Anwesenheitsübungen I

28. Oktober – 1. November

A1.1 *partielle und totale Ableitung*

(1) Betrachte eine rellwertige Funktion $H(p(t), q(t), t)$, wobei die beiden ersten Variablen von der dritten abhängen. Zeige für die totale Ableitung:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

(2) Es sei konkret $H = p^2 + tq^2$ sowie $p(t) = t^2$ und $q(t) = t$. Setze p und q in H ein, berechne die Ableitung und vergleiche mit (1).

(3) Betrachte als zweites Beispiel $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ und zeige

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

(4) Wie lauten die totalen Differentiale dH und dL von H und L?

(5) Sei $L = L(q, \dot{q})$ (keine explizite Zeitabhängigkeit). Ferner gelte

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}. \tag{1}$$

Man zeige, daß $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$ konstant ist. Wie lautet diese Konstante für $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$? Um welche physikalische Grösse handelt es sich? Wie lautet Gleichung (1)?

A1.2 *Zylinderkoordinaten und kartesische Koordinaten*

Die kartesischen Koordinaten berechnen sich aus den Zylinderkoordinaten gemäß

$$x = \rho\cos\phi \ , \ \ y = \rho\sin\phi \ , \ \ z = z.$$

(1) Man berechne die Differentiale dx, dy und dz und die Metrik, d.h. $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

(2) Man gebe die Zylinderkoordinaten als Funktion der kartesischen Koordinaten an.

(3) Wir definieren die Vektoren $\vec{v}_\rho$, $\vec{v}_\phi$, $\vec{v}_z$ wie folgt: $\vec{v}_\rho$ ist der Tangentenvektor an die Kurve $\phi = const, z = const$; $\vec{v}_\phi$ ist der Tangentenvektor an die Kurve $\rho = const$, $z = const$; $\vec{v}_z$ ist der Tangentenvektor an die Kurve $\rho = const, \phi = const$. Man berechne die Koeffizienten einer Zerlegung von $\vec{v}_\rho$, $\vec{v}_\phi$, $\vec{v}_z$ nach kartesischen Einheitsvektoren und ordne das Ergebnis in Matrixform an.

(4) Sei $f(x, y, z)$ eine Funktion, die von den kartesischen Koordinaten abhängt. Man berechne den Vektor $(\partial f/\partial\rho, \partial f/\partial\phi, \partial f/\partial z)^T$ und drücke ihn mit einer Matrixgleichung durch $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)^T$ aus.

(5) Die Komponenten der metrischen Matrix g sind gegeben durch $g_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$. Welche Symmetrieeigenschaften hat g? Man berechne g in Zylinderkoordinaten. Man berechne den formalen Ausdruck $\sum_{i,j\in\{\rho,\phi,z\}} g_{ij}dx^i dx^j$ und vergleiche mit (1).

Hausaufgaben

Abgabe 4. November – 8. November

H1.1 *Kugelkoordinaten*

Die kartesischen Koordinaten berechnen sich aus den Kugelkoordinaten gemäß

$$x = \rho \cos\theta \ , \ y = \rho \cos\phi \sin\theta \ , \ z = \rho \sin\phi \sin\theta .$$

(1) Man berechne $x^2 + y^2 + z^2$.
(2) Man berechne die Differentiale dx, dy und dz und die Metrik, d.h. $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$.
(3) Wir definieren die Vektoren $\vec{v}_\rho$, $\vec{v}_\theta$, $\vec{v}_\phi$ wie folgt: $\vec{v}_\rho$ ist der Tangentenvektor an die Kurve $\theta = const, \phi = const$; $\vec{v}_\theta$ ist der Tangentenvektor an die Kurve $\rho = const$, $\phi = const$; $\vec{v}_\phi$ ist der Tangentenvektor an die Kurve $\rho = const, \theta = const$. Man berechne die Koeffizienten einer Zerlegung von $\vec{v}_\rho$, $\vec{v}_\theta$, $\vec{v}_\phi$ nach kartesischen Einheitsvektoren und ordne das Ergebnis in Matrixform an.
(4) Sei $f(x, y, z)$ eine Funktion, die von den kartesischen Koordinaten abhängt. Man berechne den Vektor $(\partial f/\partial\rho, \partial f/\partial\theta, \partial f/\partial\phi)^T$ und drücke ihn mit einer Matrixgleichung durch $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)^T$ aus.
(5) Die Komponenten der metrischen Matrix g sind gegeben durch $g_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$. Man berechne g in Kugelkoordinaten. Man berechne den formalen Ausdruck $\sum_{i,j\in\{\rho,\theta,\phi\}} g_{ij}dx^i dx^j$ und vergleiche mit (2). **(12 Punkte)**

H1.2 *Effektives Potential*

Die Kraft sei derart, daß sie durch ein Potential ausgedrückt werden kann, d.h. die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten ($i = 1, \ldots, Dimension$)

$$\ddot{q}_i = -\frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q^i} \tag{2}$$

Betrachten wir zunächst ein eindimensionales System mit $V(q) = \frac{\omega}{2}q^2$.
(1) Wie ist die Abhängigkeit der rücktreibenden Kraft vom Abstand q? Um welches dynamische System handelt es sich?
(2) Was passiert für $\omega < 0$? Ist das System stabil?
(3) Bleibt das System für sehr grosse ω dynamisch?
(4) Wie lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung (2) für den statischen Fall?
(5) Was sagt das Vorzeichen von V'' an einem Extremwert über die Stabilität des Systems aus?
Betrachten wir nun ein zweidimensionales System, d.h. $\vec{q} = (q_1, q_2)$. Das Potential sei

$$V(\vec{q}) = \frac{\alpha}{2}q_1^2 - \sqrt{\beta\omega}\, q_1 q_2 + \frac{\omega}{2}q_2^2,$$

mit $\alpha, \beta, \omega > 0$. Für sehr grosse ω können wir $\dot{q}_2 \equiv 0$ annehmen.
(6) Man löse die Bewegungsgleichung für q_2 und setze die Lösung in V ein. Das Ergebnis ist das effektive Potential V_{eff}.
(7) Wie lautet die Bewegungsgleichung des nunmehr effektiv eindimensionalen Problems, d.h. die Bewegungsgleichung für q_1?
(8) Man gebe eine Bedingung für α an, so daß das effektive System stabil ist. **(10 Punkte)**