Anwesenheitsübungen XIV

10. Februar – 14. Februar

A14.1 *Kugelflächenfunktionen*

Sei $u : S^2 \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion auf der Einheitssphäre ($x = \sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \sin\vartheta\sin\varphi$, $z = \cos\vartheta$) Die Koordinatenbereiche sind $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\vartheta \in [0, \pi]$.

(1) Welche Randbedingungen ergeben sich aus der Forderung, daß u auf S^2 stetig und differenzierbar sein soll?

(2) Das Eigenwertproblem $\Delta u = -\lambda u$ ist durch einen Separationsansatz in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen.

(3) Die resultierenden gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich wieder als Eigenwertgleichungen schreiben. Für den φ-abhängigen Anteil sollte sich z.B. eine Gleichung der Form $w'' + \mu w = 0$ mit $\mu = \text{const.}$ ergeben haben. Welche möglichen Eigenwerte μ gibt es? Man gebe ein Orthonormalsystem von Eigenfunktionen an. (Orthonormalität bzgl. $(f, g) = \int_0^{2\pi} d\varphi\, f^* g$.)

(4) In der Differentialgleichung für den ϑ-abhängigen Anteil substituiere man $x = \cos\vartheta$, setze $\lambda = \ell(\ell+1)$ und das Ergebnis von (2) ($\mu = m^2$) ein. Es sollte sich die verallgemeinerte *Legendre*sche Differentialgleichung,

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dP_\ell^m(x)}{dx}\right) + \ell\left(\ell+1\right)P_\ell^m(x) - \frac{m^2}{1-x^2}P_\ell^m(x) = 0,$$

ergeben. Die Lösungen P_ℓ^m heißen zugeordnete Legendrefunktionen.

(5) Man kann zeigen (Hausaufgabe), daß

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}$$

die verallgemeinerte *Legendre*sche Differentialgleichung löst. Um eine Lösung für negative m zu erhalten, definiert man

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x).$$

Warum ist dies möglich?

<u>Fazit:</u> Ein vollständiges System von Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf der Einheitssphäre ist durch die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_\ell^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

gegeben; wobei $\ell \in \mathbb{N}$ und $m \in \{n \in \mathbb{Z} \,|\, |n| \leq \ell\}$. Der Eigenwert ist $-\ell(\ell+1)$.

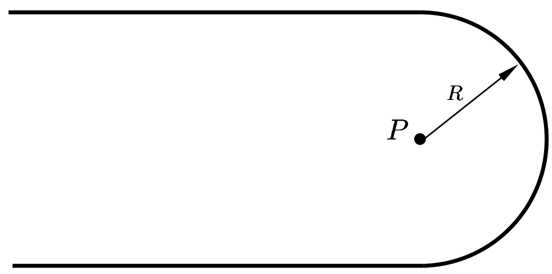
(6) Über einen Separationsansatz ist die Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ ($\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$) in eine gewöhnliche Differentialgleichung in r und ein Eigenwertproblem des Laplaceoperators auf der Einheitssphäre S^2 zu überführen.

(7) Es ist zu zeigen, daß die allgemeine Lösung von $\Delta\Phi = 0$ in Kugelkoordinaten lautet:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(A_{\ell m}r^\ell + B_{\ell m}r^{-\ell-1}\right)Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi).$$

A14.2 *Magnetfeld in stromdurchflossener Drahtschlinge*

Ein unendlich langer Draht ist in haarnadeliger Form gebogen. Es ist das Magnetfeld am Punkt P, der im Mittelpunkt des Halbkreises (Radius R) am Ende der Schlinge liegt, zu bestimmen. (Durch den Draht fließt ein konstanter Strom I.)



Checkliste Elektrostatik

- Maxwellgleichungen, Potentiale, Coulombgesetz, Multipolentwicklung
- Nablakalkül, Integralsätze (Gauß, Stokes, Greensche Theoreme), Deltadistributionen, Greensche Funktion
- Poissongleichung, Randwertproblem, Spiegelladungsmethode, Erdung, Kondensator
- Separationsansatz, Eigenwertprobleme, Legendrepolynome und Kugelflächenfunktionen
- Magnetostatik (Biot-Savartsches Gesetz)

wichtige Aufgaben: H4.4, H8.1, A9.1, A9.2, A9.3, H9.1, H9.2, H9.3, H9.4, A10.1, A10.2, H10.1, H10.2,H10.3, H11.1, H11.2, H11.3, H11.4, A12.1, A12.2, A13.1, A13.2, H13.1, H13.2, A14.1, A14.2