# Anwesenheitsübungen X

13. Januar – 18. Januar

A10.1 *Elektrischer Dipol und Quadrupol*

Zwei Punktladungen $\pm Q$ befinden sich an den Orten $(0, 0, \pm a/2)$.

(1) Wie sehen Ladungsverteilung und Potential aus?

(2) Die Ladungen sollen so zusammenrücken, daß die Größe $p = Qa$ konstant bleibt. Das Potential ist um $a = 0$ zu entwickeln, und es ist zu zeigen, daß sich für $a \to 0$ das Potential $\Phi = pz/r^3$ ergibt.

(3) Welches Potential ergibt sich aus der Ladungsdichte $\rho = -p\delta(x)\delta(y)\delta'(z)$? Das Ergebnis ist mit (2) zu vergleichen und zu interpretieren.

(4) Das elektrische Feld des Dipols ist zu berechnen, und es soll eine Skizze mit Feld- und Äquipotentiallinien angefertigt werden.

Betrachten wir nun eine in einem Gebiet $G$ (mit $0 \in G$) lokalisierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$.

(5) Für das Fernfeld ($r \gg \mathrm{vol}(G)^{1/3}$) einer solchen Verteilung soll gezeigt werden, daß

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} q_{ij} + \ldots$$

wobei Dipolmoment $\vec{p}$ und Quadrupoltensor $q_{ij}$ durch $\vec{p} = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}$ bzw. $q_{ij} = \int d^3r\, (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})$ gegeben sind.

(6) Es ist zu zeigen, daß für verschwindende Gesamtladung $Q = 0$ das Dipolmoment von der Wahl des Koordinatenursprungs unabhägnig ist, während für $Q \neq 0$ der Ursprung immer so gewählt werden kann, daß das Dipolment verschwindet.

(7) Mit welcher Potenz von $r$ fallen Feld und Potential beim Dipol und Quadrupol ab?

A10.2 *Punktladung vor einer Metallwand*

Eine Möglichkeit der Lösung der Poissongleichung mit vorgegebenen Randbedingungen für ein Volumen $V$ besteht darin, außerhalb von $V$ an von der Geometrie des Problems abhängigen Stellen fiktive (Spiegel-)Ladungen anzubringen. Wir betrachten dazu folgendes Beispiel. Eine Punktladung $Q$ sei am Ort $\vec{r}_Q = (0, 0, a)$, und eine unendlich große geerdete Metallplatte liege in der $xy$-Ebene bei $z = 0$. Das heißt, in der $xy$ Ebene bei $z = 0$ soll das elektrostatische Potential $\Phi$ verschwinden.

(1) Es ist zu zeigen, daß dieses Randwertproblem durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} - \frac{Q}{|\vec{r} + \vec{r}_Q|}$$

gelöst wird, wobei $\vec{r}$ in dem Halbraum, in dem sich die Ladung befindet, liegen soll.

(2) Wie sieht das Potential im anderen Halbraum aus?

(3) Wie kann man das Zustandekommen des Potentials anschaulich interpretieren.

(4) Es ist zu zeigen, daß die Oberflächenladungsverteilung aufgrund von Influenz auf der Platte durch den Sprung des elektrischen Feldes gemäß $\sigma = -(1/4\pi)\partial\, \Phi/\partial z|_{z=0}$ gegeben ist.

(5) Es ist eine Zeichnung mit den Feldlinien und mit $\sigma(x, y)$ anzufertigen. Welche Symmetrie gibt es?

(6) Wie groß ist die totale Influenzladung $Q_{inf} = \int_{\text{Metallplatte}} dxdy\, \sigma(x, y)$?

(7) Welche Kraft wird auf $Q$ ausgeübt? Was passiert für eine nicht geerdete Platte?

## Hausaufgaben

Abgabe 20. Januar – 24. Januar

H10.1 *Geladene Walze und geladenes Rohr* (11 Punkte)

Ein unendlich langer Vollzyllinder mit Radius $a$ ist gleichförmig elektrisch geladen.
(1) Durch Lösung der Poissongleichung und mit Hilfe von Symmetrieargumenten ist das elektrische Potential im Innen- und Außenraum zu berechnen. Warum darf das Potential im Innnern der Walze keine Singularitäten haben?
(2) Potential und Feld müssen auf der Oberfläche stetig sein. Mit Hilfe dieser Bedingung sollen die Integrationskonstanten fixiert werden. Das Potential ist zu skizzieren.
Ein unendlich langer Hohlzyllinder mit Radius $a$ ist gleichförmig elektrisch geladen.
(3) Durch Lösung der Poissongleichung und mit Hilfe von Symmetrieargumenten ist das elektrische Potential im Innen- und Außenraum zu berechnen. Warum darf das Potential im Innnern des Rohrs keine Singularitäten haben?
(4) Das Potential muß auf der Oberfläche stetig sein. Mit Hilfe dieser Bedingung sollen die Integrationskonstanten fixiert werden. Das Potential ist zu skizzieren, und das Ergebnis soll mit (2) verglichen werden.
(5) Wie verhält sich das Feld an der Rohrwand?
Hinweis: Laplace in Zylinderkoordinaten: $\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

H10.2 *Eine Konfiguration von Punktladungen* (6 Punkte)

Im Ursprung befinde sich eine Ladung $-2q$ und in $(0,0,\pm a)$ je eine Ladung $q$.
(1) Es sind die Gesamtladung, Dipolmoment und Quadrupoltensor zu berechnen.
(2) Das Quadrupolpotetential und -feld sind zu berechnen. Es soll eine Skizze mit den Feld- und Äquipotentaillinien angefertigt werden.
(3) In welchem Grenzfall wird das Feld der Konfiguration zum reinen Quadrupolfeld?

H10.3 *Punktladung außerhalb einer Metallkugel* (13 Punkte)

Eine Punktladung sei am Ort $\vec{r}_Q = (0,0,a)$ außerhalb einer geerdeten Metallkugel mit Radius $R$ um den Ursprung, auf der das elektrostatische Potential $\Phi = 0$ sein soll.
(1) Es ist zu zeigen, daß

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} - \frac{R}{a}\frac{Q}{\left|\vec{r} - \frac{R^2}{a^2}\vec{r}_Q\right|}$$

die Poissongleichung im Außenraum nebst Randbedingung auf der Kugeloberfläche erfüllt.
(2) Wie sieht das Potential innerhalb der Kugel aus?
(3) Wie kann man das Zustandekommen des Potentials anschaulich interpretieren?
(4) Das Potential ist als eine Funktion der Kugelkkoordinaten auszudrücken. Kann es vom Winkel $\varphi$ abhängen?
(5) Für die Oberflächenladungsverteilung ist die Formel $\sigma = -(1/4\pi)\,\partial\Phi/\partial r|_{r=R}$ zu begründen. Ferner soll $\sigma$ berechnet werden.
(6) Es ist eine Zeichnung mit den Feldlinien und mit $\sigma(\vartheta)$ anzufertigen. Welche Symmetrie gibt es?
(7) Wie groß ist die totale Influenzladung $Q_{inf} = \int_{\text{Kugel}} \sigma(\vartheta)\, d\Omega$?
(8) Welche Kraft erfährt $Q$? Was passiert für eine nicht geeredete Kugel?
(9) Wie lautet $\Phi$, wenn sich die Ladung innerhalb der Kugel befindet?