Anwesenheitsübungen XIII

3. Februar – 7. Februar

A13.1 *Eindeutigkeit des dritten Randwertproblems der Potentialtheorie*

Wir betrachten eine glatte geschlossene Fläche (S) und bezeichnen mit V_i das Innere von S. Uns interessiert die Aufgabe, eine Funktion u zu finden, die in V_i (inneres Problem) die Poissongleichung $\Delta u = g$ (g gegeben) und auf S die Randbedingung

$$k\frac{\partial u}{\partial n} - hu = u_0\,(x, y, z)$$

erfüllt. Hier ist $\partial u/\partial n$ die Richtungsableitung in Richtung der inneren Normalen. Ferner sei $kh \geq 0$ und k und/oder h ungleich Null.

(1) Wie heißen die Randwertprobleme, die sich in den Spezialfällen $k = 0$ bzw. $h = 0$ ergeben?

(2) Es ist zu zeigen, daß obiges Randwertproblem eine eindeutige (für $h = 0$ bis auf eine additative Konstante) Lösung besitzt. Hinweis: Man bestimme das Vorzeichen von $\int_{V_i} dV \left|\vec{\nabla}\,(u_1 - u_2)\right|^2$ einmal direkt und einmal mit Hilfe der Greenschen Identität (oder des Gaußschen Integralsatzes). Hier sind u_1, u_2 Lösungen des Randwertproblems.

A13.2 *Legendresche Differentialgleichung*

Für ein zylindersymmetrisches Problem setzen wir die Lösung der Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ in Kugelkoordinaten als

$$\Phi\,(r) = \frac{U(r)}{r}\,P\,(\cos\vartheta)$$

an.

(1) Welcher Differentialgleichung muß $P\,(\cos\vartheta)$ genügen?

(2) Wir betrachten nun die *Legendre*sche Differentialgleichung ($x \in [-1, 1]$)

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1 - x^2\right)\frac{dP_\ell(x)}{dx}\right) + \ell\,(\ell + 1)\,P_\ell(x) = 0$$

mit den "Randbedingungen"

$$\left(1 - x^2\right)P'_\ell(x)\big|_{x=\pm 1} = 0.$$

Welche Bedingung müssen wir an ℓ stellen, wenn wir uns wünschen, daß sich $P_\ell(x)$ als Polynom endlichen Grades schreiben läßt? Hinweis: Polynomansatz einsetzen und Koeffizienten in höchster vorkommender Potenz vergleichen.

(3) Es ist zu zeigen, daß, falls v die Differentialgleichung

$$\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left[\left(1 - x^2\right)v' + 2\ell x v\right] = 0$$

erfüllt, $P_\ell(x) = d^\ell v/dx^\ell$ eine Lösung der *Legendre*schen Differentialgleichung ist. Hinweis: *Leibniz*sche Formel: $d^n(vu)/dx^n = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{d^k v}{dx^k}\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}$.

(4) Mit dem Ergebnis von Aufgabe (3) kann eine spezielle Lösung der *Legendre*schen Differentialgleichung als ℓ-te Ableitung eines Polynomes 2ℓ-ten Grades in x ausgedrückt werden. Fixiert man noch die Normierung über $P_\ell(1) = 1$, ergibt sich die Formel von *Rodrigues* (Olinde Rodrigues, 1794–1851). Wie sieht diese Formel aus?

Hausaufgaben

Abgabe 10. Februar – 14. Februar

H13.1 *Legendrepolynome* (15 Punkte)

(1) Ausgehend von der Formel von *Rodrigues*

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left(x^2 - 1\right)^\ell$$

ist die Orthogonalität der Polynome bezüglich des auf $L^2([-1,1])$ definierten Skalarproduktes $(g, f) = \int_{-1}^{1} dx\, g(x)\, f(x)$ zu zeigen. Wie groß ist die Norm von $P_\ell(x)$?

(2) $P_\ell(-x)$ ist durch $P_\ell(x)$ auszudrücken.

(3) Wie groß ist $P_\ell(0)$?

(4) Es ist die Rekursionsformel

$$(\ell + 1) P_{\ell+1}(x) - (2\ell + 1) x P_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0$$

zu beweisen. Hinweis: Da die $P_\ell(x)$ ein vollständiges Orthogonalsystem in $L^2([-1,1])$ bilden, kann $xP_\ell(x)$ in eine Fourierreihe nach $P_k(x)$ entwickelt werden. Andererseits kann jedes Polynom ℓ-ten Grades durch eine Linearkombination von *Legendre*schen Polynomen der Grade 0 bis ℓ dargestellt werden.

(5) Die Funktion $1/\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|$ ist, aufgefaßt als eine Funktion des Cosinus des Winkels zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$, in eine Fourierreihe nach Legendrepolynomen zu entwickeln. Hinweis: Die Erzeugende der Legendrepolynome ist gegeben durch (für $r < 1$)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(x).$$

H13.2 *Axialsymmetrische Ladungsverteilung* (12 Punkte)

Bei einer um die z-Achse rotationssymmetrischen Ladungsverteilung kann das Potential wie folgt nach Legendrepolynomen entwickelt werden:

$$\Phi(r, \vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}\right) P_\ell(\cos\vartheta)$$

(1) Dieser Ansatz ist zu begründen.

(2) Es ist zu zeigen, daß die Werte des Potentials auf der z-Achse das Potential eindeutig festlegen.

(3) In der xy-Ebene befindet sich ein Ring mit Radius R und Mittelpunkt auf der z-Achse, der die Ladung Q trägt. Wie sieht das elektrische Potential aus?