabei die Dublettanteile zu beeinflussen, die man im Vergleich als praktisch masselos ansehen kann. Es geht also darum eine (weitere) Massenquelle zu finden, die nur die Tripletts betrifft.

3.2 Der Dimopoulos-Wilczek Mechanismus

Hier setzt die Kernidee des DW-Mechanismus an. Benötigt wird eine Kopplung, die nur auf die Tripletts wirkt und diese analog zum Higgseffekt im SM massiv werden läßt. Natürlich ist eine solche Kopplung in der ungebrochenen $SO(10)$ nicht möglich. Nimmt man andererseits an, daß die Gruppe gebrochen wurde, so treten — wie bereits in 2.6.1 überlegt wurde — $SO(10)$-nicht invariante vevs auf. Schaut man sich die vevs an, die bei der Symmetriebrechung über die PS-Gruppe (vgl. 2.6.1) ohnehin benötigt werden, so sieht man, daß die adjungierte Darstellung eine vev-Strukur entwickelt, die für einen Split geeignet erscheint:

Aus der Matrixdarstellung (vgl. D.2.1) der adjungierten Darstellung sieht man leicht,

die dreidimensionalen fundamentalen bzw. kojugiert-fundamentalen Darstellungen. Die obige Argumentation benutzt nur die Tatsache, daß es sich nicht um $SU(3)_c$-Singletts handelt.

[3]Wären diese Anteile Singletts, so wäre die Situation entschärft und vergleichbar mit der beim rechtshändigen Neutrino ν (s. Anhang C) da die Tripletts aber nicht invariant unter G_{SM} sind, können sie nicht ohne weiteres unabhängig massiv gemacht werden.

[4]Die genauen Auswirkungen lassen sich wie in Abbschnitt 2.5.1 auf einfache Weise quantifizieren: Ohne DTS kondensiert nämlich R als ganze Darstellung (Dublett und Triplettanteile). Wie schon in Beobachtung 2.5.3 bemerkt führt die Präsenz solcher kompletten Darstellungen stets zu der gleichen Änderung der c_2-Faktoren. Eine solche Änderung hat damit *keinen* Einfluß darauf, wo sich die Kopplungen treffen, sondern nur bei welcher Kopplungsstärke sie das tun.

daß A folgende Komponente enthält:

$$\langle A\rangle = \begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ & \alpha & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.3.1}$$

mit

$$\alpha = a \cdot i\tau_2. \tag{3.2.3.2}$$

Die Idee besteht jetzt darin, das Higgsfeld H, das die MSSM-Higgsteilchen liefert, an A zu koppeln. Leider ist die einfachste Version HAH nicht möglich, da A als *antisymmetrischer* Tensor gebildet wurde (s. Anhang D.2.1). Um die vev-Struktur doch noch für das DTS nutzbar zu machen, fügt man eine weitere fundamentale Darstellung (10) hinzu. Man hat also H ersetzt durch H_1, H_2, und jetzt ist die Kopplung H_1AH_2 möglich. Der Effekt ist jetzt, daß alle Tripletts der H_i auf der Massenskala des vevs (gegeben durch a) massiv werden, während alle Dubletts leicht bleiben.

Damit scheint eine Lösung des DTS-Problems in Aussicht. Für das Funktionieren des DW-Mechanismus mußten wir allerdings den Preis zahlen, ein weiteres funamentales Higgsfeld einzuführen. Wie schon in 2.5.13 gesehen, enthält eine jede fundamentale Darstellung an sich schon zwei Dubletts, wie sie im SM benötigt werden. Nun haben wir aber insgesamt vier Dubletts eingeführt, so daß wir zwei davon wieder loswerden müssen, um den Verlauf der Eichkopplungen nicht zu gefährden. Weiterhin wird sich die Frage stellen, aus welchen Darstellungen sich die MSSM-Dubletts kombinieren. Soweit zur Grundidee des Mechanismus.

3.3 Das gewählte Modell

Das in [3] vorgestellte Modell stellt eine realistische Implementierung des DW-Mechanismuss dar. Das Modell sollte eine Erweiterung des in Anhang C Beschriebenen darstellen, um den Kontakt mit dem MSSM herzustellen. Frührere Lösungsversuche [22] basierten auf einer Erweiterung des einfachsten Modells um drei adjungierte chirale Multipletts[5]. Wie bemerkt wurde, erscheint es schwierig, so viele Tensoren zweiter Stufe (A,S) aus einer Stringtheorie zu erhalten. Daraufhin gab es Versuche [24, 25, 26], das Modell mit nur einer adjungierten Darstellung anzusetzen. Wie dort festgestellt wurde, macht eine solche Theorie massiv Gebrauch von nichtrenormierbaren Termen (wie sie z.B. von der Gravitation her kommen könnten), was Probleme unter anderem mit der Stabilität des Modells mit sich bringt.

[5] Eine solche Erweiterung beseitigt ein weiteres Problem des DW-Mechanismus: Für die Brechung von $SO(10)$ zu G_{SM} war es ja nötig, das Feld C einzuführen (s. C). Die Kopplung $AC\bar{C}$ bewirkt dann aber eine Destabilisierung der in A erzeugten Nullen. Andererseits kann man diese Kopplung nicht einfach verbieten, da die dann vorhandenen Goldstone-Teilchen (s. [23]) den Kopplungsverlauf beeinträchtigen würden.

Das weiterhin betrachtete Modell geht hier einen Mittelweg: Die Anzahl der Tensoren zweiter Stufe wird mit zwei adjungierten (45) und einer symmetrischen (54) festgelegt. Zur Symmetriebrechung des Modells benötigt man keine nichtrenormierbaren Terme; alle vevs sind bereits auf tree-level stabil.

Ich beginne die konkrete Beschreibung des Modells mit der Angabe des Teilcheninhalts in Tabelle 3.1. Die Ziele der einzelnen Multipletts lassen sich im einzelnen wie folgt

Multiplett	Name	Funktion
10	$H_i, i \in \{1..2\}$	MSSM-Higgsfelder
16	$\psi_i, i \in \{1..3\}$	Materiefamilien
$16 + \bar{16}$	$C, \bar{C}$	Brechung zu G_{SM}
$16 + \bar{16}$	$P, \bar{P}$	Massenquelle für extra-Dubletts
45	A	Kopplung an $C, \bar{C}$
45	$\bar{A}$	Brechung zu G_{3122}, DW-Vev
54	S	Brechung zu G_{422}, Kopplung an $A, \bar{A}$

Tabelle 3.1: Teilcheninhalt des vorgestellten Modells

verstehen:

- $\bar{A}$ soll die DW-vev Struktur bekommen und an die H_i koppeln. $\bar{A}$ bricht außerdem zur Gruppe G_{3122}.
- Die Felder $C, \bar{C}$ brechen die Symmetrie auf G_{SM} herunter.
- A: Damit $C, \bar{C}$ die DW-vev Struktur von $\bar{A}$ nicht stört, aber trotzdem keine Goldstone-Moden ungekoppelt verbleiben, wird $C, \bar{C}$ an A gekoppelt.
- Damit auch A keine Goldstone Moden entwickelt, werden A und $\bar{A}$ an S gekoppelt. S bricht außerdem die Symmetrie zur Gruppe G_{422}.
- $P, \bar{P}$ werden benutzt, um zwei der vier Dubletts von H_1, H_2 massiv werden zu lassen.
- H_1, H_2 enthalten die MSSM-Higgsteilchen.
- $\psi_i, i \in \{1..3\}$ sind die Materiefamilien.

Durch diesen Teilcheninhalt ist also die Brechungskette $SO(10) > G_{422} > G_{3122} > G_{321} = G_{SM}$ festgelegt, die wie schon in 2.6.1 beschrieben, eine LR-symmetrische Zwischenstufe aufweist.

Entsprechend der Bemerkung 2.4.2 fehlt zur Festlegung eines renormierbaren Modells nur noch die Angabe des Superpotentials. Dazu will ich zunächst untersuchen, welche Terme von der Symmetrie her möglich sind. Aus der Tabelle D.2 im Anhang sieht man, daß dies die folgenden Produkte sind:

- Terme 1. Ordnung: Es sind keine Terme erlaubt.

- Terme 2. Ordnung: Invariante Kombinationen sind enthalten in den Produkten: $10 \otimes 10, 16 \otimes \bar{16}, 45 \otimes 45, 54 \otimes 54$.

- Terme 3. Ordnung: Möglich sind die Kombinationen: $(10 \otimes 10)_a \otimes 45, 10 \otimes 10 \otimes 54, 10 \otimes 16 \otimes 16, 10 \otimes \bar{16} \otimes \bar{16}, 16 \otimes \bar{16} \otimes 45, (45 \otimes 45 \otimes 45)_a, 45 \otimes 45 \otimes 54, 45 \otimes 54 \otimes 54, 54 \otimes 54 \otimes 54$,

wobei die Notation $(..)_a$ den antisymmetrisierten Teil des jeweiligen Produkts bezeichnet. Das bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß beispielsweise die Kopplung $H_1 H_1 \bar{A}$ unmöglich, dagegen $H_1 H_2 \bar{A}$ möglich ist.

Aus der oben angegebenen Zielsetzung für die einzelnen Teilchen ist klar, daß man nicht alle Kombinationen zulassen kann. So muß z.B. ein Koppeln von $C, \bar{C}$ an $\bar{A}$ verhindert, dagegen die Kopplung an A ermöglicht werden.

Um dies auf eine „natürliche“ Weise zu tun, führen die Autoren folgende diskrete $\mathbb{Z}_8$-Symmetrie ein, die ich in Tabelle 3.2 additiv notiere.

Multiplett	Faktor
H_i	2
C	0
$\bar{C}$	0
P	-2
$\bar{P}$	-2
ψ_i	-1
A	0
$\bar{A}$	4
S	0

Tabelle 3.2: $\mathbb{Z}_8$-Ladungen der Multipletts

Zusammen mit dieser Symmetrie reduziert sich die Zahl der invarianten Produkte bis zur dritten Ordnung auf die in Tabelle 3.3 aufgeführten.

Das Transformationsverhalten unter der $\mathbb{Z}_8$ läßt sich aus den oben genanten Forderungen wie folgt ableiten. Dabei stehen in der nun folgenden Liste vorübergehend die Teilchennamen nur für deren $\mathbb{Z}_8$-Ladung.

- Um die Yukawakopplungen $\psi_i \psi_j H_k$ zu erlauben, ist $H := H_1 = H_2$ und $\psi := \psi_i$ zu wählen und $2H + \psi = 0$ zu fordern.

- Um $H_i H_j$ zu verbieten, ist $H \neq 0$ zu setzen. Ich wähle $H = 2$. Aus dem vorigen Punkt folgt dann $\psi = -1$.

- Um den DW-Mechanismus zu ermöglichen, braucht man $H_1 H_2 \bar{A}$ also $2H + \bar{A} = 0$ und folglich $\bar{A} = -4$.

- Um den destabilisierenden Term $H_1 H_2 A$ zu verbieten, muß andererseits $A \neq -4$ sein.

$SO(10)$ invariantes Produkt	$SO(10)\ \otimes\mathbb{Z}_8$ invariante Terme
$10 \otimes 10$	$-$
$16 \otimes \bar{1}6$	$C\bar{C}$
$45 \otimes 45$	$A^2, \bar{A}^2$
$54 \otimes 54$	S^2
$(10 \otimes 10)_a \otimes 45$	$H_1 H_2 \bar{A}$
$10 \otimes 10 \otimes 54$	$-$
$10 \otimes 16 \otimes 16$	$H_i PC$, $\psi_i \psi_j H_k$
$10 \otimes \bar{1}6 \otimes \bar{1}6$	$H_i \bar{P}\bar{C}$
$16 \otimes \bar{1}6 \otimes 45$	$P\bar{P}\bar{A}, C\bar{C}A$
$(45 \otimes 45 \otimes 45)_a$	$-$
$45 \otimes 45 \otimes 54$	$A^2S, \bar{A}^2S$
$45 \otimes 54 \otimes 54$	$-$
$54 \otimes 54 \otimes 54$	S^3

Tabelle 3.3: $SO(10) \times \mathbb{Z}_8$-invarianten Produkte

- Um die Massenterme A^2S und $\bar{A}^2S$ zu ermöglichen, muß $2A = 0$ sowie $2\bar{A} = 0$ sein. Daraus folgt nun $8 = 0$ (man hat also $\mathbb{Z}_8$ zu nehmen) und weiterhin $A = 0$.

- Um Goldstone-Modes zu verhindern, benötigen wir $P\bar{P}\bar{A}$, $C\bar{C}A, A^2S, \bar{A}^2S$. Daraus folgt $S = 0$ und $P\bar{P} = 4, C + \bar{C} = 0$.

- Um zwei der Dubletts in H_1, H_2 massiv zu machen, benötigt man H_iPC und $H_i\bar{P}\bar{C}$. Also $P + C = -2$ und $\bar{P} + \bar{C} = -2$.

- Die in den letzten beiden Pumkten verbleibenden Bedingungen lassen mehrere Lösungen zu (zu $C \in \{0; 2; 4; 5; 6\}$). Wählt man $C = 0$, so erhält man auch die Ladungen für $P, \bar{P}, C, \bar{C}$, wie sie oben angegeben worden sind.

Die Autoren von [3] teilen die so bestimmte allgemeinste Form des Superpotentials nach der Funktion der einzelnen Terme wie folgt auf:

$$\begin{aligned} W &= W_H + W_{DTS} + W_Y \qquad (3.3.3.1) \\ W_H &= M_S^2 + \lambda_S S^3 + M_A(A^2 + \beta\bar{A}^2) + \lambda_1 S(A^2 + \alpha\bar{A}^2) + 2M_C C\bar{C} - \lambda_C CA\bar{C} \\ W_{DTS} &= \lambda_H H_1 \bar{A} H_2 + CP(pH_1 + qH_2) + \bar{C}\bar{P}(p'H_1 + q'H_2) + \lambda_P P\bar{A}\bar{P} \\ W_Y &= h_{ab}\psi_a\psi_b H_2 + h'_{ab}\psi_a\psi_b H_1 \end{aligned}$$

Meine Darstellung weicht in zwei kleineren Punkten von der der Autoren von [3] ab:

- Im Ausdruck für W_H führen die Autoren zusätzlich einen Term $\gamma Tr(S)$ auf, der eigentlich kein Term im Superpotential ist, sondern vielmehr als Lagrange-Multiplikator bei der Minimierung verwendet werden kann, um Tr(S)=0 nach freier Variation aller symmetrischen S zu erzwingen.
- Im Ausdruck für W_Y erscheint bei den Autoren zusätzlich der nicht renormierbare Term $h''_{ab}\psi_a\psi_b AH/M + ...$ wie er z.B. von der Gravitation her induziert sein könnte. Da ich mich hier auf renormierbare Terme beschränke, nehme ich diesen Term nicht mit ins Superpotential auf.

3.3.1 Die Bedeutung der einzelnen Terme im Superpotential

- Der Term W_H stellt den Teil des Superpotentials dar, der für die Symmetriebrechung bis zur Gruppe G_{SM} zusammen mit einer stabilen DW-vev Struktur für $\bar{A}$ sorgt.
- Der Term W_{DTS} benutzt nun diese Strukur, um den Dublett-Triplett-Split in den Higgsteilchen H_i vorzunehmen. Weiterhin werden zwei der vier Dubletts der H_i-Multipletts massiv, wie ich im Detail später erläutern werde.
- Der Term W_Y schließlich koppelt die Materieteilchen über die üblichen Yukawakopplungen an die Higgsteilchen H_i. Auf diese Kopplungen komme ich im Abschnitt 3.5 noch zurück.

Detaillierter will ich bereits an dieser Stelle auf die Rolle von W_H eingehen.

3.3.2 Spontane Symmetriebrechung zur Gruppe G_{SM}

In diesem Abschnitt soll der Frage nach der Möglichkeit des gewünschten Vakuums nachgegangen werden. Diese Frage wird auch schon in [3] behandelt.

Mit Hilfe der Rechnungen im Anhang D.3.1 kann man die F-Terme (nach Gleichung (2.4.2.11)) direkt hinschreiben[6]:

$$
\begin{aligned}
-F_S^\dagger &= \frac{\partial}{\partial S}W = 2M_S S + 3\lambda_S S^2 + \lambda_1(A^2 + \alpha\bar{A}^2) + \gamma\mathbf{1}, && (3.3.3.2)\\
-F_A^\dagger &= \frac{\partial}{\partial A}W = -2M_A A - 2\lambda_1 SA - \frac{1}{4}\lambda_C C\Sigma\bar{C}, && (3.3.3.3)\\
-F_{\bar{A}}^\dagger|_{W_H} &= \frac{\partial}{\partial\bar{A}}W_H = -2M_A\beta\bar{A} - 2\lambda_1\alpha S\bar{A}, && (3.3.3.4)\\
-F_C^\dagger|_{W_H} &= \frac{\partial}{\partial C}W_H = \lambda_C[A\bar{C}] + M_C\bar{C}, && (3.3.3.5)\\
-F_{\bar{C}}^\dagger|_{W_H} &= \frac{\partial}{\partial\bar{C}}W_H = \lambda_C[CA] + M_C C. && (3.3.3.6)
\end{aligned}
$$

[6] Dabei habe ich hier wegen der eingeschränkten Variation bei S den Lagrangemultiplikator γ eingeführt. Weiterhin äußert sich das Transponieren in den im Anhang D.3.1 dargestellten Ausdrücken bei antisymmetrischen Teilen als Vorzeichen.

Falls es möglich ist, alle F-Terme simultan zum Verschwinden zu bringen, so haben wir das absolute Minimum gefunden, das dann zwangsläufig auch supersymmetrisch ist. Das gelingt tatsächlich. Die zu erfüllenden Gleichungen lauten:

$$2M_S S + 3\lambda_S S^2 + \lambda_1(A^2 + \alpha\bar{A}^2) + \gamma\mathbf{1} = 0, \tag{3.3.3.7}$$

$$2M_A A + 2\lambda_1 SA + \frac{1}{4}\lambda_C C\Sigma\bar{C} = 0, \tag{3.3.3.8}$$

$$2M_A\beta\bar{A} + 2\lambda_1\alpha S\bar{A} = 0, \tag{3.3.3.9}$$

$$\lambda_C A\bar{C} = 0, \tag{3.3.3.10}$$

$$\lambda_C CA = 0. \tag{3.3.3.11}$$

Aus Tabelle E.4 weiß man, daß die 54 eine Komponente enthält, die $SO(10)$ zur Untergruppe $SO(6) \otimes SO(4) = SU(4)_c \otimes SU(2)_R \otimes SU(2)_L$ brechen kann. Im Anschluß an diese Brechung kann ich eine Basis so wählen, daß $\langle S\rangle$ die folgende Form hat:

$$\langle S\rangle = \begin{pmatrix} \sigma & & & & \\ & \sigma & & & \\ & & \sigma & & \\ & & & -\frac{3}{2}\sigma & \\ & & & & -\frac{3}{2}\sigma \end{pmatrix} \tag{3.3.3.12}$$

mit

$$\sigma = s_1 \cdot \mathbf{1}_2. \tag{3.3.3.13}$$

Dann sind wegen Gleichung (3.3.3.7) jedenfalls auch A^2 und $\bar{A}^2$ diagonal und die Autoren parametrisieren sie wie folgt:

$$\langle A\rangle = \begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ & \alpha & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \beta & \\ & & & & \beta \end{pmatrix} \tag{3.3.3.14}$$

mit

$$\alpha = a \cdot i\tau_2, \tag{3.3.3.15}$$

$$\beta = b \cdot i\tau_2, \tag{3.3.3.16}$$

und

$$\langle \bar{A}\rangle = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & & & & \\ & \bar{\alpha} & & & \\ & & \bar{\alpha} & & \\ & & & \bar{\beta} & \\ & & & & \bar{\beta} \end{pmatrix} \tag{3.3.3.17}$$

mit

$$\bar{\alpha} = \bar{a} \cdot i\tau_2, \tag{3.3.3.18}$$
$$\bar{\beta} = \bar{b} \cdot i\tau_2. \tag{3.3.3.19}$$

Weiterhin müssen die vevs von C und $\bar{C}$ gleich gewählt werden, um auch die D-Terme zum Verschwinden zu bringen (s. Gleichung (2.4.2.10)). Da C die Aufgabe hat, Brechung zu G_{SM} durchzuführen, muß man annehmen, daß:

$$\langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle = v e_{\bar{\nu}} \tag{3.3.3.20}$$

Dabei bezeichnet $e_{\bar{\nu}}$ die G_{SM}-Singlett Komponente von C [7].

Die Gleichungen (3.3.3.7) reduzieren sich also auf die Gleichungen in den Unbekannten $s_1, a, b, \bar{a}, \bar{b}$ und v wie sie in [3] diskutiert werden.

Diese Gleichungen haben, wie dort gezeigt wird, tatsächlich eine Lösung mit $\bar{b} = 0$, wie sie für den DW-Mechanismus benötigt wird.

3.4 Eichkopplungsverlauf und Vereinigungsbedingung

Zu Beginn der Analyse stelle ich noch einmal explizit die gemachten Annahmen zusammen:

- Approximation RGE in 1-loop Ordnung.
- „scharfes" Entkoppeln: Teilchen, die schwerer als die betrachtete Energie sind, werden als vollständig kondensiert behandelt, und deren geringer Einfluss auf die Entwicklung der Kopplungen bei Energien unterhalb deren Masse wird vernachlässigt.
- Weiterhin wird angenommen, daß die chiralen Massen im wesentlichen durch F-Terme zustande kommen. D-Term-Beiträge werden vernachlässigt; solange die Eichkopplungen nicht zu groß werden, ist diese Annahme gerechtfertigt.
- Die Parameter im Superpotential können frei gewählt werden.

Im folgenden will ich die Vereinigung der Eichkopplungen unterstellen und daraus Beschränkungen für die freien Parameter des Modells ableiten. Erinnert man sich an die Ergebnisse aus Abschnitt 2.5.1, so wird klar, daß die Eichkopplung eines jeden Gruppenfaktors im dort definierten Koordinatensystem durch eine Gerade beschrieben wird. Wird ein Vektorboson massiv, so wird die Symmetrie gebrochen, und die Gerade teilt sich auf in mehrere Geraden, die zu den jeweiligen daraus kombinierten Gruppenfaktoren gehören. Nimmt man weiter der Einfachheit halber an, daß die chiralen Teilchen gemeinsam mit den Vektorteilchen massiv werden (Survival-Hypothese (s. [27]), so sind die Geradensteigungen zwischen den SSB-Stufen konstant. (Diese Annahme werde ich später fallen lassen.)

Die weitere Analyse besteht entsprechend aus den zwei Schritten:

---

[7] Diese Komponente würde in der im Anhang D.2.1 angegebenen Realisierung dem Term $e_{\bar{\nu}} = \Psi_0 \chi_1^\dagger \chi_2^\dagger \chi_3^\dagger \chi_4^\dagger \chi_5^\dagger$ entsprechen.

- „Matching“ der Geraden,
- Bestimmung der Steigungen.

3.4.1 „Matching“ der Geraden

Nehmen wir zunächst den Fall an, daß die ursprüngliche Symmetrie G in n Untergruppen bricht: $G'_1 \times G'_2 \times ... \times G'_n < G$. Dann sind die Generatoren der Untergruppen Linearkombinationen, aus denen von G und bei der in Abschnitt 2.5.1 angegebenen konsistenten Normierung folgt einfach $g'_i(M) = g(M)\ \forall i \in \{1..n\}$, wobei M die Brechungsenergie und g die Eichkopplungen der ursprünglichen und g'_i diejenigen der Untergruppen bezeichnen.

In der betrachteten Brechungskette tritt aber auch der Fall auf, daß gebrochene Gruppen aus *zwei* Gruppen kombiniert werden. (Dies ist übrigens auch schon der Fall, wenn man das (MS-)SM zur elektromagnetischen Theorie bricht.)

Die gebrochene Gruppe G' setzt sich dann aus Untergruppen der beiden ursprünglichen Gruppen G_1, G_2 zusammen. Die Generatoren von G kombinieren sich daher aus denen beider Gruppen. Im vorliegenden Fall ($G' = U(1)_Y, G_1 = U(1)_{B-L}, G_2 = SU(2)_R$) ergibt sich:

$$T_{U(1)_Y} = pT_{U(1)_{B-L}} + qT_{SU(2)_R} \tag{3.4.3.1}$$

Um p und q zu bestimmen, bemerkt man zunächst, daß, um die Normierung zu erhalten, $p^2 + q^2 = 1$ gelten muß. Weiterhin sollten die Teilchen die geforderten Quantenzahlen tragen. Die folgende Tabelle zeigt dazu die Ladungen an den Beispielen des Elektrons und des up-Quarks.

Teilchen	$\mathbf{U(1)_Y}$	$\mathbf{U(1)_{B-L}}$	$\mathbf{SU(2)_R}$
e^-	$-3\frac{1}{\sqrt{60}}$	δ	0
u	$1\frac{1}{\sqrt{60}}$	$-\frac{\delta}{3}$	0
e^+	$6\frac{1}{\sqrt{60}}$	$-\delta$	$\frac{1}{2}$
u^c	$-4\frac{1}{\sqrt{60}}$	$\frac{\delta}{3}$	$-\frac{1}{2}$

Es folgt zunächst $p^2 = \frac{2}{5}, \delta^2 = \frac{3}{8}$; mit Hilfe der ersten Zeile sieht man dann, daß

$$p = \sqrt{\frac{2}{5}},\ q = \sqrt{\frac{3}{5}},\ \delta = -\sqrt{\frac{3}{8}} \tag{3.4.3.2}$$

die eindeutige Lösung ist. Damit liegen nun alle Anschlußbedingungen für die Eichkopplungen vor, und man erhält generisch eine Situation, wie sie in Abbildung 3.1 dargestellt ist.

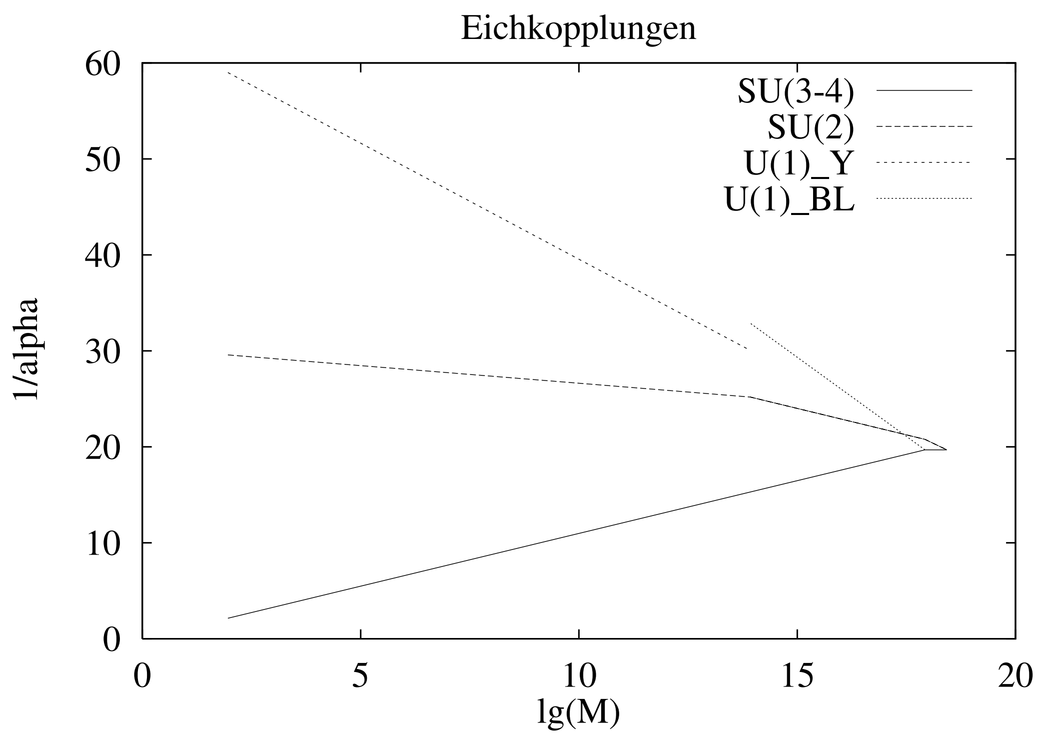

Abbildung 3.1: Generischer Verlauf der Kopplungen in (t,y)-Koordinaten. Gewählt wurden die Parameter $dRC = 4$, $dCU = 0.5$. Gezeichnet sind die Kopplungen der auftretenden Gruppen. Die Kopplung $SU(2)_R$ wird von $SU(2)_L$ überlagert.

Die Vereinigung der Eichkopplungen entspricht nun also einem „Anstückeln“ dieser Geraden. Bekannt sind deren sämtliche Steigungen (aus dem Teilcheninhalt) sowie deren Werte an der Energie der schwachen Wechselwirkung[8]:

$$t_Z = ln(M_Z), \tag{3.4.3.3}$$
$$d_{ij} := x_j - x_i, \tag{3.4.3.4}$$
$$y_1' - y_1 = a_1^{(Z)} d_{ZR}, \tag{3.4.3.5}$$
$$y_u - y_{2L} = a_{2L}^{(Z)} d_{ZR} + a_{2L}^{(R)} d_{RC} + a_{2L}^{(C)} d_{CU}, \tag{3.4.3.6}$$
$$y_4 - y_3 = a_3^{(Z)} d_{ZR} + a_3^{(R)} d_{RC}, \tag{3.4.3.7}$$
$$y_u - y_{2R} = a_{2R}^{(R)} d_{RC} + a_{2R}^{(C)} d_{CU}, \tag{3.4.3.8}$$
$$y_4 - y_{BL} = a_{BL}^{(R)} d_{RC}, \tag{3.4.3.9}$$
$$y_U - y_4 = a_4^{(C)} d_{CU}, \tag{3.4.3.10}$$
$$y_1' = p^2 y_{BL} + (1-p^2) y_{2R}. \tag{3.4.3.11}$$

Nimmt man also an, daß $y_1 \approx 59,00$ und $y_{2L} \approx 29,57$ auf schwacher Energie bekannt sind[9], so löst man obiges Gleichungssystem am besten wie folgt auf:

$$d_{ZR} = \frac{1}{a_1 - a_{2L}}(y_{2L} - y_1 + [a_{2L} - a_{2R} + p^2(a_{2R} - a_{BL})]d_{RC}, \tag{3.4.3.12}$$
$$+[a_{2L} - a_{2R} + p^2(a_{2R} - a_4)]d_{CU}), \tag{3.4.3.13}$$
$$y_U = y_{2L} + a_{2L} d_{ZR} + a_{2L} d_{RC} + a_{2L} d_{CU}, \tag{3.4.3.14}$$
$$y_3 = y_{2L} + (a_{2L} - a_3) d_{ZR} + (a_{2L} - a_3) d_{RC} + (a_{2L} - a_4) d_{CU}. \tag{3.4.3.15}$$

Um die Vereinigungsbedingung zu berücksichtigen, benutze ich dementsprechend eine Erweiterung des bereits in 2.5.1 angewendeten Verfahrens um die zusätzlichen Parameter dRC und dCU.

Um diese Gleichungen zu verwenden, benötigt man noch die Werte der darin auftretenden Steigungen.

3.4.2 Bestimmung der Steigungen

Präsenz von Teilchen

Zur Bestimmung der Geradensteigungen ist es zuächst wichtig zu klären, welche Teilchen bei einer bestimmten Energie effektiv in der Theorie vorhanden sind und welche aufgrund

[8]Dabei macht man allerdings die Näherung, bis auf die Z-Masse herunter mit der supersymmetrischen Theorie zu extrapolieren, während eigentlich die SUSY-Brechung bei c.a. 1TeV vermutet wird. Der Unterschied wird aber vergleichsweise gering sein, da die Änderung der Geradensteigungen nur den logarithmisch gesehen schmalen Energiebereich von etwa einer Zehnerpotenz unter 14 Zehnerpotenzen betrifft.

[9]Diese Konstanten wurden bereits in 2.5.1 aus den experimentellen Daten bestimmt.

ihrer Masse bereits kondensiert sind. Wie in Abschnitt 2.6.1 bemerkt wurde (vgl. auch Gleichung (2.4.2.16), entspricht die Massenskala der Eichteilchen der Ennergie, an der die Eichsymmetrie gebrochen wird. Vektormultipletts werden daher an der jeweiligen Brechungsenergie reduziert.

Die chiralen Multiplets erhalten ihre Massen –nach der gemachten Annahme– durch F-Terme (vgl. (2.4.2.15)). Ihre Massenskalen sind daher nicht direkt mit denen der Vektorteilchen verknüpt. Eine Beziehung kommt aber in Fällen zustande, bei denen die chiralen Massen durch vev-Terme bedingt sind, die nach Abschnitt 2.6.1 die Verbindung mit der jeweiligen Brechungsskala liefern.

Um die Geradensteigungen zu berechnen, ist es nach 2.5.1 nötig, die Koeffizienten c_1 und c_2 für die jeweilige Kopplung zu bestimmen. Hilfreich sind hierbei Tabellen, in denen zu jeder Irrep deren Index angegeben ist, wie sie z.B. in [28] S.92ff zu finden sind. Der dort benutzte Index l hängt mit der hier benutzten Konvention wie folgt zusammen (wie man leicht an der fundamentalen Darstellung nachprüfen kann):

$$c_2(R) = l(R)/2. \tag{3.4.3.16}$$

Beiträge von Teilchen zu b-Faktoren

Berechnung von c_1:
Nach den Bemerkungen in 2.5.1 gilt $c_1(G) = c_2(ad)$. Damit erhält man:

G	$SO(10)$	$SU(4)$	$SU(2)$	$SU(2)$	$SU(3)$	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(2)$	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$
c_1	8	4	2	2	3	0	2	2	3	2	0

Berechnung von c_2:
Offenbar genügt es, sich die c_2-Faktoren der irreduzibeln Darstellungen anzusehen. Ich liste diese daher im Anhang E auf, zusammen mit den irreduziblen Darstellungen der gebrochenen Gruppen, in die eine jede $SO(10)$-Darstellung zerbricht [10].

Ich schließe diesen Abschnitt mit folgender

Bemerkung 3.4.1. *Der aufsummierte Beitrag einer jeden $SO(10)$–Darstellung liefert für jeden Gruppenfaktor den gleichen Wert, den die $SO(10)$–Darstellung selbst hat. Die Behandlung* vollständiger *Darstellungen (d.h. solche, bei denen nicht nur Teile „überleben“) ist daher sehr einfach.*

Wie ewähnt, nehme ich an, daß die Teilchen ihre Massen (im wesentlichen) durch die schon in Abschnitt 2.4.2 angegebenen F-Terme erhalten. Die Tree-level Massen lassen sich dann direkt aus dem Superpotential (3.3.3.1) ablesen. Die sich so ergebenden Massenquellen sind in Tabelle 3.4 aufgeführt.

[10] Dabei sind wie üblich die irreduziblen Darstellungen in der Regel durch ihre Dimension bezeichnet, mit Ausnahmen der $U(1)$-Darstellungen, die statt dessen mit den jeweiligen Quantenzahlen bezeichnet werden.

Art der Quelle	**Teilchen**	**SUPO-Term**	**F-Term**
direkt	S	$M_S S^2$	F_S
	A	$M_A A^2$	F_A
	$\bar{A}$	$\beta M_A \bar{A}^2$	$F_{\bar{A}}$
	C	$2M_C C\bar{C}$	$F_{\bar{C}}$
	$\bar{C}$	"	F_C
$\langle\bar{A}\rangle$	$P_{trip.}$	$\lambda_P P\bar{A}\bar{P}$	$F_{\bar{P}}$
	$\bar{P}_{trip.}$	"	F_P
$E < M_C$	$H_{1trip.}$	$\lambda_H H_1 \bar{A} H_2$	F_{H_2}
	$H_{2trip.}$	"	F_{H_1}
$\langle C\rangle, \langle\bar{C}\rangle$	$P_{doub.}$	$CP(pH_1 + qH_2)$	F_{H_i}
	$\bar{P}_{doub.}$	$\bar{C}\bar{P}(p'H_1 + q'H_2)$	F_{H_i}
$E < M_R$	$H_{1doub.}$	$(pCP + p'\bar{C}\bar{P})H_1$	$F_P, F_{\bar{P}}$
	$H_{2doub.}$	$(qCP + q'\bar{C}\bar{P})H_2$	$F_P, F_{\bar{P}}$

Tabelle 3.4: Massenquellen chiraler Multipletts

Im folgenden werde ich nun, basierend auf diesen Massen, die b-Faktoren bestimmen.

Zunächst zu den in der Tabelle 3.4 auftretenden vevs:

$$\langle A\rangle = 0, \tag{3.4.3.17}$$

$$\langle\bar{A}\rangle = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & & & & \\ & \bar{\alpha} & & & \\ & & \bar{\alpha} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4.3.18}$$

$$\text{mit} \quad \bar{\alpha} = \bar{a}\cdot i\tau_2, \tag{3.4.3.19}$$

$$\langle C\rangle_{\nu^c} = v, \tag{3.4.3.20}$$

$$\langle\bar{C}\rangle_{\nu^c} = v. \tag{3.4.3.21}$$

Alle anderen Komponenten von C haben vev 0.

Die Analyse ist im Fall der Felder $S, A, \bar{A}, C, \bar{C}$ vergleichsweise einfach, da sie jeweils als ganze Darstellung massiv werden. Um dagegen die Massen der einzelnen *Bestandteile* der Felder $P, \bar{P}, H_1, H_2$ zu bestimmen, ist es nützlich, sich daran zu erinnern, wieviele $SU(2)_L$-Dubletts in den Darstellungen 10 und 16 enthalten sind. Wie man aus den Tabellen E.1, E.2 ersieht, findet man für die Anzahl von enthaltenen Dubletts:

Darstellung	u	d
10	1	1
16	1	0

Wobei u(=up)-Typ einer Transformation mit der fundamentalen Darstellung 2, d(=down)-Typ einer Transformation mit deren konjugierten $\bar{2}$ der $SU(2)_L$ bezeichnen. Damit folgt:

Teilchen	u	d
$P+\bar{P}$	1	1
$C+\bar{C}$	1	1
H_1	1	1
H_2	1	1

Folglich sind ursprünglich jeweils vier up- und vier down-Type Dubletts in der Theorie. Davon müssen jeweils drei bei Energien oberhalb der schwachen Skala kondensieren. Genau das wird auch erreicht, wie man sieht, wenn man sich die Dublett-Massen im Detail anschaut:
Das Dublett aus P koppelt als up-Typ nur mit down-Typ Dubletts (damit sich insgesamt ein Singlett ergibt). Daraus folgen mit

$$\begin{aligned} \langle C\rangle &= \langle \bar{C}\rangle = v, & (3.4.3.22)\\ P(\Phi)|_{doubl} &= v(pPH_{1d} + qPH_{2d} + p'\bar{P}H_{1u} + q'\bar{P}H_{2u}) & (3.4.3.23)\end{aligned}$$

die effektiven F-Terme:

$$\begin{aligned} F_{H_{1u}} &= vpP, & (3.4.3.24)\\ F_{H_{2u}} &= vqP, & (3.4.3.25)\\ F_{H_{1d}} &= vp'\bar{P}, & (3.4.3.26)\\ F_{H_{2d}} &= vq'\bar{P}, & (3.4.3.27)\\ F_{P_{doub}} &= pvH_{1d} + qvH_{2d} = v\sqrt{p^2+q^2}H'_d, & (3.4.3.28)\\ F_{\bar{P}_{doub}} &= p'vH_{1u} + q'vH_{2u} = v\sqrt{p'^2+q'^2}H'_u, & (3.4.3.29)\end{aligned}$$

wobei ich die Masseneigenzustände einführe:

$$\begin{aligned} H'_u &:= \frac{1}{\sqrt{p'^2+q'^2}}(p'H_{1u} + q'H_{2u}),\\ H'_d &:= \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(pH_{1d} + qH_{2d}). & (3.4.3.30)\end{aligned}$$

Die (im Rahmen dieser Kopplungen) masselosen Dubletts ergeben sind dann als orthogonale Kombinationen:

$$
\begin{aligned}
H_u &:= \frac{1}{\sqrt{p'^2+q'^2}}(-q'H_{1u}+p'H_{2u}),\\
H_d &:= \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(-qH_{1d}+pH_{2d}).
\end{aligned} \tag{3.4.3.31}
$$

Damit erhält man insgesamt folgendes Massenspektrum:

$$m^2(S) = M_S, \tag{3.4.3.32}$$
$$m^2(A) = M_A, \tag{3.4.3.33}$$
$$m^2(\bar{A}) = \beta M_A, \tag{3.4.3.34}$$
$$m^2(C) = M_C. \tag{3.4.3.35}$$
$$\tag{3.4.3.36}$$

Tripletts:

$$m^2(P_{trip}) = (\lambda_P \bar{a})^2, \tag{3.4.3.37}$$
$$m^2(\bar{P}_{trip}) = (\lambda_P \bar{a})^2, \tag{3.4.3.38}$$
$$m^2(H_{1trip}) = (\lambda_H \bar{a})^2, \tag{3.4.3.39}$$
$$m^2(H_{2trip}) = (\lambda_H \bar{a})^2. \tag{3.4.3.40}$$

Dubletts:

$$m^2(P_{doub}) = v^2(p^2+q^2), \tag{3.4.3.41}$$
$$m^2(\bar{P}_{doub}) = v^2(p'^2+q'^2), \tag{3.4.3.42}$$
$$m^2(H'_u) = v^2(p'^2+q'^2), \tag{3.4.3.43}$$
$$m^2(H'_d) = v^2(p^2+q^2), \tag{3.4.3.44}$$
$$m^2(H_u) = 0, \tag{3.4.3.45}$$
$$m^2(H_d) = 0. \tag{3.4.3.46}$$

Man sieht nun auch, daß, wie gefordert, genau ein up- und ein down-Typ Dublett bis zur schwachen Energieskala masselos bleibt. (Diese werden dann, wie üblich im MSSM, beim Brechen der Gruppe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ massiv.)

Ich gehe nun auf die freien Parameter für die Massen im „DTS-System“ $P, \bar{P}, H_1, H_2$ ein. Offenbar hängen diese von vier Parametern ab:

- Tripletts:
  $m^2(P_{trip}) = m^2(\bar{P}_{trip}) = (\lambda_P \bar{a})^2$,
  $m^2(H_{1trip}) = m^2(H_{2trip}) = (\lambda_H \bar{a})^2$.

- Dubletts:
  $m^2(P_{doub}) = m^2(H'_d) = v^2(p^2+q^2)$,
  $m^2(\bar{P}_{doub}) = m^2(H'_u) = v^2(p'^2+q'^2)$.

Um nun die b-Faktoren für die einzelnen Gruppen zu bestimmen, müsste man eigentlich bei jeder Kondensation mit geänderten b-Faktoren weiterrechnen. Um diese Rechnung einfacher zu halten, gehe ich folgendermaßen vor:

Für jede Zwischensymmetrie berechne ich b-Faktoren; das Kondensieren von Teilchen innerhalb dieser Zwischensymmetrie berücksichtige ich effektiv dadurch, daß das entsprechende Teilchen nur *anteilmässig* zu den b-Faktoren beiträgt.

Ich ersetze also die vier oben genannten Parameter durch die folgenden:

- $\tau_P :=$ Anteil, mit dem $P+\bar{P}$ Tripletts in $[M_R; M_C]$ auftreten.
- $\tau_H :=$ Anteil, mit dem H_1, H_2 Tripletts in $[M_R; M_C]$ auftreten.
- $\delta_P :=$ Anteil, mit dem P, H'_d Dubletts in $[M_Z; M_R]$ auftreten.
- $\delta_{\bar{P}} :=$ Anteil, mit dem $\bar{P}, H'_u$ Dubletts in $[M_Z; M_R]$ auftreten.

Zudem wird die Präsenz der übrigen Higgsteilchen festgelegt durch die Anteile:

- $\alpha :=$ Anteil, mit dem A in $[M_C; M_U]$ auftritt.
- $\bar{\alpha} :=$ Anteil, mit dem $\bar{A}$ in $[M_C; M_U]$ auftritt.
- $\gamma :=$ Anteil, mit dem $C+\bar{C}$ in $[M_C; M_U]$ auftritt.

Bemerkung 3.4.2. *(Survival Hypothese)*
Nimmt man vereinfachend an, daß Teilchen auf einer größtmöglichen Massenskala massiv werden, wie es von der zur jeweiligen Symmetrie gehörenden vev-Verteilung her erlaubt ist, so entspricht dies dem Fall, daß alle zuvor definierten Parameter verschwinden, man also $\tau_P = \tau_H = \delta_P = \delta_{\bar{P}} = \alpha = \bar{\alpha} = \gamma = 0$ *setzt. Wie ich im folgenden zeigen werde, sind aber auch nichttriviale Parameterwerte von Interesse.*

Nun berechne ich zunächst die c_2 Faktoren. Dazu erinnere ich an die Tabellen über die Zerlegungen von Darstellungen in Anhang E und fasse diese noch einmal zusammen:

$$\begin{aligned} c_2(54) &= 12, \\ c_2(45) &= 8, \\ c_2(16) &= 2, \\ c_2(10) &= 1. \end{aligned}$$

Daneben benötige ich aber auch die Faktoren für gebrochene Darstellungen der 10 und der 16:

Für die irrep. 10:

10	$SU(3)$	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(2)$	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$
$c_2(trip)$	1	1	0	0	1	0	$\frac{2}{5}$
$c_2(doub)$	0	0	1	1	0	1	$\frac{3}{5}$

Für die irrep. 16:

16	$SU(3)$	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(2)$	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$
$c_2(trip)$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{10}$
$c_2(doub)$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$

Nun ergeben sich die c_2-Faktoren durch Abzählen.

$Sym.$	S	A	$\bar{A}$	C	$\bar{C}$	P	$\bar{P}$	H_1	H_2	ψ_i
G_{422}	0	α	$\bar{\alpha}$	γ	γ	1	1	1	1	3
G_{3122}	0	0	0	0	0	$\tau_P, 1$	$\tau_P, 1$	$\tau_H, 1$	$\tau_H, 1$	3
G_{321}	0	0	0	0	0	$0, \delta_P$	$0, \delta_{\bar{P}}$	$0, \frac{1}{2}(1+\delta_{\bar{P}})$	$0, \frac{1}{2}(1+\delta_P)$	3

$Sym.$	c_2
G_{422}	$(8(\alpha+\bar{\alpha})+4\gamma+12)(1,1,1)$
G_{3122}	$(6+4\tau_P+2\tau_H, 9+\tau_P+2\tau_H, 9+3\tau_P, 9+3\tau_P)$
G_{321}	$(6, 7+2\delta, \frac{1}{5}(33+12\delta))$

wobei $\delta := \frac{\delta_P+\delta_{\bar{P}}}{2}$ verwendet wurde.

Daraus folgen nun mit Hilfe der c_1-Faktoren als Endergebnis die b-Faktoren:

b-Faktoren

$Energie$	$Sym.$	$3c_1$	b
$(M_C; M_U)$	G_{422}	$(12, 6, 6)$	$(3-8(\alpha+\bar{\alpha})-4\gamma, -3-8(\alpha+\bar{\alpha})-4\gamma, -3-8(\alpha+\bar{\alpha})-4\gamma)$
$(M_R; M_C)$	G_{3122}	$(9, 0, 6, 6)$	$(3-4\tau_P-2\tau_H, -9-\tau_P-2\tau_H, -3-3\tau_P, -3-3\tau_P)$
$(M_Z; M_R)$	G_{321}	$(9, 6, 0)$	$(3, -1-2\delta, -\frac{1}{5}(33+12\delta))$

Wie man aus der Bemerkung 3.4.1 folgert, wirkt die Präsenz von kompletten Darstellungen gleichermaßen auf alle Gruppenfaktoren. Daher spielen die Werte der Anteile $\alpha, \bar{\alpha}$ und γ für die Lage der Brechungsenergien keine Rolle[11]

Daher reduziert sich die Anzahl der zu betrachtenden Parameter auf die drei Parameter τ_P, τ_H und δ, die aufgrund ihrer Definition jeweils auf das Intervall $[0;1]$ beschränkt sind.

Setzt man alle drei Parameter gleich 0, so erhält man die in der letzten Spalte angegebenen Werte.

Weiterhin erinnere ich an die bereits in (3.4.3.12) festgestellten weiteren zwei Freiheitsgrade, die ich dort in die Parameter dRC und dCU gefaßt habe.

Insgesamt benötigt man also die Werte von fünf Parametern, um das Modell so festzulegen, daß man den Verlauf der Eichkopplungen eindeutig kennt.

Einfachster Fall: Verschwinden der Parameter

Vereinfacht wird diese Situation, wenn man annimmt, daß die drei Steigungsparameter τ_P, τ_H und δ verschwinden. Wie schon angedeutet entpricht dies der Annahme, daß die Teilchen größtmögliche Massen erhalten.

$Energie$	b_0
$(M_C; M_U)$	$(0, -6, -6)$
$(M_R; M_C)$	$(3, -9, -3, -3)$
$(M_Z; M_R)$	$(3, -1, -\frac{33}{5})$

Der Verlauf der Eichkopplungen liegt dann fest, sobald man Werte für dRC und dCU wählt. So erhält man z.B. mit $dRC = 3$ und $dCU = 0.2$ den in Abbildung 3.2 dargestellten Verlauf.

Natürlich ist diese Wahl von dRC und dCU willkürlich. Probiert man verschiedene Wertekombinationen aus, so stellt man fest, daß physikalisch relevante Größen, wie die Vereinigungsenergie M_U und die Stärke der starken Kopplung $y_3(M_Z)$, stark von der Parameterwahl abhängen.

Da letztere experimentell bekannt ist (s. (2.5.2.31)), muß ich die Parameter dRC und dCU so beschränken, daß die resultierende Größe $y_3(M_Z)$ in einem vernünftigen Bereich liegt. Schaut man sich die resultierenden b-Faktoren an, wie sie in obiger Tabelle aufgeführt sind, so erkennt man, daß man für die Symmetrie G_{SM} dieselben Faktoren wie schon bei der one-step Vereinigung in 2.5.1 erhält. Damit führt jedenfalls die triviale Kombination $dRC = 0, dCU = 0$ zu einer akzeptablen Lösung, da in diesem Fall das Modell in einem Schritt auf die Symmetrie G_{SM} und den Teilcheninhalt des MSSM reduziert wird, wie auch schon in 2.5.1.

Die Frage ist nun, wie die Menge akzeptabler Lösungen aussieht. Akzeptabel soll eine Lösung heißen, wenn sie nicht „zu stark“ von dem experimentell bestimmten Wert abweicht und keine „zu kleine“ Vereinigungsenergie M_U besitzt.

[11]Sie ändern allerdings den Wert der Kopplungen durch eine gemeinsame Steigung. So wächst beispielsweise y_U bei größeren Parametern $\alpha, \bar{\alpha}$ und γ an.

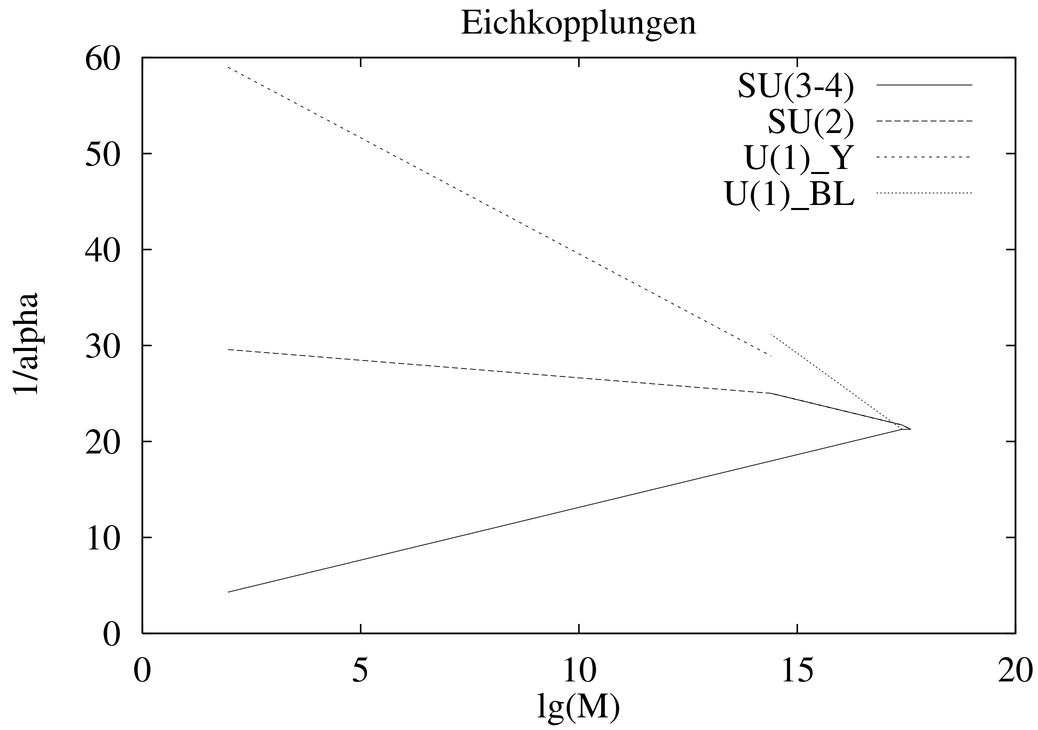

Abbildung 3.2: Beispiel für den Verlauf der Eichkopplungen bei verschwindenden Parametern τ_P, τ_H und δ. Gewählt wurden die Parameter $dRC = 3$, $dCU = 0.2$.

Die Menge aller Lösungen, die die Vereinigungsbedingung erfüllen, kann ich nach (3.4.3.12) mit den Paramertern dRC und dCU parametrisieren[12].

Die Zulässigkeit einer jeden durch (dRC,dCU) festgelegten Lösung soll nun überprüft werden, indem jeweils die Werte von y_3 und M_U nach (3.4.3.12) berechnet werden.

Um die Funktion $y_3(dRC, dCU)$ darzustellen, habe ich ein Programm erstellt, mit dessen Hilfe man Höhenlinien von Funktionen zeichnen kann[13].

Die Abbildung 3.3 zeigt den so erzeugten Höhenlinienplot.

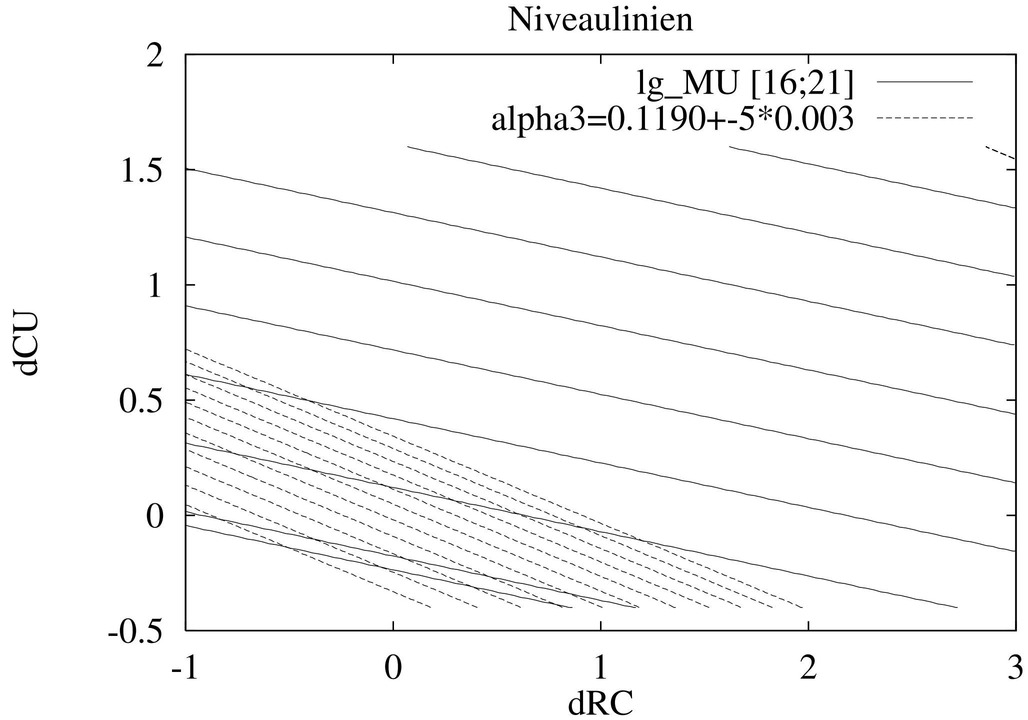

Abbildung 3.3: Höhenlinienplot der Funktionen y_3 und M_U, die vom Parameterpaar (dRC, dCU) abhängen. Die Linien zu $\lg(MU/1GeV)$ beginnen links unten (doppelt gezeichnete Linie) mit einem Wert von 16; 16,5; 17 etc. Die Linien zu y_3 grenzen den 5-σ-Bereich ein. Negative Werte von dRC, dCU sind nur eingetragen um den Verlauf der Linien zu verdeutlichen.

Gezeichnet sind hier die Höhenlinien von y_3 und M_U. Um ein direktes Maß für die Zulässigkeit einer Lösung (dRC, dCU) zu erhalten, habe ich im Fall von y_3 die speziellen Höhenlinien eingetragen, die durch $y_{3_{experimentel}} \pm n\delta(y_3)$ mit $n \in \{1, 2, ..5\}$ gegeben sind. Die gezeichneten Höhenlinien M_U entsprechen den Werten $M_U = 10^p GeV$ mit

[12]Eingeschränkt sind diese Parameter neben den trivialen Bedingungen $dRC \geq 0, dCU \geq 0$ auch durch die Bedingung $dZR(dRC, dCU) \geq 0$ wie sie sich aus (3.4.3.12) ergibt. Damit ist sichergestellt, daß $M_Z \leq M_R \leq M_C \leq M_U$.

[13]Dies erscheint mir hier praktischer als ein Projektionsbild des dreidimensionalen Graphen, da man so auf einfache Weise die Werte auf den Achsen ablesen kann.

$p \in \{16; 16,5; 17, ..\}$.

Während man von der Vereinigungsenergie M_U kaum Einschränkungen erfährt, ist man offenbar durch die zu reproduzierende Kopplung y_3 zu sehr kleinen Werten von dRC und dCU gezwungen. Daher sind nur Lösungen in der Nähe der trivialen Lösung möglich, effektiv findet die Vereinigung in einem Schritt statt.

Akzeptiert man aufgrund der gemachten Näherungen (Vernachlässigung der SUSY-Brechung, Schwellenverhalten) noch Werte im 5σ-Bereich, so kann man selbst mit $dCU = 0$ nur maximal $dRC = 0,8$ erreichen. Die Situation ist in Abbildung 3.4 dargestellt.

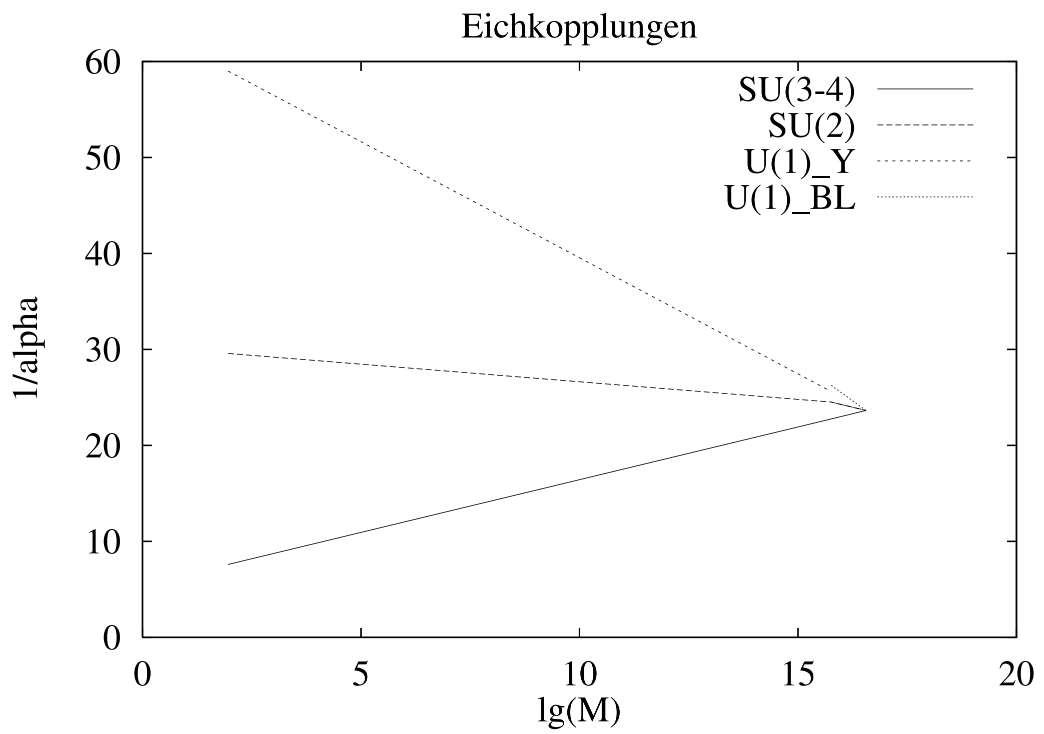

Abbildung 3.4: Verlauf der Eichkopplungen bei verschwindenden Parametern τ_P, τ_H und δ. Gezeigt ist der Verlauf zur Parameterwahl $dRC = 0.8$, $dCU = 0$.

Allgemeiner Fall: Freie Parameter

Im allgemeinen Fall hat man neben den Parametern dRC, dCU noch die drei Parameter τ_P, τ_H und δ. Eine vollständige Übersicht ist daher selbst mit Hilfe von Höhenlinienplots ohne weiteres nicht mehr möglich. Um dennoch beliebige Parameterkombinationen untersuchen zu können, gehe ich wie folgt vor:

Die Parameter dRC, dCU trage ich wie schon im letzten Abbschnitt auf den Achsen auf. Die Situation ist nun, daß sich hier nicht wie dort ein eindeutiger Wert z.B. für y_3 ergibt, sondern der Wert zu festem (dRC, dCU) noch in Abhängigkeit der drei weiteren Parameter

τ_P, τ_H und δ variiert. (An jedem Punkt hat man also noch einen dreidimensionalen Würfel von Parametern.)

Anstatt diese Variation darzustellen, reduziere ich die Menge der so erhaltenen Werte auf die hier interessantesten, die Extremwerte, und zeichne diese nun als Höhenlinien ein.

Bei dem Verfahren läuft man also mit dRC, dCU die Darstellungsebene ab und ermittelt unter all den Werten für y_3, die durch beliebige Kombinationen der Parameter τ_P, τ_H und δ zustande kommen, den größten und den kleinsten. Auf diese Weise lassen sich die zwei Funktionen y_{3min} und y_{3max} in einem Höhenlinienplot zeichnen (Abbildung 3.5).

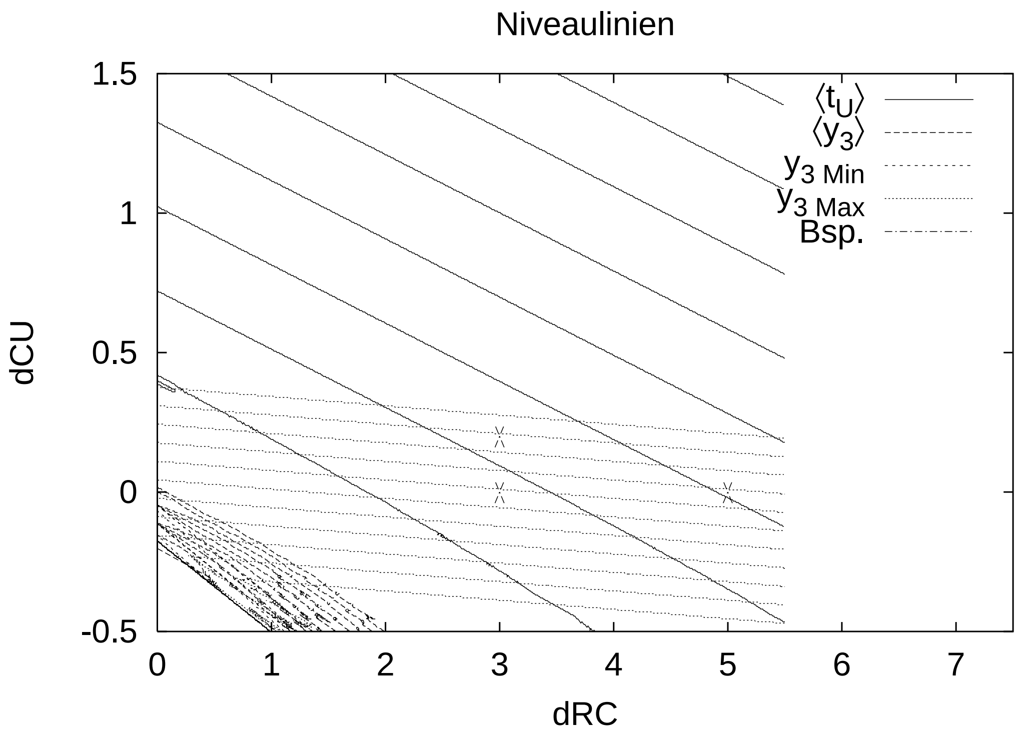

Abbildung 3.5: Höhenlinienplot mit beliebigen Parametern. Aufgrund der zahlreichen Rechnungen werden die Parameter τ_P, τ_H und δ jeweils nur an 9 Werten ausgewertet. Eingetragen sind die relevanten statistischen Daten in Abhängigkeit der Parameter dRC und dCU: Der Erwartungswert der logarithmierten Energie sowie Erwartungswert, Minimum und Maximum des inversen Kopplungsquadates der Starken Kopplung an der Z-Masse. Weiterhin sind die im Text diskutierten drei Fallbeispiele eingezeichnet.

Der Plot gibt nun eine genaue Auskunft darüber, welche Werte für den hauptlimitierenden Wert y_3 möglich sind. Offenbar ist die dominierende Einschränkung durch den maximal erreichbaren Wert von y_3 gegeben[14].

Auch in diesem Fall ist man durch den Wert von y_3 beschränkt. Wie man dem Plot entnimmt, ist aber jetzt z.B. $dRC = 3,0$; $dCU = 0$ mit einer Abweichung von nur 1σ

[14]Die Werte von y_{3min} liegen so weit vom experimentellen Wert entfernt, daß selbst ihre 5σ Höhenlinien nicht im Plot auftauchen.

vom experimentellen Wert möglich. Dagegen ist man zu sehr kleinen Werten für dCU gezwungen, wie man an den flachen Steigungen der y_{3max}-Kurven erkennen kann.

Neben der prinzipiellen Möglichkeit ist es natürlich auch von Interesse, zu sehen, welche Parameterkombinationen zu geeigneten Werten geführt haben. Diese Information ist in der gewählten Darstellung durch die Reduktion auf Extremwerte unsichtbar geworden.

Um die Parameterkombinationen zu untersuchen, setze ich daher erneut und diesmal mit festen Werten (dRC, dCU) an. Nun gilt es, aus dem gesamten Würfel geeignete Kombinationen der verbleibenden drei Parameter τ_P, τ_H und δ zu bestimmen. Dazu führe ich einen *Filter* ein, der die Funktion hat, unter allen Kombinationen diejenigen mit bestimmten Eigenschaften herauszufiltern. Der Filter wählt aus allen möglichen Parameterkoimbinationen diejenigen aus, bei denen der berechnete Wert für $y_3(M_Z)$ nicht mehr als ein vorgegebenes Vielfaches des Meßfehlers vom Wert experimetell bestimmten Wert $y_3(M_Z)_{exp}$ abweicht. Die Menge der vom Filter akzeptierten Kombinationen läßt sich dann gut in Histogrammen analysieren, denen man die Verteilung erlaubter Parameterwerte entnimmt. Das soll hier in drei Fallstudien demonstriert werden.

dRC	dCU	σ
3	0	3
3	$0,2$	5
5	0	4

Tabelle 3.5: Auswahl von drei Beispielen. Die letzte Spalte bezeichnet die Einstellung des Filters. Angegeben sind die vom Filter maximal tolerierten Abweichungen des Werts $y_3(M_Z)$ vom Wert $y_3(M_Z)_{exp}$ in Einheiten des Meßfehlers Δy_3.

- Mit dem ersten Beispiel liegt man noch relativ nahe am experimentellen Wert für y_3. Ich erhalte die in Abbildung 3.6 dargestellte Parameterverteilung.

  Wie man sieht, sind kleine Werte für δ und große Werte für τ_H nötig. Dagegen scheint der Wert von τ_P keinen großen Einfluß zu haben. Dadurch motiviert, wähle ich nun $\delta = 0, \tau_P = 0, \tau_H = 0,9$. Mit dieser Fixierung der Parameter erhält man den in Abbildung 3.7 gezeigten Verlauf der Kopplungen.

  Die Vereinigungsenergie liegt bei $lg(M_U/1GeV) = 16,7$, die Zwischenenergie entsprechend bei $lg(M_R/1GeV) = 13,7$ und die starke Kopplung mit $\alpha_3 = 0,128$ tatsächlich im 3σ–Bereich.

- Beim zweiten Beispiel soll zusätzlich die Entartung der Energien M_U und M_C aufgehoben werden. Wie schon betont, entfernt man sich schon bei relativ kleinen Werten (hier dCU=0,2) stark vom experimentellen Wert für y_3. Die Parameterverteilung ergibt diesmal den Graph in Abbildung 3.8 und verlangt damit nach noch extremeren, aber ansonsten ähnlichen Parametern wie im ersten Beispiel. Ich treffe die Wahl $\delta = 0, \tau_P = 0, \tau_H = 0,95$ und erhalte durch diese Fixierung den Verlauf der Eichkopplungen, der in Abbildung 3.9 dargestellt ist.

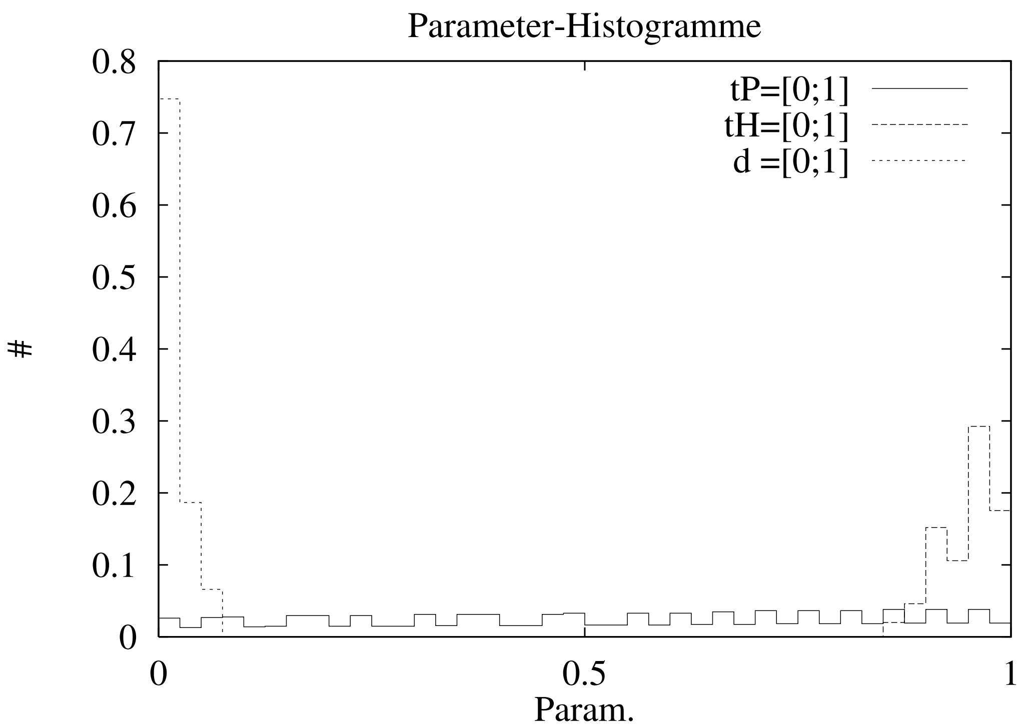

Abbildung 3.6: Verteilung der Parameterwerte für den Punkt $(dRC = 3, dCU = 0)$. Eingetragen wurden alle Kombinationen von τ_P, τ_H und δ die einen Wert von y_3 ergaben, der höchstens um 3σ von $y_{3_{exper.}}$ abweicht.

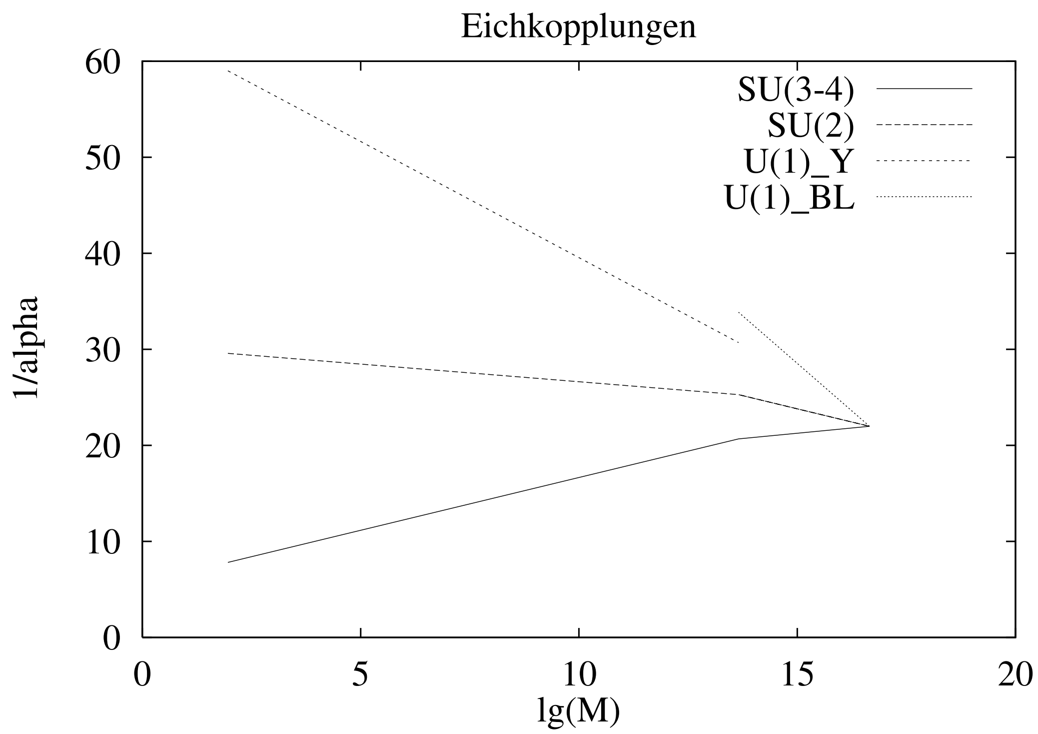

Abbildung 3.7: Verlauf der Eichkopplungen bei der Parameterwahl ($dRC = 3, dCU = 0, \tau_P = 0, \tau_H = 0.9, \delta = 0$).

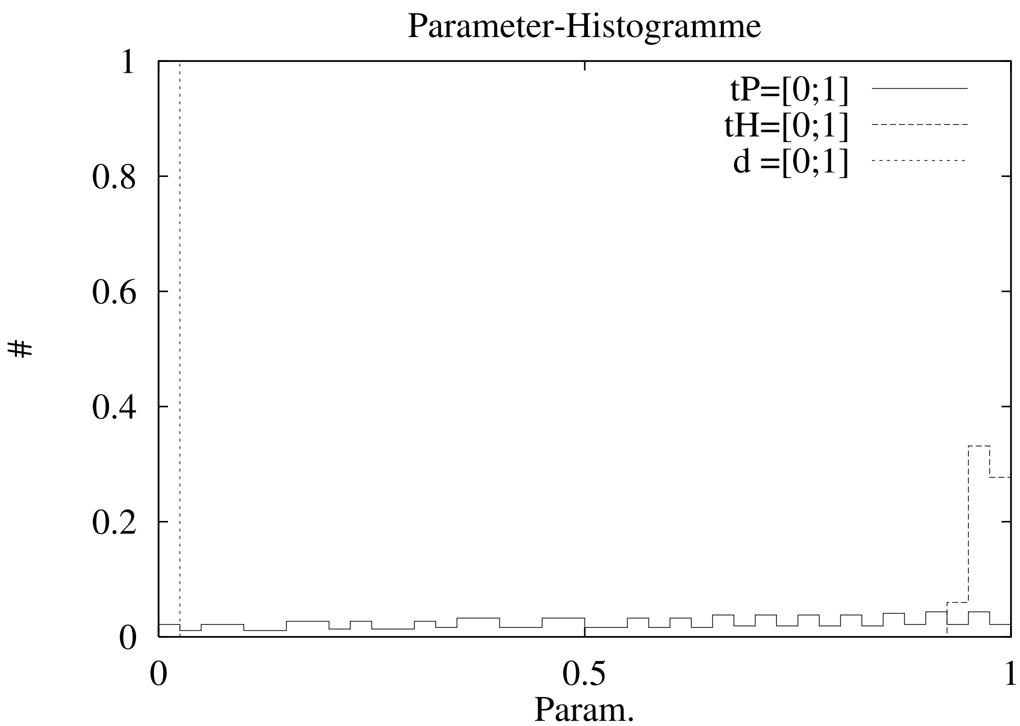

Abbildung 3.8: Verteilung der Parameterwerte für den Punkt $(dRC = 3, dCU = 0.2)$. Eingetragen wurden alle Kombinationen von τ_P, τ_H und δ die einen Wert von y_3 ergaben, der höchstens um 5σ von $y_{3_{exper.}}$ abweicht.

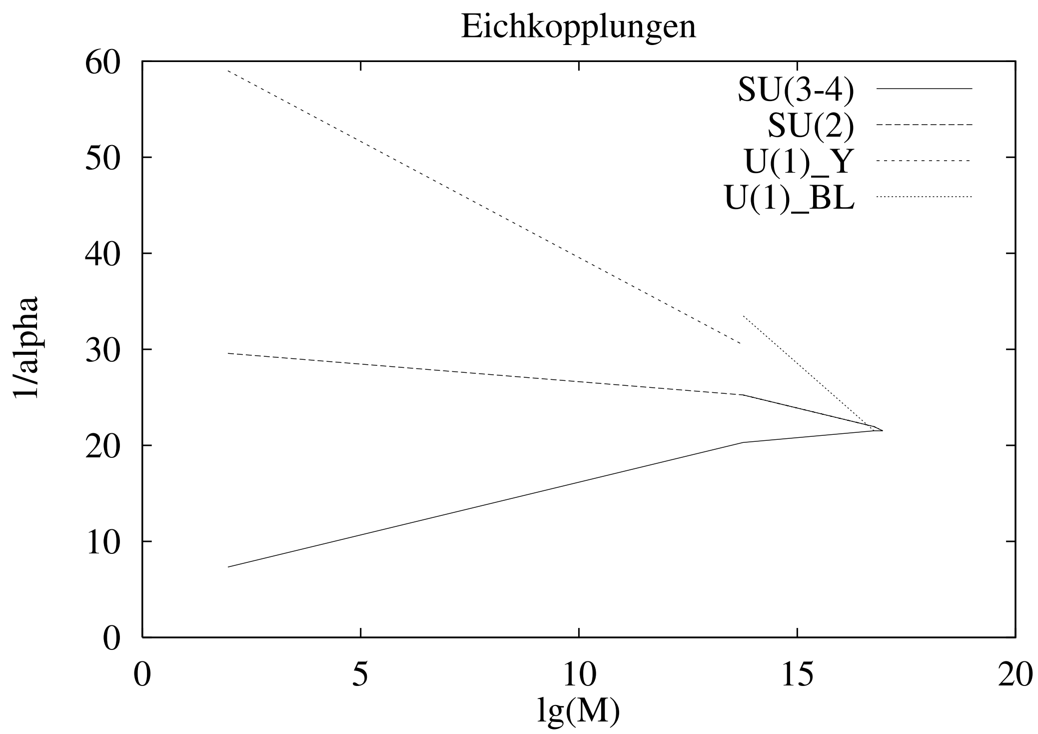

Abbildung 3.9: Verlauf der Eichkopplungen bei der Parameterwahl ($dRC = 3, dCU = 0.2, \tau_P = 0, \tau_H = 0.95, \delta = 0$).

- Mit dem dritten Fall will ich zeigen, wie niedrig man M_R wählen kann, wenn man noch einen Fehler von 4σ akzeptiert. Wie gezeigt, ist dazu sicher vorteilhaft, $dCU = 0$ zu wählen. Laut Höhenlinienplot 3.5 sollte $dRC = 5$ möglich sein. Abbildung 3.10 zeigt die Parameterverteilung für diesen Fall.

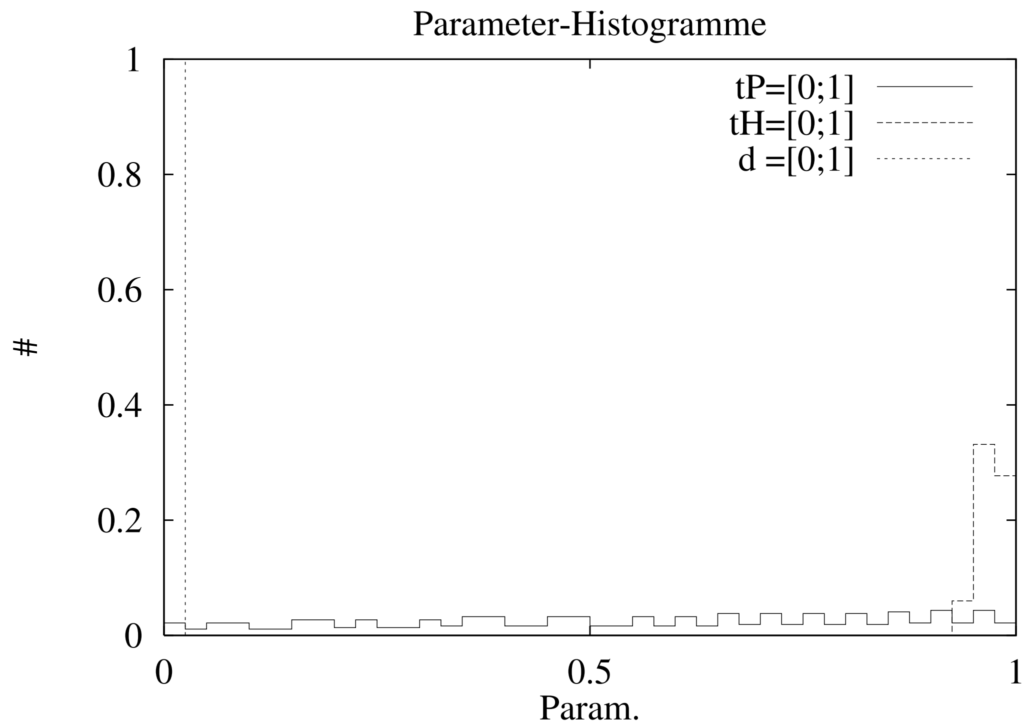

Abbildung 3.10: Verteilung der Parameterwerte für den Punkt ($dRC = 5, dCU = 0$). Eingetragen wurden alle Kombinationen von τ_P, τ_H und δ die einen Wert von y_3 ergaben, der höchstens um 4σ von $y_{3exper.}$ abweicht.

Wie zuvor wähle ich $\delta = 0, \tau_P = 0, \tau_H = 0,95$ und erhalte so Abbildung 3.11.

Zum Abschluß stelle ich noch einmal die Werte der hier gefundenen Fälle in Tabelle 3.6 zusammen.

δ	τ_P	τ_H	$lg(M_R/1GeV)$	$lg(M_C/1GeV)$	$lg(M_U/1GeV)$	σ
0	0	$0,9$	$13,7$	$16,7$	$16,7$	$2,8$
0	0	$0,95$	$13,8$	$16,8$	$17,0$	$5,8$
0	0	$0,95$	$11,8$	$16,8$	$16,8$	$4,3$

Tabelle 3.6: Werte der drei ausgewählten Beispiele

Zusammenfassend ist zu sagen, daß abweichend von der zunächst gemachten Annahme echte Zwischensymmetrien möglich sind, wenn die Higgstripletts eine Masse leicht oberhalb der Energie M_R haben.

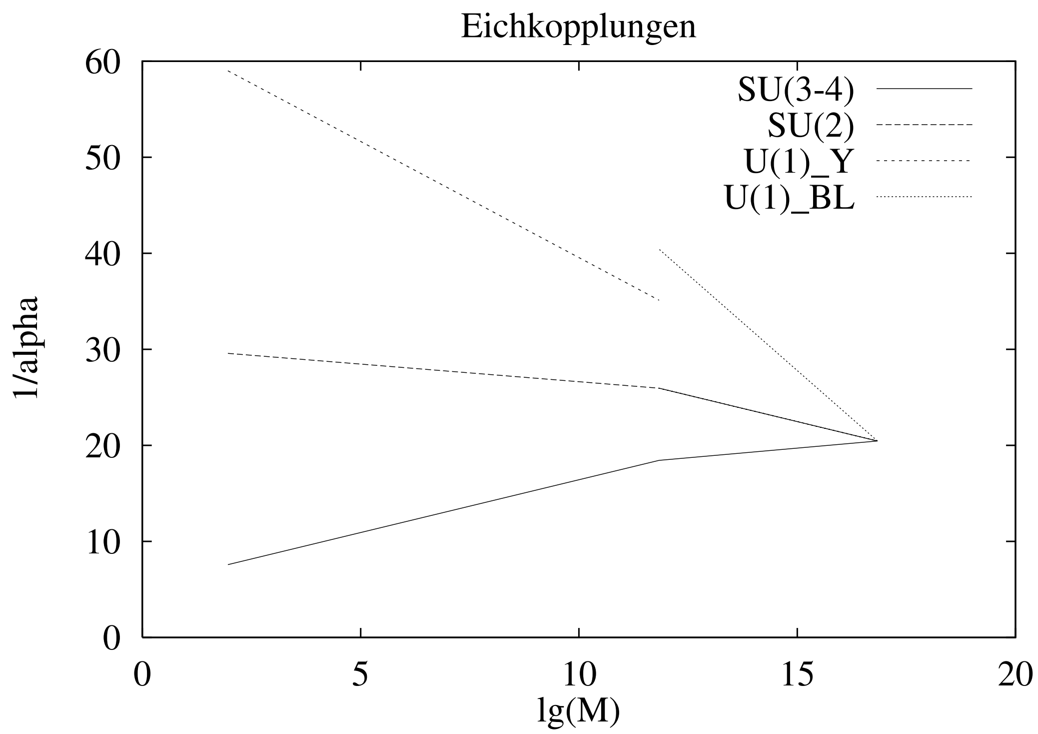

Abbildung 3.11: Verlauf der Eichkopplungen bei der Parameterwahl ($dRC = 5, dCU = 0, \tau_P = 0, \tau_H = 0.95, \delta = 0$).

3.5 Yukawakopplungen

In diesem Abschnitt sollen die Yukawakopplungen der dritten Familie in 1-loop Ordnung untersucht werden. In Abschnitt 2.5.2 wurden die hierfür benötigten Rechentechniken vorgestellt und es wurde die Rechnung für den Fall der Symmetrie G_{321} und MSSM-Teilcheninhalt durchgeführt. Für die hier etwas aufwendigeren Zwischenrechnungen werde ich auf Anhang **??** verweisen.

3.5.1 RGE der Yukawakopplungen

Die zu betrachtenden Kopplungen sind von der Form $\psi_i \psi_j H_k$. Um die folgende Diskussion zu vereinfachen, bezeichne ich abkürzend:

- ψ steht für ψ_i.
- ϕ steht für ψ_j.
- H steht für H_k.

Aufspaltung der Yukawakopplungen

Die $SO(10)$-symmetrische Kopplung lautet dann $h\psi\phi H$ und spaltet sich unter Beachtung der in Anhang E angegebenen Tabellen bei der Symmetrie G_{422} wie folgt auf:

$$\begin{aligned} hH(10)\psi(16)\phi(16) &= (h_1 H(1,2,2)\psi(4,1,2)\phi(\bar{4},2,1) \\ &+ h_2 H(6,1,1)\psi(4,1,2)\phi(4,1,2) \\ &+ h_3 H(6,1,1)\psi(\bar{4},1,2)\phi(\bar{4},1,2)) \\ &+ \psi \leftrightarrow \phi, \end{aligned} \tag{3.5.3.1}$$

wobei die Zahlen hinter den Darstellungsnamen die jeweils auftretenden irreps der Gruppe G_{422} bedeuten und die Kopplungen h_1, h_3 und h_3 eingeführt wurden.

Bei Brechung der Symmetrie zu G_{3122} spalten diese Kopplungen weiter auf:

$$\begin{aligned} h_1 H(1,2,2)\psi(4,1,2)\phi(\bar{4},2,1) &= h_{11} H(1,0,2,2)\psi(1,1,1,2)\phi(1,-1,2,1) \\ &+ h_{12} H(1,0,2,2)\psi(3,-\frac{1}{3},1,2)\phi(\bar{3},\frac{1}{3},2,1) \\ &=: h_{11} HL\bar{L} + h_{12} HQ\bar{Q} \end{aligned} \tag{3.5.3.2}$$

$$\begin{aligned} h_2 H(6,1,1)\psi(4,1,2)\phi(4,1,2) &+ h_3 H(6,1,1)\psi(\bar{4},1,2)\phi(\bar{4},1,2)) \\ &= h_{21} H(3,-1,1,1)\psi(3,-\frac{1}{3},1,2)\phi(1,1,1,2) \\ &+ h_{31} H(\bar{3},1,1,1)\psi(\bar{3},\frac{1}{3},2,1)\phi(1,-1,2,1) \\ &+ \psi \leftrightarrow \phi. \end{aligned} \tag{3.5.3.3}$$

Kombination der MSSM-Higgsdubletts

Entsprechend der Gleichungen (3.4.3.31) und (3.4.3.30) erhält man die MSSM-Higgsdubletts als Mischung der beiden Felder H_1 und H_2. Anstelle der dort verwendeten Koeffizienten des Superpotentials ist es hier praktischer, die Mischung mit Hilfe von Winkeln zu beschreiben:

$$\begin{pmatrix} H'_d \\ H_d \end{pmatrix} = R(\phi) \begin{pmatrix} H_{1d} \\ H_{2d} \end{pmatrix} \tag{3.5.3.4}$$

$$\begin{pmatrix} H'_u \\ H_u \end{pmatrix} = R(\psi) \begin{pmatrix} H_{1u} \\ H_{2u} \end{pmatrix}, \tag{3.5.3.5}$$

wobei $R(\phi)$ die Drehmatrix

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{3.5.3.6}$$

bezeichnet. Daraus folgen sofort die inversen Beziehungen,

$$\begin{pmatrix} H_{1d} \\ H_{2d} \end{pmatrix} = R(-\phi) \begin{pmatrix} H'_d \\ H_d \end{pmatrix} \tag{3.5.3.7}$$

$$\begin{pmatrix} H_{1u} \\ H_{2u} \end{pmatrix} = R(-\psi) \begin{pmatrix} H'_u \\ H_u \end{pmatrix}. \tag{3.5.3.8}$$

Damit ergeben sich die MSSM-Kopplungen folgendermaßen:

$$h_{11} HL\bar{L} \quad \rightarrow \quad (h_\nu H_u + \bar{h}_\nu H'_u)L\bar{\nu} + (h_\tau H_d + \bar{h}_\tau H'_d)L\bar{e} \tag{3.5.3.9}$$

$$h_{12} HQ\bar{Q} \quad \rightarrow \quad (h_t H_u + \bar{h}_t H'_u)Q\bar{u} + (h_b H_d + \bar{h}_d H'_d)Q\bar{d} \tag{3.5.3.10}$$

und für die MSSM-Yukawakopplungen folgt:

$$\begin{aligned} h_\nu &= h_{11}^1 \sin\psi + h_{11}^2 \cos\psi, \\ h_\tau &= h_{11}^1 \sin\phi + h_{11}^2 \cos\phi, \\ h_t &= h_{12}^1 \sin\psi + h_{12}^2 \cos\psi, \\ h_b &= h_{12}^1 \sin\phi + h_{12}^2 \cos\phi, \end{aligned} \tag{3.5.3.11}$$

wobei die hochgestellten Indizes angeben, auf welche der beiden H_k sich die Kopplung bezieht.

RGE der Yukawakopplungen für die dritte Familie

Die nun folgenden RGEs, sind nach den in Abschnitt 2.5.2 entwickelten Methoden berechnet worden.

Symmetrie G_{422}

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y_1}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_1 \left[-\left(\frac{8}{y_1} + \frac{3}{4}\frac{1}{y_2} + \frac{3}{4}\frac{1}{y_3} + \frac{8}{y_1'} + \frac{3}{4}\frac{1}{y_2'} + \frac{3}{4}\frac{1}{y_3'} \right) + \left(\frac{15}{2}\frac{1}{y_4} + \frac{3}{y_{2R}} + \frac{3}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y_1'}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_1' \left[-\left(\frac{8}{y_1} + \frac{3}{4}\frac{1}{y_2} + \frac{3}{4}\frac{1}{y_3} + \frac{8}{y_1'} + \frac{3}{4}\frac{1}{y_2'} + \frac{3}{4}\frac{1}{y_3'} \right) + \left(\frac{15}{2}\frac{1}{y_4} + \frac{3}{y_{2R}} + \frac{3}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y_2}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_2 \left[-\left(\frac{4}{y_1} + \frac{2}{y_2} + \frac{1}{2}\frac{1}{y_3} + \frac{4}{y_1'} + \frac{2}{y_2'} + \frac{0}{y_3'} \right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y_2}{y_2' y_3 y_3'}} + \left(\frac{75}{6}\frac{1}{y_4} + \frac{0}{y_{2R}} + \frac{3}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y_2'}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_2' \left[-\left(\frac{4}{y_1} + \frac{2}{y_2} + \frac{0}{y_3} + \frac{4}{y_1'} + \frac{2}{y_2'} + \frac{1}{2}\frac{1}{y_3'} \right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y_2'}{y_2 y_3 y_3'}} + \left(\frac{75}{6}\frac{1}{y_4} + \frac{0}{y_{2R}} + \frac{3}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y_3}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_3 \left[-\left(\frac{4}{y_1} + \frac{1}{2}\frac{1}{y_2} + \frac{2}{y_3} + \frac{4}{y_1'} + \frac{0}{y_2'} + \frac{2}{y_3'} \right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y_3}{y_2 y_2' y_3'}} + \left(\frac{75}{6}\frac{1}{y_4} + \frac{3}{y_{2R}} + \frac{0}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y_3'}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_3' \left[-\left(\frac{4}{y_1} + \frac{0}{y_2} + \frac{2}{y_3} + \frac{4}{y_1'} + \frac{1}{2}\frac{1}{y_2'} + \frac{2}{y_3'} \right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y_3'}{y_2 y_2' y_3}} + \left(\frac{75}{6}\frac{1}{y_4} + \frac{3}{y_{2R}} + \frac{0}{y_{2L}} \right) \right]
\end{aligned}
\tag{3.5.3.12}
$$

Symmetrie G_{3122}

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y_{11}}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_{11} \left[-\left(\frac{5}{y_{11}} + \frac{5}{y_{11}'} + \frac{3}{y_{12}} + \frac{0}{y_{12}'} + \frac{3}{y_{21}} + \frac{3}{y_{21}'} + \frac{3}{y_{31}} + \frac{3}{y_{31}'} \right) \right. \\
&\quad \left. - 3\sqrt{\frac{y_{11}}{y_{11}' y_{12} y_{12}'}} + \left(\frac{0}{y_3} + \frac{3}{2}\frac{1}{y_1} + \frac{3}{y_{2R}} + \frac{3}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y_{11}'}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_{11}' \left[-\left(\frac{5}{y_{11}} + \frac{5}{y_{11}'} + \frac{0}{y_{12}} + \frac{3}{y_{12}'} + \frac{3}{y_{21}} + \frac{3}{y_{21}'} + \frac{3}{y_{31}} + \frac{3}{y_{31}'} \right) \right. \\
&\quad \left. - 3\sqrt{\frac{y_{11}'}{y_{11} y_{12} y_{12}'}} + \left(\frac{0}{y_3} + \frac{3}{2}\frac{1}{y_1} + \frac{3}{y_{2R}} + \frac{3}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y_{12}}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_{12} \left[-\left(\frac{1}{y_{11}} + \frac{0}{y_{11}'} + \frac{7}{y_{12}} + \frac{7}{y_{12}'} + \frac{1}{y_{21}} + \frac{1}{y_{21}'} + \frac{1}{y_{31}} + \frac{1}{y_{31}'} \right) \right. \\
&\quad \left. - 3\sqrt{\frac{y_{12}}{y_{11} y_{11}' y_{12}'}} + \left(\frac{16}{3}\frac{1}{y_3} + \frac{1}{6}\frac{1}{y_1} + \frac{3}{y_{2R}} + \frac{3}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y_{12}'}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_{12}' \left[-\left(\frac{0}{y_{11}} + \frac{1}{y_{11}'} + \frac{7}{y_{12}} + \frac{7}{y_{12}'} + \frac{1}{y_{21}} + \frac{1}{y_{21}'} + \frac{1}{y_{31}} + \frac{1}{y_{31}'} \right) \right. \\
&\quad \left. - 3\sqrt{\frac{y_{12}'}{y_{11} y_{11}' y_{12}}} + \left(\frac{16}{3}\frac{1}{y_3} + \frac{1}{6}\frac{1}{y_1} + \frac{3}{y_{2R}} + \frac{3}{y_{2L}} \right) \right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_{21}}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_{21} \left[-\left(\frac{2}{y_{11}} + \frac{2}{y'_{11}} + \frac{2}{y_{12}} + \frac{2}{y'_{12}} + \frac{6}{y_{21}} + \frac{6}{y'_{21}} + \frac{0}{y_{31}} + \frac{0}{y'_{31}} \right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{16}{3} \frac{1}{y_3} + \frac{7}{6} \frac{1}{y_1} + \frac{0}{y_{2R}} + \frac{3}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y'_{21}}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y'_{21} \left[-\left(\frac{2}{y_{11}} + \frac{2}{y'_{11}} + \frac{2}{y_{12}} + \frac{2}{y'_{12}} + \frac{6}{y_{21}} + \frac{6}{y'_{21}} + \frac{0}{y_{31}} + \frac{0}{y'_{31}} \right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{16}{3} \frac{1}{y_3} + \frac{7}{6} \frac{1}{y_1} + \frac{0}{y_{2R}} + \frac{3}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y_{31}}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y_{31} \left[-\left(\frac{2}{y_{11}} + \frac{2}{y'_{11}} + \frac{2}{y_{12}} + \frac{2}{y'_{12}} + \frac{0}{y_{21}} + \frac{0}{y'_{21}} + \frac{6}{y_{31}} + \frac{6}{y'_{31}} \right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{16}{3} \frac{1}{y_3} + \frac{7}{6} \frac{1}{y_1} + \frac{3}{y_{2R}} + \frac{0}{y_{2L}} \right) \right] \\
\frac{\partial y'_{31}}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} y'_{31} \left[-\left(\frac{2}{y_{11}} + \frac{2}{y'_{11}} + \frac{2}{y_{12}} + \frac{2}{y'_{12}} + \frac{0}{y_{21}} + \frac{0}{y'_{21}} + \frac{6}{y_{31}} + \frac{6}{y'_{31}} \right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{16}{3} \frac{1}{y_3} + \frac{7}{6} \frac{1}{y_1} + \frac{3}{y_{2R}} + \frac{0}{y_{2L}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.5.3.13}$$

Symmetrie G_{321}

Da auch der Teilcheninhalt mit dem des MSSM übereinstimmt, ist keine neue Rechnung nötig, und man kann die Gleichungen (2.5.2.58) aus Abschnitt 2.5.2 verwenden.

Analyse der Yukawakopplungen

Bei der Integration der RGE ergibt sich ein generischer Verlauf der Kopplungen, wie er in Abbildung 3.12 dargestellt ist.

Insgesamt hat man die Parameter $dRC, dCU, Y1, Y2, \phi, \psi$ und τ_H zu wählen, um den Verlauf eindeutig festzulegen. Die Grafik 3.13 zeigt, daß bestimmte Wertekombinationen ausgeschlossen werden müssen damit $R(M_Z)$ wie in Abbildung 2.4 im experimentel zulässigen Bereich liegt.

Interessant ist nun zu erforschen, welche Werte für $\tan\beta$ möglich sind. Dazu sollen die Werte von $\tan\beta$ in ein Histogramm eingetragen werden. Wegen der Gleichungen (2.5.2.64) und (2.5.2.65), hat man zwei Möglichkeiten $\tan\beta$ zu ermitteln und kann diese als Konsistenzcheck verwenden. Dazu sei der folgende *Filter* eingeführt:

- Werte werden nur akzeptiert, wenn das berechnete $R(M_Z)$ im Bereich $[1.43; 1.8]$ liegt und

- die beiden Methoden zur Bestimmung von $\tan\beta$ (2.5.2.64) und (2.5.2.65) bis auf 5% dieselben Werte liefern.

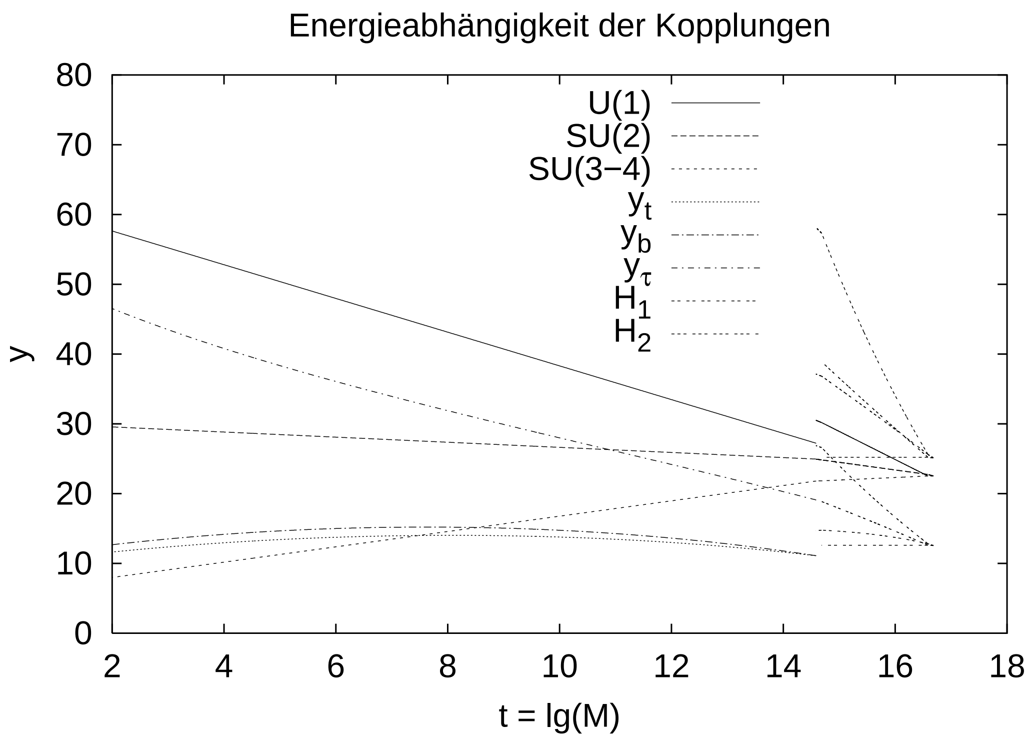

Abbildung 3.12: Verlauf der inversen Kopplungsquadrate in Abhängigkeit vom Parameter t. Im Beispiel wurden die Parameter zu $dRC = 2, dCU = 0.1, tH = 0.95, Y1 = 4\pi, Y2 = 8\pi, \phi = \pi/4, \psi = \pi/4$ gewählt.

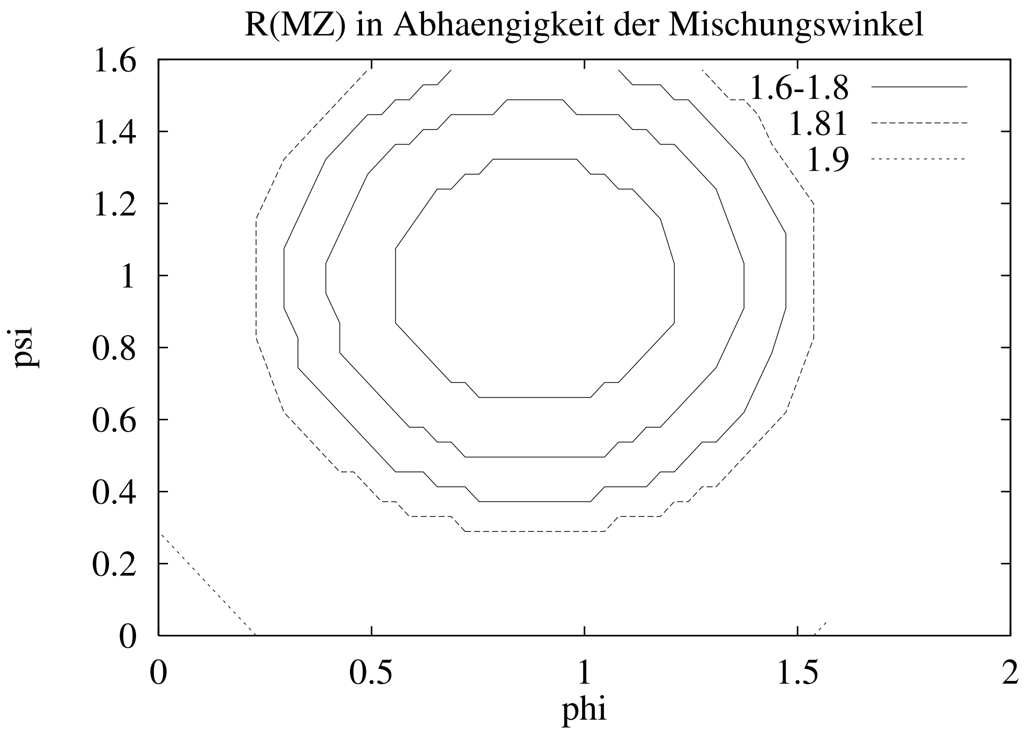

Abbildung 3.13: Beispiel für die Abhängigkeit des R-Verhältnis vom Mischungswinkel. Es wurden die Parameter $dRC = 1, dCU = 0.1, Y1 = 4\pi, Y2 = 8\pi$ fixiert. Wie man sieht führen nicht alle möglichen Mischungswinkel zu einem akzeptabeln R-Verhältnis.

Man erhält nun die, bei der variierenden Anzahl der Parameter, erstaunlich schmale Verteilung wie sie in Abbildung 3.14 zu sehen ist. Weiterhin stellt sich heraus, daß die meisten Werte den Filter passieren.

Zu bemerken ist allerdings, daß die Gleichungen für Winkel oberhalb von 0.55π beginnen instabil zu werden. Die Werte im Bereich $\left[\frac{\pi}{2}..\pi\right]$ schließe ich daher aus.

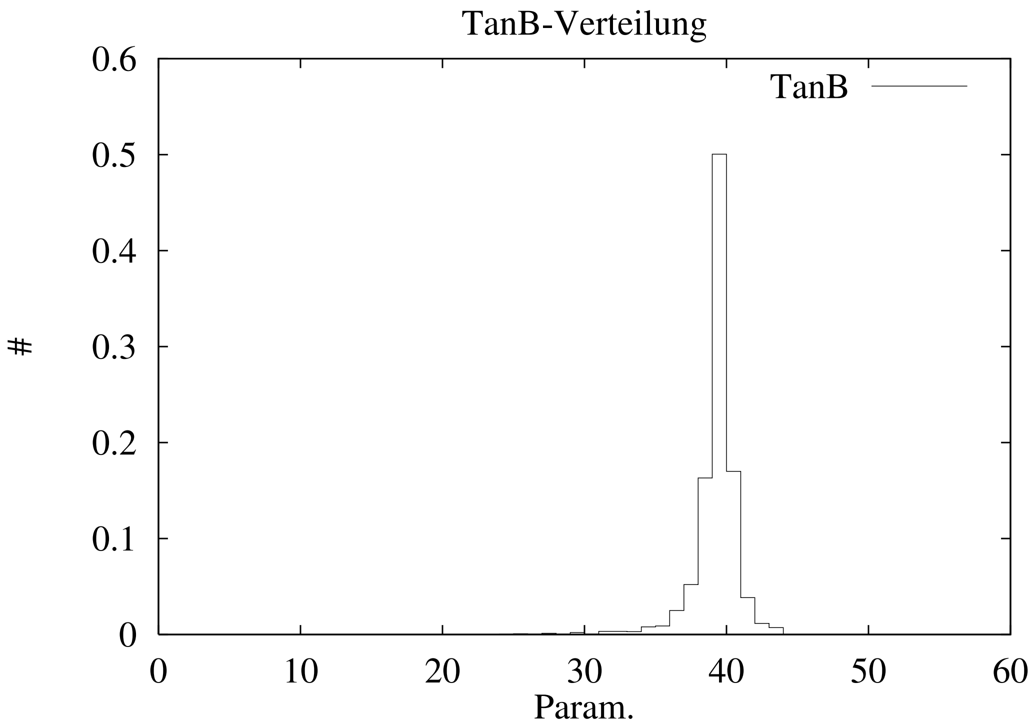

Abbildung 3.14: Histogramm der $\tan\beta$-Werte. Die Parameterbereiche wurden wie folgt gewählt:$Y1, Y2$ [2..20] je 10 Werte, ϕ, ψ $\left[0..\frac{\pi}{2}\right]$ je 10 Werte, dRC [0..3] 10 Werte, dCU [0..0.2] 5 Werte. Berücksichtigt wurden die 364480 Werte, die den Filter passiert haben; das entspricht 73%.

Die statistischen Daten der Verteilung sind wie folgt:

- $\tan\beta_{max} = 44.7$
- $\tan\beta_{min} = 24.0$
- $\langle\tan\beta\rangle = 39.3$
- $\sigma(\tan\beta) = 1.2$ (Varianz)

Damit ist eine Vorhersage für $\tan\beta$ trotz der großen Parameterzahl möglich.

3.6 Protonzerfall

Das Proton würde man aus experimenteller Sicht mit einer gemessenen Halbwertzeit von

$$\tau_p \geq 10^{33} Jahre \tag{3.6.3.1}$$

als äußerst stabil ansehen. Dagegen folgt aus jeder (nicht notwendigerweise supersymmetrischen) vereinheitlichten Theorie die prinzipielle Instabilität des Protons. Die Ursache hierfür liegt gerade in der Vereinigung von Quarks und Leptonen in gemeinsamen Darstellungen. Erinnert man sich an Abschnitt 2.4, so wird klar, daß die Eichkopplungen unabhängig von allen sonstigen Kopplungen in jeder Eichtheorie vorhanden sind und über ihre (supermassiven) gebrochenen Eichteilchen Multipletts miteinander koppeln und auf diese Weise Quarks in Leptonen wandeln können. Der prinzipielle Prozeß ist damit im Rahmen einer Eichtheorie unausweichlich.

Analysiert man die Situation im *supersymmetrischen* Fall [29], so ergeben sich durch die supersymmetrischen Partnerteilchen weitere Zerfallsprozesse, die in den folgenden Abschnitten gesondert besprochen werden.

3.6.1 Protonzerfall über Eichteilchen

Hier ist man im supersymmetrischen Fall in einer besseren Lage, da die GUT-Energie mit ca. $M_U \approx 2 \cdot 10^{16}$GeV um zwei Größenordnungen über der einfachen, nicht-supersymmetrischen $SU(5)$ -GUT liegt. M_U geht in vierter Potenz in τ_P ein, und man erhält einen mit der Halbwertzeit $\Gamma(p \to e^+\pi^0) \geq 10^{33} Jahre$ verträglichen Wert, solange die $B-L$-Skala M_R oberhalb von 10^{15}GeV liegt (vgl. [8]).

3.6.2 Protonzerfall durch R-Parität verletzende Prozesse

R-Parität verletzende Terme führen in der Regel zu einem rapiden Protonzerfall. Das wird deutlich, wenn man z.B. an den im MSSM (s. Anhang A) künstlich ausgeschlossenen Term zweiter Ordnung Lh denkt. Dieser Term ermöglicht Protonzerfall über einen Operator der Massendimension vier und ist damit in der Wirkung nicht unterdrückt. Derselbe Term ist auch in der in Anhang B dargestellten $SU(5)$ -Theorie in der Form HF_i vorhanden. Er ist dagegen im $SO(10)$-Modell bereits von der Darstellungssymmetrie her verboten (s. Anhang C).

Um zu entscheiden, ob die R-Parität durch Kopplungen dritter und höherer Ordnungen verletzt wird, ist es instruktiv, sich die Ladungen der Higgsteilchen unter der Gruppe $U(1)_{BL}$ anzusehen. Da kondensierte Higgsfelder effektiv durch ihre jeweiligen vevs ersetzt werden können, ist die *$U(1)_{BL}$-Ladung des vevs* die entscheidende Größe. Die Reduktion von $SO(10)$-Modellen wurde in dieser Arbeit über das Higgspaar $16 \oplus \bar{16}$ erreicht. Nach Anhang E erhält man für die Ladung der MSSM-Singlett-Komponente der irrep **16** den Wert $-\sqrt{\frac{3}{8}}$. Erinnert man sich an die Normierung (3.4.3.2), so sieht man, daß dies einem $\Delta(B-L) = 1$ entspricht. Aus diesem Grund sind Reaktionen der Art Baryon $\to$ Lepton im Prinzip möglich und in der Tat mußte man bereits im einfachen Modell aus Anhang C die Terme der Form $\psi_i\bar{C}$ und $H\psi_i C$ künstlich verbieten.

„Automatische" R-Paritätserhaltung mit 126

Die Situation ist wesentlich günstiger, wenn man anstelle des Paars $16 \oplus \bar{1}6$ das Paar $126 \oplus \overline{126}$ einsetzt, um die Symmetrie zum MSSM zu brechen. Betrachtet man die $U(1)_{BL}$-Ladung des zur Brechung benötigten vevs, so ergibt sich in diesem Fall (s. [19]) $\Delta(B - L) = \pm 2$. Reaktionen der Art Baryon $\rightarrow$ Lepton sind daher prinzipiell ausgeschlossen. Das verdeutlicht, warum trotz der Schwierigkeiten, ein solches Paar aus der Stringtheorie zu erklären, in vielen Modellen das Higgspaar $126 \oplus 1\bar{2}6$ anstelle von $16 \oplus \bar{1}6$ verwendet wird.

R-Paritätserhaltung durch diskrete Symmetrie

Es gibt jedoch auch ohne Verwendung der 126 eine „natürliche" Lösung, R-Parität verletzende Prozesse zu unterdrücken. Im vorgestellten Modell geschieht dies über die zusätzlich geforderte $\mathbb{Z}_8$-Symmetrie, die insbesondere die bereits angesprochenen Terme der Form $\psi_i\bar{C}$ und $H\psi_i C$ verbietet. Wie in [3] angegeben sind die erlaubten Terme niedrigster Ordnung von der Form $\psi^6 C^2$ und führen zu Operatoren mit Massendimension ≥ 7 und haben daher keinen beobachtbaren Effekt.

3.6.3 Protonzerfall durch Higgsino-Austausch

Die Unterdrückung des Protonzerfalls über Higgsino-Austausch läßt sich nach [23] mit Hilfe der Inversen der Tripplettmassenmatrix abschätzen. Berücksichtigt man zunächst nur den direkten Beitrag aus der Kopplung $\lambda_H H_1 A H_2$, so erhält man:

$$M_f(Tripletts) = \lambda_H \bar{a} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6.3.2}$$

,

mit der inversen Matrix

$$M_f^{-1}(Tripletts) = \frac{1}{\lambda_H \bar{a}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6.3.3}$$

. Der in [23] aufgeführte Operator mit der Massendimension fünf ist dann um den Faktor

$$\epsilon := \frac{m(H')}{\lambda_H \bar{a}} = \frac{m(H')}{m(H_{trip})} \tag{3.6.3.4}$$

unterdrückt, wobei $m(H')$ die Massenskala der zwei extra-Dubletts (s. (3.4.3.30)) bezeichnet (vgl. (3.4.3.43) und (3.4.3.44)).

Unter der Annahme, daß der Einfluß der weiteren Kopplungen von H_1 und H_2 auf die Triplettmassenmatrix gering ist (z.B. durch kleine Werte der Parameter p, q, p', q' und einer der Werte h'_{ab} oder h_{ab}), erhält man auf diese Weise –abhängig von ϵ– eine Unterdrückung des in [23] aufgeführten Operators.

3.7 Neutrinomassen

Mit diesem Abschnitt komme ich auf eine weitere Eigenschaft von $SO(10)$ Modellen zurück, die experimentell zugänglich ist: Die Möglichkeit nicht-verschwindender Neutrinomassen.

Experimente haben gezeigt, daß Neutrinos Oszillationen aufweisen (s. [30, 31, 32, 33]). Dieses Verhalten deutet darauf hin, daß sie eine nicht-verschwindende Masse haben[15].

Um die Diskussion möglichst allgemein zu beginnen, werde ich zunächst nur die Symmetrie G_{321} und keine Supersymmetrie unterstellen. Die Teilchensymbole stehen daher in diesem Abschnitt bis auf weiteres nicht für Superfelder, sondern für Fermionen (bzw. Bosonen).

3.7.1 Die Situation im Standard-Modell

Neutrinomassen sind im Standard-Modell (SM) wie auch in dessen minimaler supersymmetrischer Erweiterung (MSSM) auf tree-level verboten (s. auch [34, 35]).

Die Ursache dafür ist leicht zu finden, wenn man sich daran erinnert, wie die Massen der übrigen Quarks und Leptonen zustandekommen. Aufgrund der Chiralität der Fermionen sind direkte Massenterme für diese Teilchen nicht erlaubt[16], was man auch leicht anhand des in Anhang A angegebenen Transformationsverhaltens der Teilchendarstellungen unter der Eichgruppe sehen kann. Von der Eichsymmetrie her erlaubt sind dagegen die Yukawakopplungen, wie sie bereits in Abschnitt 2.5.2 besprochen worden sind:

$$h_t \bar{u} Q h, \tag{3.7.3.1}$$
$$h_b \bar{d} Q \bar{h}, \tag{3.7.3.2}$$
$$h_\tau \bar{e} L \bar{h}, \tag{3.7.3.3}$$

wobei im nichtsupersymmetrischen Fall zusätzlich $\bar{h} = h$ gesetzt werden kann. Wenn nun die Symmetrie von G_{321} zum Farb-Elektromagnetismus G_{31} gebrochen wird, erhalten die Higgsfelder G_{31}-invariante vevs und führen so effektiv zu Massentermen.

Aus diesem Rückblick wird klar, daß eine solche Massenquelle für Neutrinos nicht in Frage kommt, da im (MS-)SM kein Singlett-Partnerteilchen vorhanden ist, mit dem eine Yukawakopplung möglich wäre.

3.7.2 Dirac- und Majorana-Massenterme

Will man also Massenterme ermöglichen, so ist es naheliegend, das (MS-)SM um ein Singlett-Partnerteilchen zu ergänzen, das ich mit $\bar{\nu}$ bezeichne. Tut man dies, so wird folgende zusätzliche Yukawakopplung möglich:

$$h_\nu \bar{\nu} L h. \tag{3.7.3.4}$$

[15] Eine vergleichbare Situation ist für die K^0-Mesonen seit längerem bekannt.

[16] Solche direkten Massenterme sind auch unerwünscht, da sie in der Regel Massen weit oberhalb der schwachen Energieskala favorisieren würden.

Ohne weiteres würde man daher eine Masse in der gleichen Größenordnung wie bei den übrigen Fermionen erwarten, es sei denn die Kopplung h_ν würde sehr klein ausfallen.

Das Hinzufügen von $\bar{\nu}$ hat allerdings noch weitere Konsequenzen. Sucht man nämlich nun nach direkten Massentermen, so fällt auf, daß von der Eichsymmetrie her jetzt eine Kopplung der Form

$$M\bar{\nu}\bar{\nu} \tag{3.7.3.5}$$

möglich ist, da es sich bei $\bar{\nu}$ um ein Singlett handelt.

Ein solcher Massenterm ist allerdings von einer anderen Struktur, was die Raumzeitsymmetrie angeht, als die zuvor erwähnten. Um das zu konkretisieren, schiebe ich einen kleinen Abschnitt über Fermionmassen ein. Dazu sei ψ ein vierkomponentiger Diracspinor mit den rechts-/linkshändigen Weylspinorkomponenten ψ_R, ψ_L.

Dirac Massen

Definition 3.7.1. *Dirac-Massenterm*
Ein Dirac-Massenterm für $\psi = \psi_R + \psi_L$ hat die allgemeine Form

$$M_D\overline{\psi_R}\psi_L. \tag{3.7.3.6}$$

Insbesondere treten in einem Dirac-Massenterm die beiden Komponenten verschiedener Chiralität auf.

Majorana Massen

Definition 3.7.2. *Majorana-Massenterm*
Ein Majorana-Massenterm für $\psi = \psi_R + \psi_L$ hat die allgemeine Form

$$M_R\overline{(\psi_R)^c}\psi_R + M_L\overline{(\psi_L)^c}\psi_L, \tag{3.7.3.7}$$

wobei c die Antiteilchentransformation bezeichnet.

Ein Majorana-Massenterm benutzt demnach jeweils nur eine Chiralitätskomponente. Außerdem sei bemerkt, daß hier im Gegensatz zum Dirac-Massenterm die Quantenzahlen desselben Teilchens in beiden Faktoren auftauchen. Damit kommt ein Majorana-Massenterm nur für Eichsingletts in Frage.

Untersucht man nun die Struktur der oben angegebenen Massenterme, so erhält man folgendes

Resultat. *:*

- *Die Massenterme aus den Yukawakopplungen (3.7.3.1) und (3.7.3.4) reduzieren sich bei Symmetriebrechung effektiv auf Massenterme vom Dirac-Typ. Entsprechende Majoranaterme sind nicht möglich, da die Teilchen sich unter der Eichgruppe nichttrivial transformieren.*

- *Bei dem zusätzlich hinzu kommenden Term (3.7.3.5) handelt es sich dagegen um einen Majorana-Massenterm, denn $\bar{\nu}$ kann als Eichsinglett sein eigenes Antiteilchen sein.*

Der allgemeine Fall

Um die Diskussion fortzusetzen, führe ich zunächst den allgemeinen Fall in einer kompakten Notation auf, wie sie z.B. in [32] verwendet wird. Dabei nehme ich an, daß pro Familie genau ein weiteres Teilchen ergänzt wird; in der Literatur werden daneben auch Fälle diskutiert, in denen zusätzlich sogenannte *sterile* Neutrinos auftreten [11, 36, 35, 37].

Definition 3.7.3. *Allgemeine Neutrinomassenmatrix*
Seien,

- *Die SM-Neutrinos zusammengefaßt im Familienvektor*

$$\nu_L := \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L \tag{3.7.3.8}$$

- *und die hinzu genommenen rechtshändigen Partner zusammengefaßt als*

$$\bar{\nu}_R := \begin{pmatrix} \bar{\nu}_e \\ \bar{\nu}_\mu \\ \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix}_R . \tag{3.7.3.9}$$

Faßt man weiterhin alle Neutrinos in dem sechsdimensionalen Vektor

$$n_L := \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\overline{\nu}_R)^c \end{pmatrix} \tag{3.7.3.10}$$

zusammen, so kann man die allgemeinst mögliche Lorentz invariante Massenmatrix in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{2}\overline{(n_L)^c} M n_L + h.c., \tag{3.7.3.11}$$

wobei M eine symmetrische 6×6-Matrix sein muß.

Die verschiedenen Dirac- und Majorana-Massenterme sind auf die folgende Weise in M enthalten:

$$M = \begin{pmatrix} M_L & (M_D)^t \\ M_D & M_R \end{pmatrix}, \tag{3.7.3.12}$$

wobei M_L, M_R und M_D jeweils die 3×3-Matrizen in den Familienindizes zu den beiden Majorana-Massentypen sind und M_D für die Dirac-Massenterme verantwortlich ist.

3.7.3 Der see-saw Mechanismus

Als besonderen Spezialfall führe ich nun den see-saw Fall [38, 35] ein:

Definition 3.7.4. *see-saw Massenmatrix*
Die see-saw Massenmatrix entsteht aus dem allgemeinen Fall, wenn man in der Zerlegung (3.7.3.12) $M_L = 0$ wählt und zusätzlich $||M_R|| \gg ||M_D||$ annimmt.

Bemerkung 3.7.5. *Diese Annahmen erscheinen hier zunächst etwas unnatürlich und sind an dieser Stelle nur durch den Erfolg zu rechtfertigen, den ich im Anschluß schildern werde. Die gemachten Annahmen werden sich aber im Rahmen von $SO(10)$–Modellen auf ganz natürliche Weise ergeben.*

Nun kann man die Frage nach den Teilchenmassen ganz allgemein stellen. Diagonalisiert man die Matrix M, so stellt man fest, daß deren Eigenwerte sehr unterschiedlich ausfallen und sich in zwei Gruppen ordnen lassen: Die drei Eigenwerte der Matrix M_N und die drei Eigenwerte der Matrix M_ν. Man findet in [32] folgenden Ausdruck[17]:

$$\begin{aligned} M_N &\approx M_R && (3.7.3.14) \\ M_\nu &\approx -M_D {M_R}^{-1} M_D. && (3.7.3.15) \end{aligned}$$

- Die Eigenwerte von M_N entsprechen etwa denen von M_R und sind nach den gemachten Annahmen sehr viel größer als die von M_D. In einer realistischen Theorie werden die Eigenwerte zu M_D von der Größenordnung der schwachen Skala sein, so daß die Eigenzustände zu M_N als sehr massive Teilchen nicht direkt beobachtet werden können.

- Dagegen zeigen die Eigenwerte von M_ν eine interessante Struktur, die die Bezeichnung „see-saw“ (dt. Wippe) deutlich werden läßt: Je größer die Eigenwerte von M_R werden, desto kleiner fallen die Eigenwerte von M_ν aus. Die Eigenwerte von M_ν sind daher sehr viel kleiner als die von M_D.

Auf diese Weise löst der see-saw-Mechanismus gleich zwei Probleme: Zum einen werden nicht-verschwindende Neutrinomassen durch Parntnerteilchen ermöglicht, die man aufgrund ihrer großen Masse noch nicht gesehen hat, zum anderen wird auch erklärt, warum die beobachteten Neutrinos so viel leichter sind als die übrigen beobachteten elementaren Fermionen.

[17] Im Fall von nur einer anstelle von drei Familien läßt sich das leicht nachrechnen. Dann ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \qquad (3.7.3.13)$$

und man erhält mit $h := m_D/m_R$ das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 - m_R\lambda - (hm_R)^2$. Daraus folgt $\lambda = m_R(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + h^2}) \approx \left\{ \begin{array}{c} m_R \\ -m_D^2/m_R \end{array} \right.$.

3.7.4 Die Situation in $SO(10)$ Modellen

Bisher habe ich in diesem Abschnitt mit der Symmetrie des Standard-Modells gearbeitet. Erweitert man die Symmetrie, um eine vereinheitlichende Theorie zu bekommen, so muß die Frage nach den von der Eichsymmetrie her erlaubten Massentermen neu gestellt werden (Siehe auch [39, 40]).

Im Fall der $SO(10)$ sind die benötigten Partnerteilchen $\bar{\nu}$ ohnehin bereits in der Darstellung einer jeden Familie enthalten. Die Frage nach den möglichen Massentermen wird geklärt in folgender

Bemerkung 3.7.6. .

- *Dirac-Massenterme sind wie beim SM effektiv über die Yukawakopplungen erst dann möglich, wenn die Eichsymmetrie G_{321} gebrochen wird.*
- *Majorana-Massenterme sind für die Symmetrien $SO(10), G_{422}$ und G_{3122} nicht möglich, da das Teilchen $\bar{\nu}$ darunter kein Singlett ist* [18].

Diese Bemerkung kann benutzt werden, um die Einträge in M_D und M_R in der Neutrinomassenmatrix abzuschätzen und so die Neutrinomassen zu bestimmen:

- Aus dem ersten Teil der Bemerkung 3.7.6 folgt zusammen mit dem expliziten Yukawakopplungsterm (3.7.3.4), daß M_D sich aus Termen der Form $m_D = h_u v_u = h_u v_d \tan\beta = \tan\beta\, m_e$ ergibt. Benutzt man eine Basis, in der die Leptonmassenmatrix M_l diagonal ist, so folgt also einfach [41]
$$M_D = \tan\beta\, M_l. \tag{3.7.3.16}$$
- Der zweite Teil von Bemerkung 3.7.6 hat zur Folge, daß die Eigenwerte von M_R kleiner gleich der Skala sein müssen, an der die Eichgruppe zur Gruppe G_{321} gebrochen wird. Um die Größe der Eigenwerte etwas genauer einzugrenzen, gehe ich kurz auf die möglichen Majorana-Massenquellen ein.

Majorana-Massenquellen in $SO(10)$

Um eine Majorana-Massenquelle zu finden, muß man nach eichinvarianten Kopplungen der Form $16 \otimes 16 \otimes X$ suchen. Bildet man das Darstellungsprodukt $16 \otimes 16$ und reduziert aus (s. z.B. [28]), so erkennt man beim Vergleich mit den in Anhang D aufgelisteten Darstellungen, daß man keine eichinvarianten Terme dritter Ordnung bilden kann. Wie man auch aus der Zerlegung von $16 \otimes 16$ entnimmt, würde

[18] Hier wird ein weiterer Vorteil von $SO(10)$ über $SU(5)$ deutlich: In einem $SU(5)$ Modell sind die Majorana-Massenterme erlaubt, da es sich um $SU(5)$ -Singletts handelt. Im $SU(5)$ -Fall ist daher der Wert der Majorana-Masse im Rahmen des Modells nicht beschränkt.

das mit einer Darstellung 126[19], die hier nicht näher diskutiert wurde, ermöglicht. Majorana-Massenterme müssen demnach (nichtrenormierbaren) Termen höherer Ornungen entspringen. In der Tat ermöglicht das Higgsfeld $\bar{C}$ eine geeignete Kopplung vierter Ordnung:

$$k_{ij}\psi_i\psi_j\bar{C}\bar{C} \tag{3.7.3.17}$$

Da man nichtrenormierbare Terme von der Supergravitation erwartet, liegt die folgende Abschätzung für den Wert der Majoranamasse nahe:

$$v_R \approx \frac{\langle\bar{C}\rangle^2}{M_{\text{Planck}}} = \frac{v^2}{M_{\text{Planck}}} \tag{3.7.3.18}$$

Weiterhin findet man in [41] den folgenden expliziten Ausdruck für M_R:

$$M_R = v_R \begin{pmatrix} \lambda & \delta & 0 \\ \delta & \epsilon^2 & \beta\epsilon \\ 0 & \beta\epsilon & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7.3.19}$$

3.7.5 Abschätzung der Neutrinomasse für das behandelte Modell

Im Fall des behandelten konkreten Modells stehen mit den Abschnitten 3.4 und 3.5 alle benötigten Informationen zur Abschätzung der Neutrinomassen zur Verfügung. Betrachtet man nur die dritte Familie, so hat man aus den Gleichungen (3.7.3.16) und (3.7.3.19)

$$m(\nu_\tau) \approx \frac{\tan^2\beta m_\tau^2}{v_R}. \tag{3.7.3.20}$$

Mithilfe des Ausdrucks (3.7.3.18) erhält man schließlich

$$m(\nu_\tau) \approx \frac{M_{Planck}}{\alpha} m_\tau. \tag{3.7.3.21}$$

wobei $\alpha := \frac{v}{\tan\beta}$ eingeführt wurde.

Nimmt man, wie bei den meisten Autoren [42, 35] favorisiert, eine ausgeprägte hierarchische Massenstruktur der Form $m(\nu_e) < m(\nu_\mu) \ll m(\nu_\tau)$ an, so folgt für die bei den Experimenten zu Neutrinooszillationen bestimmte Differenz der Massenquadrate in grober Abschätzung:

$$(\Delta m)^2 \approx m^2(\nu_\tau). \tag{3.7.3.22}$$

[19] Diese Darstellung wird in der Tat in der Literatur wegen ihrer phänomenologischen Eigenschaften wie z.B. der automatischen R-Paritätserhaltung (vgl. Abschnitt 3.6.2) von einigen Autoren [?, 27] anstelle der 16 eingesetzt. Aus der Sicht der Stringtheorie ist aber klar die Wahl der 16 favorisiert.

Wie in [42] aufgeführt, erwartet man von den bisherigen Messungen des Super-Kamiokande Experiments einen Wert von etwa

$$(\Delta m)^2 \approx 10^{-3} ... 10^{-2} eV^2. \tag{3.7.3.23}$$

Dies schränkt den in Abschätzung (3.7.3.21) eingeführten Faktor α folgendermaßen ein:

$$\alpha \in [2,5;4,4] \cdot 10^{14}\mathrm{GeV}. \tag{3.7.3.24}$$

Im Rahmen des diskutierten Modells konnte in Abschnitt 3.5.1 auf $\tan\beta \approx 39$ geschlossen werden. Dies bedeutet einen Wert von $v \approx 10^{16}$GeV und deutet damit auf eine effektive one-step Vereinigung hin.

Anhang A

Teilcheninhalt und Quantenzahlen des MSSM

Das MSSM(=Minimal Supersymmetric extension of the Standard Modell) ist, wie der Name schon sagt, die minimale Erweiterung des Standardmodells, die man benötigt, um zu einer supersymmetrischen Theorie zu gelangen.

Aufgrund der großen experimentellen Erfolge des SM(=Standard Modell) ist es klar, daß jede neue Theorie bei „niedrigen“ (d.h. bis heute ausführlich untersuchten) Energien sich sehr ähnlich zum SM verhalten muß, wenn die Theorie realistisch sein will. Diese Forderung bestimmt sowohl die Eichsymmetrie, den Teilcheninhalt als auch die Kopplungen. Die nächsten Abschnitte geben diese Punkte wieder.

A.1 Symmetrie

Für das MSSM nimmt man die gleiche Eichsymmetrie an, wie man sie vom SM her kennt: $G_{SM} = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Hinzu tritt natürlich als Raumzeitsymmetrie die Supersymmetrie. Wie im SM muß die Symmetrie (mit Hilfe von Higgsfeldern) spontan auf $G_{31} = SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$ reduziert werden.

A.2 Teilcheninhalt

A.2.1 Teilcheninhalt des SM

Das so erfolgreiche Standard-Modell besteht aus

- den Eichteilchen zur bereits angegebenen Symmetrie. Hierbei handelt es sich um Vektorbosonen.

- den drei Familien von je 15 Fermionen, die jeweils aus folgenden Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen aufgebaut sind:

Name	Symbol	Starke W.W.	Schwache W.W.	e.m. W.W.
Elektron	e	nein	ja	ja
Positron	$\bar{e}$	nein	ja	ja
Neutrino	ν	nein	ja	nein
3 up-Quarks	u	ja	ja	ja
3 anti up-Quarks	$\bar{u}$	ja	ja	ja
3 down-Quarks	d	ja	ja	ja
3 anti down-Quarks	$\bar{d}$	ja	ja	ja

- Einem skalaren Higgsdublett h, das zur SSB(=Spontane Symmetriebrechung) benötigt wird.

Das Higgsdublett entwickelt auf der schwachen Energieskala einen vev(=Vakuum Erwartungswert), der nicht mehr G_{SM}-symmetrisch, sondern nur noch G_{31}-symmetrisch ist, und bricht auf diese Weise die Eichsymmetrie.

A.2.2 Teilcheninhalt des MSSM

Aus der Forderung der Supersymmetrie folgt die Existenz von Supersymmetrischen Partnerteilchen zu den bestehenden Teilchen. Wie eine detailliertere Analyse (s. z.B. [8]) zeigt, kann keines der so postulierten Teilchen mit schon bekannten identifiziert werden (wie man es zunächst z.B. bei den Higgsskalaren annehmen könnte). Dagegen muß man sogar noch ein zusätzliches Higgsteilchen einführen, um die benötigten Yukawakopplungen für die Fermionmassengeneration zu ermöglichen (s. Abschnitt A.3).

Während inzwischen alle Teilchen des SM mit Ausnahme der Higgsteilchen beobachtet werden konnten, hat man von den hier geforderten Partnerteilchen bisher kein einziges finden können [43]. Hierfür gibt es aber gute Gründe und auf einen davon komme ich im Zusammenhang mit der R-Parität zurück.

In der nun folgenden Tabelle liste ich die Teilchen des MSSM mit ihren Quantenzahlen auf.

- Die Eichteilchen (Spin: ($\frac{1}{2}$,1))

$Multiplett$	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$Gluon$	8	1	0
W	1	3	0
Y	1	1	1

Oft findet man diese Teilchen in einer anderen Basis angegeben, die der Situation nach erfolgter Symmetriebrechung angepaßt ist:

Multiplett	$SU(3)_c$	$U(1)_{em}$
Gluon	8	0
W^+, W^-	1	$\pm 3\sqrt{\frac{1}{24}}$
Z^0	1	0
γ	1	0

- Eine Materiefamilie (Spin: $(0,\frac{1}{2})$)

Multiplett	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	*Teilchen*	$SU(3)_c$	$U(1)_{em}$
L	1	2	$-3\sqrt{\frac{1}{60}}$	ν	1	0
				e	1	$-3\sqrt{\frac{1}{24}}$
Q	3	2	$\sqrt{\frac{1}{60}}$	u	3	$2\sqrt{\frac{1}{24}}$
				d	3	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$
$\bar{e}$	1	1	$6\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{e}$	1	$3\sqrt{\frac{1}{24}}$
$\bar{u}$	$\bar{3}$	1	$-4\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{u}$	$\bar{3}$	$-2\sqrt{\frac{1}{24}}$
$\bar{d}$	$\bar{3}$	1	$2\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{d}$	$\bar{3}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$

- Die Higgsfelder (Spin: $(0,\frac{1}{2})$)

Multiplett	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$h = h_u$	1	2	$3\sqrt{\frac{1}{60}}$
$\bar{h} = h_d$	1	2	$-3\sqrt{\frac{1}{60}}$

Wie üblich sind die irreduziblen Darstellungen im Fall der $SU(n)$ mit deren Dimensionalität und im Fall der $U(1)$ mit der Ladung (der 1-dimensionalen Darstellung) bezeichnet. Die Ladungen der $U(1)$-Gruppen sind hier so normiert, wie sie sich als natürlich herausstellen werden (vgl. (2.5.2.18)). Die Symmetrie wird so gebrochen, daß für die Generatoren (und damit auch für die Ladungen) $T_{U(1)_{em}} = pT_{U(1)_Y} + qT_{SU(2)_L}$ mit $p = \sqrt{\frac{5}{8}}, q = \sqrt{\frac{3}{8}}$ gilt.

Bemerkt sei, daß L und $\bar{h}$ die gleichen Quantenzahlen haben, aus anderen Gründen (s. [8]) aber verschieden sein müssen (so gibt es ja beispielsweise je ein L pro Familie).

A.3 Kopplungen

Entsprechend der im Abschnitt 2.4 wiedergegebenen SUSY-Theorie kommen die Kopplungen der chiralen Felder (also der „Materiefamilien“ und Higgsteilchen) durch das

Superpotential zustande. Für eine renormierbare Theorie sind lediglich Terme bis zur dritten Ordnung erlaubt. Außerdem müssen die Terme Singletts (d.h. invariant) unter der verlangten Eichsymmetrie sein. Dadurch ergeben sich starke Einschränkungen an die erlaubten Terme, die nun mit Hilfe der oben angegebenen Quantenzahlen leicht zu überblicken sind[1]:

- Terme 1.Ordnung:
  Da alle chiralen Teilchen nicht-verschwindende Hyperladung Y haben, sind alle Terme verboten.

- Terme 2.Ordnung:
  Aufgrund von Invarianz bezüglich $SU(3) \times SU(2)$ bleiben als einzige Möglichkeiten: $h\bar{h}$ und Lh. Insbesondere sind keine direkten Massenterme für die „Materieteilchen" erlaubt. Letzterer Term ist verboten, wenn man die Erhaltung der R-Parität (s. folgenden Punkt sowie [4, 44]) verlangt.

- Terme 3.Ordnung:
  Hier gibt es eine größere Zahl von Kombinationen. Um diese zu ermitteln, sind die Werte der Hyperladung sehr nützlich. Außerdem sieht man leicht (z.B. mit Hilfe von Youngtableaux), auf welche nicht triviale Weise man Singletts erhalten kann: Für SU(2) hat man $2 \times 2 \times 1$ zu nehmen. Für SU(3) hat man die Möglichkeiten $3 \times 3 \times 3$, $\bar{3} \times \bar{3} \times \bar{3}$ und $1 \times 3 \times \bar{3}$.

  Man erhält so die folgenden invarianten Kopplungen:

  $$\bar{e}LL,\ \bar{e}L\bar{h},\ \bar{e}\bar{h}\bar{h},\ Q\bar{d}L,\ Q\bar{d}\bar{h},\ Q\bar{u}h,\ \bar{u}\bar{d}\bar{d} \qquad \text{(A.3.A.1)}$$

  Die R-Parität ist so definiert, daß man den hinzugefügten Partnerteilchen (d.h. den skalaren Partner der Materie-Fermionen (genannt S-Fermionen) und den fermionischen Partner der Higgsteilchen (genannt Higgsinos)) die Parität -1, dagegen allen schon im SM auftretenden Teilchen (Materiefermionen und Higgsskalaren) die Parität +1 zuordnet. Die Supersymmetrie muß nach den einleitenden Bemerkungen auf einer Skala oberhalb bisheriger Laborexperimente gebrochen sein, so daß niederenergetisch nur die Teilchen mit positiver R-Parität sichtbar sind. Das sind die Teilchen des Standardmodells. Fordert man nun die Erhaltung der sogenanten R-Parität [2], so werden alle Kopplungen verboten, bei denen eine ungerade Anzahl an Superteilchen

[1] Dabei sei erwähnt, daß ich die Familienindizes unterdrücke. Die im folgenden diskutierten Kopplungen kommen in diesem Sinne natürlich im Prinzip in allen möglichen Familienindexkombinationen vor.

[2] Man wird aus einem ganz anderen Grund zur Einführung der R-Parität gezwungen: Andernfalls wären nämlich Operatoren der Massendimension 4 erlaubt, die zum rapiden Protonzerfall führen würden, im Widerspruch zur beobachteten Stabilität.

benötigt wird, um die Raumzeitsymmetrie (Spin=0!) einer Kopplungen zu gewährleisten. So läßt sich z.B. aus eLL mit R-Parität=1 kein geradzahliger Spin kombinieren. Es verbleiben lediglich drei der sieben Kopplungen:

$$\bar{e}L\bar{h},\ Q\bar{d}\bar{h},\ Q\bar{u}h \tag{A.3.A.2}$$

Diese drei Kopplungen sind auch von anderer Seite her sehr interessant, sie liefern nämlich die für die Generation der Fermionmassen benötigten Yukawakopplungen [3]. Wie man sieht, rührt die Masse der up-(Typ-)Quarks vom vev des Teilchens h, während die Masse der down-(Typ-)Quarks und der Elektron-(Typ-)Leptonen vom vev des Teilchens $\bar{h}$ herrühren. Diese Tatsache wird auch im Text (s. Abschnitt 2.5.2) aufgegriffen, wenn eben diese Kopplungen diskutiert werden.

Abschließend sei erwähnt, daß hier wie bereits in SM ohne das Hinzufügen weiterer Teilchen keine Massenterme für Neutrinos möglich sind.

[3]Eigentlich sind Yukawakopplungen vom Typ $Spin\frac{1}{2} \times Spin\frac{1}{2} \times Spin0$. Das sind auch hier die interessanten Kopplungen zur Massengeneration. Man bedenke, daß die in einem solchen Produkt im allgemeinen ebenfalls enthaltenen Terme wie z.B. das Produkt der drei skalaren Anteile per R-Parität verboten sind.

Anhang B

Einfache SUSY-SU(5) GUT

Wie schon länger bekannt (siehe [18]), ist es möglich, die Teilchen des MSSM in Multipletts einer größeren Symmetriegruppe unterzubringen. Das dies (mit Reproduktion aller Quantenzahlen nach Brechung der GUT-Gruppe) möglich ist, ist neben dem Verlauf der Eichkopplungen ein Hinweis auf die Existenz einer solchen höheren Symmetrie. Betrachtet man nun umgekehrt die GUT-Theorie als unterliegende Struktur, so *erklärt* sie das MSSM mit seinen Teilchen und deren Quantenzahlen [45, 46].

In diesem Abschnitt gehe ich kurz auf den historisch zuerst diskutierten Fall der GUT-Eichgruppe $SU(5)$ ein. Ich werde vor allem den Teilcheninhalt behandeln, auch um ihn später mit dem von $SO(10)$-Modellen vergleichen zu können.

B.1 Teilcheninhalt

Im Rahmen der Gruppentheorie läßt sich untersuchen, in welche Darstellungen die irreduziblen Darstellungen der $SU(5)$ zerfallen, oder anders ausgedrückt, welche irreduziblen Anteile der Standardmodellgruppe G_{SM} (als Untergruppe von SU(5) in Standardeinbettung) zu der irreduziblen Darstellung der $SU(5)$ kombinieren. Danach erfolgt der Einbau der MSSM-Teilchen aufgrund ihrer Quantenzahlen mit folgenden Darstellungen:

- Die Eichteilchen (Spin $\frac{1}{2}$,1):

$Multiplett$	$SU(5)$	$Multiplett$	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
V	24	$Gluon$	8	1	0
		W	1	3	0
		B	1	1	0
		X	3	2	$-5\sqrt{\frac{1}{60}}$
		Y	$\bar{3}$	2	$5\sqrt{\frac{1}{60}}$

- Eine Materiefamilie (Spin $0,\frac{1}{2}$):

Multipl.	$SU(5)$	*Multipl.*	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	*Teilch.*	$SU(3)_c$	$U(1)_{em}$
F	$\bar{5}$	L	1	2	$-3\sqrt{\frac{1}{60}}$	ν	1	0
						e	1	$-3\sqrt{\frac{1}{24}}$
		$\bar{d}$	$\bar{3}$	1	$2\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{d}$	$\bar{3}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$
A	10	Q	3	2	$\sqrt{\frac{1}{60}}$	u	3	$2\sqrt{\frac{1}{24}}$
						d	3	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$
		$\bar{e}$	1	1	$6\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{e}$	1	$3\sqrt{\frac{1}{24}}$
		$\bar{u}$	$\bar{3}$	1	$-4\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{u}$	$\bar{3}$	$-2\sqrt{\frac{1}{24}}$

- Die Higgsfelder (Spin $0,\frac{1}{2}$):

Multipl	$SU(5)$	*Multipl.*	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
H	5	$h = h_u$	1	2	$3\sqrt{\frac{1}{60}}$
		T	3	1	$-2\sqrt{\frac{1}{60}}$
$\bar{H}$	$\bar{5}$	$\bar{h} = h_d$	1	2	$-3\sqrt{\frac{1}{60}}$
		$\bar{T}$	$\bar{3}$	1	$2\sqrt{\frac{1}{60}}$
Φ	24				

Die 15 Teilchen einer Familie sind also je in einer Darstellung $10 \oplus \bar{5}$ untergebracht. Dagegen mußte man den Higgssektor erweitern.

B.2 Zusätzliche Higgsteilchen und Probleme

Zum einen müssen die Higgsfelder des MSSM erweitert werden, weil die kleinste nicht triviale Darstellung (die fundamentale Darstellung) die Dimension 5 hat.

Zum anderen muß die adjungierte Darstellung Φ eingeführt werden, um die Symmetrie zur Gruppe G_{SM} zu brechen und somit auf Energien unterhalb der Vereinigungsskala das MSSM zu reproduzieren.

Entsprechend des allgemeinen Higgs-Mechanismus muß also Φ an der GUT-Energie M_U einen Vakuumerwartungswert erhalten, der nur noch G_{SM}-symmetrisch ist. Dabei erhält diese Darstellung (wie übrigens auch alle Eichteilchen aus $SU(5)/G_{SM}$) eine Masse derselben Größenordnung und taucht somit in der niederenergetischen Theorie nicht mehr auf.

Die Situation mit den in H und $\bar{H}$ enthaltenen Tripletts $(T, \bar{T})$ ist schwieriger und offenbart in der Tat eines der Haupthindernisse beim Aufstellen von GUT-Theorien. Bekannt ist dieses Problem unter dem Namen *„Dublett-Triplett-Split-Problem"*

Einerseits müssen die Tripletts eine große Masse in der Nähe der GUT-Skala erhalten, da sonst neben einer Störung der Vereinigungshypothese ein rapider Protonzerfall über die Triplett-Higgsinos weitere Folge wäre; im Widerpruch zum Experiment,

andererseits gibt es im Rahmen dieses Modells keinen Mechanismus, der die Triplettanteile T und $\bar{T}$ alleine auf einer hohen Energieskala massiv werden läßt, ohne auch die Dubletts zu betreffen, die bis zur schwachen Skala leicht bleiben müssen, um dort die SSB des SM zu ermöglichen.

Das angegebene, ansonsten zufriedenstellende Modell verlangt also noch nach einer Erweiterung, die dieses Problem löst. Während die Lösung des Problems in $SU(5)$ relativ schwierig ist, hat man im Falle der $SO(10)$ interessante Implementierung gefunden, die auf natürliche Weise einen solchen Split erklären und im Text angesprochen werden.

Beim sogenannten *Hierarchie-Problem* handelt es sich um ein weiteres zentrales Problem von GUT-Theorien, das mit der Stabilität und der im Vergleich zur GUT-Skala so niedrigen Energieskala der Brechung des SM zu tun hat. Durch die Supersymmetrie kann zumindest die Stabilität einer solchen Skala erklärt werden, was dieses Problem entscheidend verringert und auch von der Phänomenologie her eine Hauptmotivation für die supersymmetrischen Theorien darstellt.

B.3 Kopplungen

Die Gesamtheit von Kopplungen, die aufgrund der Eichsymmetrie möglich sind, kann man hier sehr einfach mit Young-Tableaux ermitteln. Um zu untersuchen, ob ein bestimmtes Produkt zu einem Singlett führen kann, kann man einen Trick benutzen, indem man einfach nachsieht, ob die aufsummierte Kästchenanzahl ein ganzes Vielfaches von 5 ist [1]. Dies ist eine notwendige Bedingung.

Die Anzahlen der Kästchen sind wie folgt:

$Multiplett$	$Darstellung$	$\#(Kästchen)$
H	5	1
$\bar{H}, F_i$	$\bar{5}$	4
A_i	10	2
Φ	24	5

[1] Bei der Bestimmung von Produkten werden die Kästchen der Faktoren nach bestimmten Regeln zusammengesetzt. Die Anzahlen der Kästchen bleiben dabei erhalten. Außerdem entspricht die Darstellung mit 5 untereinander stehenden Kästchen einem Singlett (d.h. 0 Kästchen), so daß auf diese Weise die Kästchenzahl um 5 geändert werden kann.

- Terme 1. Ordnung: Es sind keine Terme erlaubt. Φ wäre der einzige Kandidat, ist aber kein Singlett.
- Terme 2. Ordnung: Möglich sind nur $5 \otimes \bar{5}$ und $24 \otimes 24$. Man erhält also: $H\bar{H}, HF_i$ und $\Phi\Phi$.
- Terme 3. Ordnung: Möglich sind nur die Kombinationen $5 \otimes \bar{5} \otimes 24$, $\bar{5} \otimes \bar{5} \otimes 10$ und $5 \otimes 10 \otimes 10$. Man erhält also: $H\bar{H}\Phi, HF_i\Phi$, $\bar{H}\bar{H}A_i, \bar{H}F_iA_j, F_iF_jA_k$ und HA_iA_j.

Beachtet man wie im MSSM (s. Anhang A) die R-Parität, so bleiben nur die folgenden vier Kopplungen übrig:

$$H\bar{H},\ H\bar{H}\Phi,\ \bar{H}F_iA_j,\ HA_iA_j. \tag{B.3.B.1}$$

Während die ersten beiden zu Massen für Higgsteilchen führen, enthalten die letzten beiden gerade die Yukawakopplungen des MSSM und geben auch in diesem Punkt das Verhalten des MSSM wieder.

Man beachte, daß die Vereinigung der Kopplungskonstanten $h_\tau := h_{\bar{e}L\bar{h}}$ und $h_b := h_{Q\bar{d}\bar{h}}$ auf der GUT-Energieskala folgt, da sie beide aus der Kopplung vom Typ $\bar{H}FA$ resultieren, während $h_t := h_{Q\bar{u}h}$ in diesem Modell unabhängig ist.

Anhang C

Einfaches $SO(10)$-SUSY-Modell

C.1 Teilcheninhalt

Sieht man sich die Zerlegung von Darstellungen der $SO(10)$ in Darstellungen zur maximalen Untergruppe $SU(5) \otimes U(1)$ an, so wird folgende Wahl nahe gelegt (die man teilweise auch schon von den Darstellungsdimensionen her vermuten könnte).

- Die Eichteilchen (Spin $\frac{1}{2}$,1):

Multiplett	$SO(10)$	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$	*Name*
V	45	1	1	0	
		3	1	$4\sqrt{\frac{1}{60}}$	
		$\bar{3}$	1	$-4\sqrt{\frac{1}{60}}$	
		8	1	0	*Gluon*
		3	2	$\sqrt{\frac{1}{60}}$	
		3	2	$-5\sqrt{\frac{1}{60}}$	X
		$\bar{3}$	2	$5\sqrt{\frac{1}{60}}$	Y
		$\bar{3}$	2	$-\sqrt{\frac{1}{60}}$	
		1	1	$6\sqrt{\frac{1}{60}}$	
		1	1	0	B
		1	1	$-6\sqrt{\frac{1}{60}}$	
		1	3	0	W

- Eine Materiefamilie (Spin $0,\frac{1}{2}$):

$Multiplett$	$SO(10)$	$Multiplett$	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$	$Teilchen$	$SU(3)$	$U(1)$
ψ_i	16	L	1	2	$-3\sqrt{\frac{1}{60}}$	ν	1	0
						e	1	$-3\sqrt{\frac{1}{24}}$
		Q	3	2	$\sqrt{\frac{1}{60}}$	u	3	$2\sqrt{\frac{1}{24}}$
						d	3	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$
		$\bar{e}$	1	1	$6\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{e}$	1	$3\sqrt{\frac{1}{24}}$
		$\bar{\nu}$	1	1	0	$\bar{\nu}$	1	0
		$\bar{u}$	$\bar{3}$	1	$-4\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{u}$	$\bar{3}$	$-2\sqrt{\frac{1}{24}}$
		$\bar{d}$	$\bar{3}$	1	$2\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{d}$	$\bar{3}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$

- Die Higgsfelder (Spin $0,\frac{1}{2}$):

$Multiplett$	$SO(10)$	$Multiplett$	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$
H	10	T	3	1	$2\sqrt{\frac{1}{60}}$
		$\bar{T}$	$\bar{3}$	1	$-2\sqrt{\frac{1}{60}}$
		h	1	2	$3\sqrt{\frac{1}{60}}$
		$\bar{h}$	1	$\bar{2}$	$-3\sqrt{\frac{1}{60}}$
C	16				
$\bar{C}$	$\bar{16}$				
S	54				

Die Eichteilchen enthalten auf die angegebene Weise die Eichteilchen des MSSM und, wie der Vergleich mit Abschnitt B zeigt, sogar die von $SU(5)$ [1]. Jede Familie besteht nun aus 16 Teilchen. Das gegenüber dem MSSM hinzugekommene Teilchen $\bar{\nu}$ muß auf einer hohen Energieskala massiv werden, so daß es bei niedrigen Energien nicht beobachtet wird. Dies wird durch das Verschwinden aller G_{SM}–Quantenzahlen für dieses Teilchen ermöglicht.

[1] Das ist klar, da $SU(5) \times U(1) < SO(10)$.

C.2 Higgsteilchen

Da die kleinsten nicht trivialen Darstellungen (die fundamentale Darstellung) im vorliegenden Fall die Dimension 10 haben, benötigen wir mindestens ein solches Higgsmultiplett. Wie die Zerlegung bzgl. G_{SM} zeigt, ist dies aber im Prinzip auch schon genug, da man direkt beide Higgsdubletts des MSSM erhält[2].

Die Felder C,$\bar{C}$ und 54 dienen dazu, die Gruppe $SO(10)$ zur Gruppe G_{SM} zu brechen und somit auf Energien unterhalb der Vereinigung das MSSM zu reproduzieren. Das Feld C muß um $\bar{C}$ ergänzt werden, weil sonst die D-Terme nicht verschwinden, und die Supersymmetrie gebrochen wäre. Das Feld 54 ist nötig, weil die 16 alleine $SO(10)$ nur zur $SU(5)$ brechen würde.

Entsprechend dem allgemeinen Higgs-Mechanismus muß also C an der GUT-Energieskala M_U einen Vakuumerwartungswert erhalten, der nur noch G_{SM}-symmetrisch ist. Dabei erhält diese Darstellung (wie übrigens auch alle Eichteilchen aus $SO(10)/G_{SM}$) eine Masse derselben Größenordnung und taucht somit in der niederenergetischen Theorie nicht mehr als dynamisches Feld auf; vielmehr kann man das Multiplett effektiv durch den vev(=Vakuum Erwartungswert) $< C >$ ersetzen.

Wie schon bei den Familienmultipletts angegeben, sieht man, daß die 16 in der Tat ein solches G_{SM}-Singlett enthält (dort wurde die entsprechende Komponente mit $\bar{\nu}$ bezeichnet).

Das Auftreten der Tripletts $(T, \bar{T})$ führt genauso wie im Fall der $SU(5)$ (s. B) zum DTS(=„*Dublett-Triplett-Split*“) Problem.

Auch in diesem minimalen Modell gibt es keinen Mechanismus, der es ermöglichen würde, die Triplettanteile auf einer hohen Energieskala von den Dubletts zu trennen. Einen solchen Mechanismus werde ich mit Abschnitt 3.2 im Text vorstellen.

C.3 Kopplungen

Die Gesamtheit von Kopplungen, die aufgrund der Eichsymmetrie möglich sind, ist mit Hilfe von Multiplikationstafeln (wie man sie z.B. in [28] findet) für $SO(10)$-Darstellungen leicht. Die Situation ist restriktiver als im Fall der dargestellten $SU(5)$-Theorie:

- Terme 1. Ordnung: Es sind keine Terme erlaubt.

- Terme 2. Ordnung: Die einzigen invarianten Kombinationen sind $10 \otimes 10$, $16 \otimes \bar{16}$ und $54 \otimes 54$. HH ist ein Massenterm für die Higgsteilchen. Der Term $C\bar{C}$ ist ein Massenterm für die symmetriebrechenden Higgsfelder. Im Prinzip sind die weiteren Terme der Form $\psi_i\bar{C}$ erlaubt; fordert man jedoch den Erhalt der R-Parität, so sind diese Terme ausgeschlossen. Aus dem zuletzt angegebenen Produkt hat man noch den Term SS, der das S-Feld massiv werden läßt.

[2]Aus anderen Gründen ist man aber auch an Modellen interessiert, die mehrere 10en enthalten, wie im Text besprochen wird.

- Terme 3. Ordnung: Möglich sind die Kombinationen $10 \otimes 16 \otimes 16$, $10 \otimes \bar{16} \otimes \bar{16}$, $10 \otimes 10 \otimes 54$ und $54 \otimes 54 \otimes 54$. Man hat also die Fälle: $H\psi_i\psi_j$, $H\psi_i C$, HCC, $H\bar{C}\bar{C}$, HHS und SSS.
  - $H\psi_i\psi_j$ liefert die benötigten Yukawakopplungen.
  - $H\psi_i C$ wird bei Energien unterhalb der GUT-Skala (C wird wie oben angegeben, durch den Singlett-vev ersetzt) auf die Kopplung 2. Ordnung $H\psi_i$ reduziert und scheidet (siehe Unterpunkt „Terme 2. Ordnung“) daher aus.
  - Ebenso reduzieren sich HCC und $H\bar{C}\bar{C}$ auf die Kopplungen 1. Ordnung H und fallen damit ebenfalls weg.
  - HHS liefert nach Symmetriebrechung einen Massenterm für H.
  - SSS ist eine Selbstkopplung für S.

Weiterhin folgt die Vereinigung der MSSM-Yukawakopplungen an der GUT-Skala, da die Kopplungen $h_\tau := h_{\bar{e}L\bar{h}}$, $h_b := Q\bar{d}\bar{h}$ und $h_t := h_{Q\bar{u}h}$ alle aus ein und derselben Kopplung entspringen.

Anhang D

Gruppentheorie

Eine kurze Definition einer Lie-Gruppe und deren Zusammenhang zu Symmetrien ist mit Abschnitt 2.1 im Text zu finden. Im folgenden sollen einige eher technische Grundlagen zusammengestellt werden.

Wie in [5] ausführlich erklärt wird, ist jeder Lie-Gruppe eindeutig eine Lie-Algebra zugeordnet.

Definition D.0.1. *Lie-Algebra*
Eine Lie-Algebra L ist ein Vektorraum, der zusätzlich mit einem bilinearen, antisymmetrischen Produkt (der Lie-Klammer) ausgestattet ist:

$$[,]: L \times L \to L, (x, y) \mapsto [x, y] \tag{D.0.D.1}$$

Wobei neben der Antisymmetrie die Jakobiidentität *gefordert wird:*

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \tag{D.0.D.2}$$

Der Zusammenhang von Lie-Gruppe und Lie-Algebra geht aus dem Folgenden hervor. Es stellt sich heraus, daß der Tangentialraum an die Identität an G die natürliche Struktur einer Lie-Algebra trägt:

$$L := T_{\mathbf{1}}G \tag{D.0.D.3}$$

Die Lie-Klammer kann man nun entweder mit Hilfe von links (oder rechs)-invarianten Vektorfeldern [47] oder auch durch folgende Abbildungen einführen:

$$\phi_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1} \tag{D.0.D.4}$$

Definition D.0.2. *Ad:*
$Ad : G \to End(L), g \mapsto D\phi_g$

Definition D.0.3. *ad:*
$ad : L \to End(L), x \mapsto D(Ad)x$

Offenbar kann man ad als bilineare Abbildung $L \times L \to L$ auffassen und die Eigenschaften einer Lie-Klammer nachrechnen.

Wie in [5] nachzulesen ist, erhält der Übergang zur Lie-Algebra die *lokale* (oder infinitesimale) Struktur der Gruppe. Die Umkehrung kann man über die sogenannte Exponentialabbildung [1] vornehmen. Bei diesem Übergang erhält man eine einfach zusammenhängende Gruppe, die *universelle Überlagerungsgruppe* zur Lie-Algebra. [2]

Wichtig für die Klassifikation halbeinfacher Lie-Algebren ist die

Definition D.0.4. *Killing-Form*
$B : L \times L \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto B(x, y) := Tr(ad(x)ad(y))$

Sie liefert ein Skalarprodukt auf der Lie-Algebra. Mit ihrer Hilfe gelang es die halbeinfachen Lie-Algebren vollständig zu klassifizieren. Für die Klassifikation unter Einführung von „einfachen Wurzeln“ und „Gewichten“ verweise ich auf [5, 48].

Von Bedeutung sind hier die beiden folgenden Resultate:

- Bei der Klassifikation ergeben sich alle klassischen Lie-Algebren; also insbesondere auch $su(n), so(n)$.
- Man erhält durch die entwickelten Methoden auch eine Klassifikation der endlichdimensionalen unitären *Darstellungen* der Lie-Algebren (Dynkin).

D.1 Generatorsysteme für $SO(10)$

Die Cliffordalgebra[3] stellt eine Realisierung der fundamentalen Darstellung von $SO(10)$ dar[4]. Sie ist definiert durch:

$$\Gamma_a^\dagger = \Gamma_a, \{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\delta_{ab}\mathbf{1},\ a, b \in \{1, .., 10\} \tag{D.1.D.1}$$

Die Generatoren erhält man dann (antisymmetrisch) nach

$$\Sigma_{ab} := \frac{1}{2i}[\Gamma_a, \Gamma_b]. \tag{D.1.D.2}$$

Und man kann die $so(10)$-Struktur nachrechnen.

[1] Für die Matrizengruppen ist die Exponentialabblidung einfach die formale Potenzreihe $A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$. In diesem Fall ist die Lie-Klammer einfach der Kommutator.

[2] Wenn in dieser Arbeit von $SO(10)$ die Rede ist, eigentlich die universelle Überlagerungsgruppe $Spin(10)$ gemeint. So sind die Spinordarstellungen im strengen Sinne keine Darstellungen von $SO(10)$ sondern lediglich von $Spin(10)$.

[3] Für gerade Dimension kann man zeigen, daß es (bis auf Äquivalenz) nur genau eine Cliffordalgebra gibt.

[4] Dabei kann man die Basiselemente gleichzeitig wegen des Antikommutator-Produkts auch als Operatoren ansehen.

D.2 Irreduzible Darstellungen

Die Frage nach den irreduziblen Darstellungen ist etwas schwieriger als im Fall der $SU(n)$, da man hier nicht mehr alle irreps aus Tensorprodukten der fundamentalen knstruieren kann [5]. In Tabelle D.1 sind die wichtigsten irreps zusammen mit ihrer Bildung aufgeführt. Eine vollständige Liste aller irreps findet man z.B. in [28].

dim	**Bildung**
10	fundamental
16	spinor
45	antisymmetrisch 2. Stufe, adjungiert
54	symmerisch 2. Stufe, spurlos
120	antisymmetrisch 3. Stufe
126	antisymmetrisch und selbstdual (5. Stufe)

Tabelle D.1: Irreduzieble Darstellungen der $so(10)$ bis zur Dimension 126.

Aus antisymmetrisierten Tensorprodukten erhält man die Darstellungen der folgenden Dimensionen:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = 10, \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = 45, \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = 120, \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 210, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 126. \tag{D.2.D.1}$$

Wobei der irreduzible Tensor fünfter Stufe nur die halbe Dimensionalität hat, weil man invariant fordern kann daß dieser seldstdual sein soll.

D.2.1 Explizite Realisierungen

Wie man sehen wird, kann man sehr viel Information aus den Darstellungen, deren Zerlegungen und Indizes ziehen. Gelegentlich ist es aber doch sinnvoll (und sei es wegen der Anschauung), eine konkrete Realisierung der abstrakten Darstellungen vor Augen zu haben. Im folgenden sei jeweils $T \in SO(10)$.

Die fundamentale Darstellung (10)

Als Darstellungsraum V wähle ich einfach den $\mathbb{R}^{10}$, auf dem die $SO(10)$ in der fundamentalen (oder auch definierenden) Weise operieren soll:

$$v \in V, v \to v' = Tv \tag{D.2.D.2}$$

[5] Das ermöglichte bei der $SU(n)$ die bequeme Klassifikation mit Hilfe von Youngtableaux. Eine vollständige Antwort kann man jedoch mit Hilfe von Dynkin-Diagrammen geben.

Die adjungierte Darstellung (45)

Die Darstellung wird als antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe gebildet. Als Darstellungsraum V wähle ich daher die Menge der antisymmetrischen 10×10-Matrizen: $V := \{A \in End(\mathbb{R}^{10}) | A^t + A = 0\}$. Faßt man A als Ausdruck für die Bilineare Form $(v, w) \rightarrow v^t A w$ auf, so wird man wegen $v'^t A w' = (Tv)^t A (Tw) = v^t (T^t A T) w$ auf das folgende Transformationsverhalten geführt:

$$A \in V, A \rightarrow A' = T^t A T \tag{D.2.D.3}$$

(Offenbar gilt $A' \in V$, denn $A'^t = T^t A^t T = -T^t A T = -A'$.)

Die symmetrische Darstellung (54)

Die Darstellung wird als symmetrischer, spurfreier Tensor zweiter Stufe gebildet. Als Darstellungsraum V wähle ich daher die Menge der symmetrischen spurfreien 10×10-Matrizen: $V := \{S \in End(\mathbb{R}^{10}) | S^t = S, tr(S) = 0\}$. Genauso wie bei der antisymmetrischen Darstellung wird man auf das folgende Transformationsverhalten geführt:

$$S \in V, S \rightarrow S' = T^t S T \tag{D.2.D.4}$$

(Offenbar gilt $S' \in V$, denn $S'^t = T^t S^t T = T^t S T = S'$ und $tr(S') = tr(T^t S T) = tr(T T^t S) = tr(S) = 0$.)

Die Spinordarstellung (16)

Da es sich hier nicht um Tensoren handelt, ist es schwieriger, eine explizite Realisierung zu finden[6]. Ich folge im wesentlichen der Darstellung, wie sie in [19] zu finden ist.

Zunächst führt man dazu eine neue Basis ein, deren Elemente gleichzeitig auch als Operatoren aufgefasst werden können [7]:

$$\chi_i := \Gamma_{2i} + i\Gamma_{2i-1}, \;\; i \in \{1, .., 5\} \tag{D.2.D.5}$$

$$\chi_i^\dagger = \Gamma_{2i} - i\Gamma_{2i-1} \tag{D.2.D.6}$$

Somit gilt $\{\chi_i, \chi_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ (alle anderen Antikommutatoren sind 0) und die aus den χ_i gebildeten Generatoren $T^i_j := \chi_i^\dagger \chi_j$ haben die Struktur von $su(5)$-Generatoren.

Basissystem	**Generator**	**Gruppe**
$\Gamma_a, a = 1..10$	$\Sigma_{ab} = \frac{1}{2i}[\Gamma_a, \Gamma_b]$	$SO(10)$
$\chi_i, i = 1..5$	$T^i_j = \chi_i^\dagger \chi_j$	$SU(5)$

[6] Genaugenommen handelt es sich dabei um eine Darstellung der Gruppe $Spin(10)$ und *nicht* von $SO(10)$. Es ist jedoch (per Def.) $spin(10) = so(10)$.

[7] Die angegebene Definition ist analog zur Definition der Leiteroperatoren L_+, L_- beim Drehimpuls.

Betrachte dazu die von den χ_i erzeugte Algebra. Jedes beliebige Produkt der χ_i kann man als Produkt schreiben, in dem jedes χ_i höchstens einmal vorkommt. Die Dimension der Algebra ist daher $2^5 = 32$. Die Darstellung ist allerdings nicht irreduzibel, denn wir können mit der Definition

$$\Gamma_0 := i^5 \Gamma_1 \times .. \times \Gamma_{10} = (-)^n \tag{D.2.D.7}$$

den Projektor $\frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \Gamma_0)$ benutzen, der zudem mit den Generatoren der $SO(10)$ kommutiert. Folglich bilden z.B. die Terme mit ungerader Anzahl n von χ_i-Faktoren eine 16-dim. irrep, die von nun an mit *Spinordarstellung* gemeint ist[8].

$$\Psi = \Psi_i \chi_i^\dagger + \Psi_{ijk} \chi_i^\dagger \chi_j^\dagger \chi_k^\dagger + \Psi_0 \chi_1^\dagger \chi_2^\dagger \chi_3^\dagger \chi_4^\dagger \chi_5^\dagger \tag{D.2.D.8}$$

Interessant ist, auf welche Weise wir hier die gewohnten $SU(5)$ Darstellungen antreffen (vgl. Anhang B): So entspricht der erste Summand einer $\bar{5}$, der zweite der 10 und der letzte einem Singlett 1.

Wie immer bei Spinordarstellungen benötigt man noch eine „charge conjugation"-Operation[9], um eichinvariante Yukavakopplungen bilden zu können. Hier kann man $C := \Pi_{a:odd} \Gamma_a$ wählen.

D.3 Invariante Produkte

Für die Entwicklung der Theorie sind die invarianten Produkte, die man aus den irreduziblen Darstellungen bilden kann, von zentraler Bedeutung. Um zu klären, wann ein bestimmtes Darstellungsprodukt ein Singlett enthält, ist es am einfachsten, auf bestehende Multiplikationstafeln zurückzugreifen, wie sie in [28] zu finden sind. Die hier benötigten Produkte sind in Tabelle D.2 aufgelistet. Die Darstellungen sind durch ihre Dimensionen bezeichnet[10].

Für den in Abschnitt D.2.1 gegebenen Realisierungen kann man die invarianten Ausdrücke auch explizit angeben.

D.3.1 Produkte der Darstellungen 45 und 54

Seien $U, V, W \in End(\mathbb{R}^{10})$. Dann betrachtet man die Ausdrücke

$$tr(UV) \tag{D.3.D.1}$$

[8] Es ist von der Größe her klar, daß die 16 nicht reduzibel sein kann.

[9] wie man sie z.B. für Diracspinoren kennt

[10] Bei Darstellungen, wie z.B. der 20 reicht diese Bezeichnung nicht aus, da es mehrere Darstellungen der Dimension 20 gibt. Die entsprechenden Darstellungen werden dann nach [28] durch die Bezeichnung 20′ etc. unterschieden.

Produkt	Zerlegung in irreduzible Anteile
$10 \otimes 10$	$1_s \oplus 45_a \oplus 54_s$
$10 \otimes \bar{16}$	$16 \oplus 144$
$10 \otimes 45$	$10 \oplus 120 \oplus 320$
$10 \otimes 54$	$10 \oplus 210' \oplus 320$
$16 \otimes 16$	$10_s \oplus 120_a \oplus 126_s$
$16 \otimes \bar{16}$	$1 \oplus 45 \oplus 210$
$16 \otimes 45$	$16 \oplus 144 \oplus 560$
$16 \otimes 54$	$144 \oplus 720$
$45 \otimes 45$	$1_s \oplus 45_a \oplus 54_s \oplus 210_s \oplus 770_s \oplus 945_a$
$45 \otimes 54$	$45 \oplus 54 \oplus 945 \oplus 1386$
$54 \otimes 54$	$1_s \oplus 45_a \oplus 54_s \oplus 660_s \oplus 770_s \oplus 1386_a$

Tabelle D.2: Ausreduktion der Produkte irreduzibler Darstellungen. Buchstaben a bzw. s bedeuten, daß die entsprechende Komponente als antisymmetrische bzw. symmetrische Kombination der beiden Faktoren zustandekommt.

und

$$tr(UVW). \tag{D.3.D.2}$$

Offenbar sind diese Produkte invariant, denn $tr(U'V') = tr(T^tUTT^tVT) = tr(TT^tUTT^tV) = tr(UV)$; analog folgt tr(U'V'W')=tr(UVW).

Ableitungen der invarianten Produkte

Die Ableitungen der invarianten Produkte tauchen z.B. in den F-Termen auf.

- Bilinearer Term:

$$\frac{\partial}{\partial U_{ab}} tr(UV) = \frac{\partial}{\partial U_{ab}} \sum_{i,j} U_{ij}V_{ji} = V_{ba} \tag{D.3.D.3}$$

- Trilinearer Term:

$$\frac{\partial}{\partial U_{ab}} tr(UVW) = \frac{\partial}{\partial U_{ab}} \sum_{i,j,k} U_{ij}V_{jk}W_{ki} = (VW)_{ba} \tag{D.3.D.4}$$

D.3.2 Produkte mit Spinoren 16

Das invariante Produkt $\bar{16} \otimes 45 \otimes 16$ schreibt sich nach ([22], Appendix A) mit den Generatoren Σ_{ab} als:

$$\bar{C}AC = \frac{1}{4}\bar{C}\Sigma_{ab}A_{ab}C \tag{D.3.D.5}$$

D.4 Verhalten von irreduziblen Darstellungen bei Symmetriebrechungen

Wie im Text (s. Abschnitt 2.3) angesprochen wird, hat die SSB zur Folge, daß eine irrep von $SO(10)$ bzgl. der reduzierten Symmetrie i.A. reduzibel ist. In [28] findet man für die hier benötigten „branching rules“ die in den Tabellen D.3 und D.4 dargestellten Zerlegungen, wobei die $U(1)$-Darstellungen durch ihre (hier noch nicht normierten) Ladungen angegeben werden.

$SO(10)$-irrep	$SU(4) \otimes SU(2) \otimes SU(2)$-Zerlegung
10	$(6,1,1) \oplus (1,2,2)$
16	$(4,1,2) \oplus (\bar{4},2,1)$
45	$(15,1,1) \oplus (6,2,2) \oplus (1,3,1) \oplus (1,1,3)$
54	$(20',1,1) \oplus (6,2,2) \oplus (1,3,3) \oplus (1,1,1)$

Tabelle D.3: „Brancing rule“ für $SO(10) > SU(4) \otimes SU(2) \otimes SU(2)$

$SU(4)$-irrep	$SU(3) \otimes U(1)$-Zerlegung
4	$1(3) \oplus 3(-1)$
6	$3(2) \oplus \bar{3}(-2)$
15	$1(0) \oplus 3(-4) \oplus \bar{3}(4) \oplus 8(0)$

Tabelle D.4: „Brancing rule“ für $SU(4) > SU(3) \otimes U(1)$

Anhang E

Aufspaltung der Darstellungen und gruppentheoretische Faktoren

Aus Abschnitt D.4 läßt sich bestimmen, in welche Anteile die irreps der $SO(10)$ zerfallen. Benutzt man die mit Gleichung (3.4.3.2) gefundene konsequente Normierung der $U(1)$-Ladungen, so lassen sich auch die $U(1)$-Ladungen der Anteile, in die eine irrep zerfällt, bestimmen.

Die folgenden Tabellen enthalten neben der *Aufspaltung* auch noch die im Text benötigten *gruppentheoretischen Konstanten* c_2 und c_3 wie sie mit den Definitionen 2.5.2 und 2.5.9 eingeführt wurden.

Die Werte von c_2 für einzelne irreps kann man Tabellen entnehmen. So findet man beispielsweise in [28] eine Tabelle (S.92ff) in der zu jeder irrep deren Index angegeben ist. Der dort benutzte Index l hängt mit dem hier benutzten c_2 wie folgt zusammen (wie man leicht an der fundamentalen Darts. nachprüfen kann):

$$c_2(R) = l(R)/2 \tag{E.0.E.1}$$

Die Berechnung von c_3 erfolgt dann nach Formel (2.5.2.48). Auf diese Weise erhält man schließlich folgende Tabellen:

Ich schließe diesen Abschnitt mit der Bemerkung, daß der aufsummierte Beitrag einer jeden $SO(10)$-Darstellung für jeden Gruppenfaktor den gleichen Wert liefert, wie ihn die $SO(10)$-Darstellung selbst hat. Die Behandlung *vollständiger* Darstellungen (d.h. solche, bei denen nicht nur Teile „überleben“) ist dadurch vereinfacht.

G	$SO(10)$	G_{422}			G_{3122}				G_{321}		
R	10	6	1	1	3	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	1	1	3	1	$2\sqrt{\frac{1}{60}}$
					$\bar{3}$	$+\sqrt{\frac{1}{6}}$	1	1	$\bar{3}$	1	$-2\sqrt{\frac{1}{60}}$
		1	2	2	1	0	2	2	1	2	$3\sqrt{\frac{1}{60}}$
									1	$\bar{2}$	$-3\sqrt{\frac{1}{60}}$
c_2	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$3 \cdot \frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$3 \cdot \frac{4}{60}$
					$\frac{1}{2}$	$3 \cdot \frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$3 \cdot \frac{4}{60}$
		0	$2 \cdot \frac{1}{2}$	$2 \cdot \frac{1}{2}$	0	0	$2 \cdot \frac{1}{2}$	$2 \cdot \frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$2 \cdot \frac{9}{60}$
									0	$\frac{1}{2}$	$2 \cdot \frac{9}{60}$
Σ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
c_3	$\frac{9}{2}$	$\frac{15}{6}$	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{60}$
					$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{60}$
		0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{60}$
									0	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{60}$

Tabelle E.1: Aufspaltung der irrep 10

G	$SO(10)$	G_{422}			G_{3122}				G_{321}			Bez.
R	16	4	1	2	1	$\sqrt{\frac{3}{8}}$	1	2	1	2	$-3\sqrt{\frac{1}{60}}$	ν
												e
					3	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}$	1	2	3	2	$\sqrt{\frac{1}{60}}$	u
												d
		$\bar{4}$	2	1	1	$-\sqrt{\frac{3}{8}}$	$\bar{2}$	1	1	1	$6\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{e}$
									1	1	0	$\bar{\nu}$
					$\bar{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}$	2	1	$\bar{3}$	1	$-4\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{u}$
									$\bar{3}$	1	$2\sqrt{\frac{1}{60}}$	$\bar{d}$
c_2	2	$2\cdot\frac{1}{2}$	0	$4\cdot\frac{1}{2}$	0	$2\cdot\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{18}{60}$	
					$2\cdot\frac{1}{2}$	$6\cdot\frac{1}{24}$	0	$3\cdot\frac{1}{2}$	$2\cdot\frac{1}{2}$	$3\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{6}{60}$	
		$2\cdot\frac{1}{2}$	$4\cdot\frac{1}{2}$	0	0	$2\cdot\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{36}{60}$	
									0	0	0	
					$2\cdot\frac{1}{2}$	$6\cdot\frac{1}{24}$	$3\cdot\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{48}{60}$	
									$\frac{1}{2}$	0	$\frac{12}{60}$	
Σ	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
c_3	$\frac{45}{8}$	$\frac{15}{8}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{60}$	
					$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{60}$	
		$\frac{15}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	0	$\frac{36}{60}$	
									0	0	0	
					$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{16}{60}$	
									$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{60}$	

Tabelle E.2: Aufspaltung der irrep **16**

G	$SO(10)$	G_{422}			G_{3122}				G_{321}			Bez.
R	45	15	1	1	1	0	1	1	1	1	0	
					3	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}$	1	1	3	1	$4\sqrt{\frac{1}{60}}$	
					$\bar{3}$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}$	1	1	$\bar{3}$	1	$-4\sqrt{\frac{1}{60}}$	
					8	0	1	1	8	1	0	*Gluon*
		6	2	2	3	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}$	2	2	3	2	$\sqrt{\frac{1}{60}}$	
									3	2	$-5\sqrt{\frac{1}{60}}$	X
					$\bar{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}$	2	2	$\bar{3}$	2	$5\sqrt{\frac{1}{60}}$	Y
									$\bar{3}$	2	$-\sqrt{\frac{1}{60}}$	
		1	3	1	1	0	3	1	1	1	$6\sqrt{\frac{1}{60}}$	
									1	1	0	B
									1	1	$-6\sqrt{\frac{1}{60}}$	
		1	1	3	1	0	1	3	1	3	0	W
c_2	8	4	0	0	0	0	0	0				
					$\frac{1}{2}$	2	0	0				
					$\frac{1}{2}$	2	0	0				
					3	0	0	0				
		4	6	6	2	2	3	3				
					2	2	3	3				
		0	2	0	0	0	2	0				
		0	0	2	0	0	0	2				
Σ	8	8	8	8	8	8	8	8				
c_3	8	4	0	0	0	0	0	0				
					$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0				
					$\frac{4}{3}$	1	0	0				
					3	0	0	0				
		$\frac{15}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$				
					$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$				
		0	2	0	0	0	2	0				
		0	0	2	0	0	0	2				

Tabelle E.3: Aufspaltung der irrep **45**

G	$SO(10)$	G_{422}		
R	54	20′	1	1
		6	2	2
		1	3	3
		1	1	1
c_2	12	8	0	0
		4	6	6
		0	6	6
		0	0	0
Σ	12	12	12	12

Tabelle E.4: Aufspaltung der irrep **54**

Literaturverzeichnis

[1] F. Wilczek, *Beyond The Standard Model: This Time for Real*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **77**, 511 (1999).

[2] J. C. Pati, *The Role of Gravity in Determining Physics At High As Well As Low Energies*, hep-ph/9506458 (1995).

[3] Z. Chacko and R. N. Mohapatra, *Economical Doublet-Triplet Splitting and Strong Suppression of Proton Decay in SO(10)*, Phys.Rev. **D59**, 011702 (1999).

[4] H. P. Nilles, *Minimal supersymmetric standard model and grand unification*, TASI Lectures (1993).

[5] J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics* (Academic Press Limited, London, 1990), Vol. II.

[6] H. Kalka, *Supersymmetrie* (Teubner, Stuttgart, 1997).

[7] J. A. Bagger, *Weak-Scale Supersymmetry: Theory and Practice*, hep-ph/9604232 (1996).

[8] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1996).

[9] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, ADDRESS, 1983).

[10] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1996).

[11] T. Blažek, S. Raby, and K. Tobe, *Neutrino Oscillations in a Predictive SUSY GUT*, Phys. Rev. **D60**, 113001 (1999).

[12] A. Pérez-Lorenzana, W. A. Ponce, and A. Zepeda, *Non SUSY and SUSY one-step Unification*, Mod. Phys. Lett. **A13**, 2153 (1998).

[13] B. Stroustrup, *The C++ Programming Language*, 3rd ed. (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1998).

[14] M. Masip, *Unification through Extra Dimensions at Two Loop*, hep-ph/0001115 14 (2000).

[15] V. Barger, M. S. Berger, and P. Ohmann, *Supersymmetric Grand Unified Theories: Two Loop Evolution of Gauge and Yukawa Couplings*, Phys. Rev. **D47**, 1093 (1993).

[16] H. R. Schwarz, *Numerische Mathematik* (B.G. Teubner, Stuttgart, 1993).

[17] R. Rattazzi, U. Sarid, and L. Hall, *Yukawa Unification: The Good, The Bad and The Ugly*, hep-ph/9405313v2 (1994).

[18] T. P. Cheng and L. F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Oxford University press, New York, 1984).

[19] R. N. Mohapatra, *Supersymmetric Grand Unification (Lectures at TASI97)*, hep-ph/9801235v2 (1998).

[20] C. S. Aulakh, *Supersymmetric Unification in the Light of Neutrino Mass*, hep-ph/9903309 (1999).

[21] H. P. Nilles, *Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics*, Phys. Rept. 110 **1**, (1984).

[22] K. S. Babu and S. M. Barr, *Natural suppression of Higgsino-mediated proton decay in supersymmetric SO(10)*, Phys. Rev. **D48**, 5354 (1993).

[23] K. S. Babu and S. M. Barr, *Natural gauge hierarchy in SO(10)*, Physical Review **D50**, 3529 (1994).

[24] K. S. Babu and S. M. Barr, *Supersymmetric SO(10) simplified*, Physical Review **D51**, 2463 (1995).

[25] S. M. Barr, *Minimal SO(10) Unification*, Phys. Rev. Lett. **79**, 4748 (1997).

[26] C. H. Albright and S. M. Barr, *Fermion Masses in SO(10) with a single adjoint Higgs field*, Phys. Rev. **D58**, 013002 (1998).

[27] C. S. Aulakh, B. Bajc, A. Melfo, A. Rašin, and G. Snejanović, *Intermediate Scales in Supersymmetric GUTs: the Survival of the Fittest*, Phys. Lett. **B460**, 325 (1999).

[28] R. Slansky, *Group theory for unified model building* (Phys.Rept.79:1-128, Los Alamos, 1981).

[29] P. Nath, *Grand Unification and B and L Conservation*, hep-ph/9809352 (1998).

[30] W. M. Alberico and S. M. Bilenky, *New developments in neutrino physics*, hep-ph/9905254 (1999).

[31] D. P. Roy, *Neutrino Mass and Oscillations: An Introductory Review*, hep-ph/9903506 (1999).

[32] S. M. Bilenky, *Neutrino masses, mixing and oscillations*, hep-ph/ 0001311 (2000).

[33] S. M. Bilenky, *Finally neutrino has mass*, arXiv:hep-ph/9902462 v2 (2000).

[34] P. Langacker, *Neutrino Mass*, Tasi Lectures (1990).

[35] R. N. Mohapatra, *Theories of Neutrino Masses and Mixings*, hep-ph/9910365 (1999).

[36] N. Fornengo, *Standard and exotic interpretations of the atmospheric neutrino data*, hep-ph/0001111 .

[37] S. M. Bilenky, *Sterile neutrinos?*, hep-ph/9905246 (1999).

[38] S. M. Bilenky, *Phenomology of Neutrino Oscillations*, Prog. Part. Nucl. Phys. **43**, 1 (1999).

[39] K. S. Babu, J. C. Pati, and F. Wilczek, *Fermion Masses, Neutrino Oscillations, and Proton Decay in the Light of SuperKamiokande*, Nucl. Phys. **566**, B33 (2000).

[40] K. Cahill, *B - L Neutrinos*, hep-ph/9912508 (1999).

[41] K. S. Babu, B. Dutta, and R. N. Mohapatra, *Up-Down Unification, Neutrino Masses, and Rare Lepton Decays*, Phys. Lett. **B458**, 93 (1999).

[42] M. Carena, J. Ellis, S. Lola, and C. Wagner, *Neutrino masses, mixing angles and the unification of couplings in the MSSM*, hep-ph/ 9906362 (1999).

[43] J. Erler and P. Langacker, *Status of the Standard Model*, hep-ph/9809352 (1998).

[44] P. Fayet, *About R - Parity and The Supersymmetric Standard Model*, hep-ph/9912413 (1999).

[45] H. P. Nilles, *Phenomological Aspects of Supersymmetry*, hep-ph/9511313 (1995).

[46] R. N. Mohapatra, *Unification and Supersymmetry* (Springer Verlag, New York, 1992).

[47] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1996).

[48] H. F. Jones, *Groups, Representations and Physics* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1998).

Danksagung

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Hans-Peter Nilles, der mich in seine Arbeitsgruppe aufgenommen hat und es mir ermöglicht hat, dieses interessante Gebiet in Seminaren, Gruppentreffen und Konferenzen näher kennen zu lernen.

Weiterhin danke ich meiner Arbeitsgruppe für ihre Unterstützung, Hilfe bei Problemen und anregende Gespräche: Rafal Ciesielski, Jan Conrad, Stefan Förste, Gabriele Honecker, Zygmunt Lalak, Stephane Lavignac, Radoslaw Matyszkiewicz, Stefan Groot Nibbelink, Ralph Schreyer, Martin Walter und Max Zucker.

Mein besonderer Dank gilt meiner Frau Ambili, die mir während der ganzen Diplomarbeit stets zur Seite stand und viele andere Dinge zurückgestellte.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinem Zimmergenossen Omid Nohadani, der mir nicht nur bei Computerfragen, sonderen auch menschlich eine große Hilfe war.

Mein herzlicher Dank gilt auch meiner Mutter, die mich aufgemuntert und mir auch bei den Korrekturen geholfen hat, meinen Brüdern und Freunden, besonders Michael Küpper und Christof Bäumgen. Nicht zuletzt möchte ich mich auch ausdrücklich bei meinen zahlreichen Korrektoren bedanken.