Anwesenheitsübungen XI

20. Januar – 24. Januar

A11.1 *Wiederholung der Mechanik*

(1) N Teilchen befinden sich an den Positionen $\vec{r}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ und wechselwirken miteinander über Zweiteilchenkräfte $\vec{F}_{ij}$. Unter welchen Voraussetzungen ist der Gesamtdrehimpuls erhalten?

(2) Ein Teilchen bewege sich im Zentralfeld mit Potential $V(r)$. Es ist das effektive Potential für verschiedene Drehimpulse zu skizzieren.

(3) Die Lagrangefunktion eines Systems sei invariant unter Drehungen um die x-Achse. Die zugehörige Erhaltungsgröße ist mit Hilfe des Noethertheorems zu bestimmen.

(4) An den Orten $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,1)$ und $P_3 = (0,2)$ befinden sich Großbaustellen, die durch ein gemeinsames Betonwerk mit Fertigteilen zu versorgen sind. Das Betonwerk $S(x,y)$ soll an der Bahnlinie mit der Kurvendarstellung $y^2 - x^2 + 1 = 0$ (und bei $x < 0$) errichtet werden, und zwar so, daß die täglichen Gesamttransportkosten möglichst gering werden. Dabei sollen die Transportkosten als proportional zum Abstandsquadrat angenommen werden.

(5) Drei Perlen der Masse m, die untereinander mit Federn der Konstanten k verbunden sind, können sich nur auf einer Geraden bewegen. Wie groß sind die Eigenfrequenzen?

(6) Wie sieht der Trägheitstensor einer homogenen Kugel aus?

(7) Ein System mit Koordinate $\vec{r}$ rotiert im kräftefreien Raum gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$. Es ist zu zeigen, daß ein Beobachter in diesem rotierenden System die folgende Kraft erfährt:

$$\vec{F} = \underbrace{-2m\left(\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}\right)}_{\text{Corioliskraft}} \underbrace{-m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)}_{\text{Zentrifugalkraft}}.$$

(8) Die totale Ableitung einer Funktion $F(p,q,t)$ nach der Zeit ist durch Poissonklammern auszudrücken.

Hausaufgaben

Abgabe 27. Januar – 31. Januar

H11.1 *Axiale und polare Vektoren* (6 Punkte)

Wie transformieren sich die Vektoren $\text{grad} f = \vec{\nabla} f$ und $\text{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ unter Drehungen und Spiegelungen $\vec{x} \to a\vec{x}$ mit $a \in O(3)$, falls f ein Skalar und $\vec{A}$ ein polarer Vektor sind?

H11.2 *Laplace in Kugelkoordinaten* (6 Punkte)

Der Laplaceoperator ($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ in kartesischen Koordinaten) ist in Kugelkoordinaten auszudrücken. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man den allgemeinen Ausdruck

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det g} \left(g^{-1}\right)^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

verwendet, wobei g der metrische Tensor ist. Falls der metrische Tensor für Kugelkoordinaten nicht bekannt sein sollte, kann er leicht wie folgt bestimmt werden. Die formale Größe $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$ ist invariant unter Koordinatenwecheln und nimmt in kartesischen Koordinaten die Form $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ an. (Siehe auch A1.2 bzw. H1.1.)

H11.3 *Kondensatoren* (12 Punkte)

(1) Es ist die Kapazität eines Plattenkondensators zu berechnen. Die Kapazität c gibt an, welche Ladung q bei gegebener Spannung V auf den Kondensator paßt, d.h. $c = q/V$. Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen Metallplatten der Fläche F, die in einer Raumrichtung um den Abstand d versetzt sind. Streufelder am Kondensatorrand sollen nicht berücksichtigt werden.
(2) Wie groß ist die Kapazität eines Kugelkondensators? Der Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen Kugelschalen. Jede Kugel trägt die Ladungen homogen verteilt; die Gesamtladung auf der äußeren Kugel ist $-q$ und auf der inneren Kugel q. Die Radien sind r_1 und r_2.
(3) Gesucht ist die Kapazität eines Kondensators, der aus zwei koaxialen Zylindern der Höhe h mit den Radien r_1 und r_2 besteht. Das Streufeld an den Rändern ist zu vernachlässigen.

H11.4 *Der Satz von Stokes* (9 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Wo ist das Feld definiert und wie lautet es in Zylinderkoordinaten?
(2) Wie groß ist $\text{rot}\vec{A}$?
(3) Es ist das Linienintegral von $\vec{A}$ längs eines positiv orientierten Kreises in der xy–Ebene um den Ursprung zu berechnen. Wie ist das Ergebnis mit dem Satz von Stokes zu vereinbaren?