Anwesenheitsübungen II

4. November – 8. November

A2.1 *Bewegung im Zentralfeld*

(1) Sei $f(x,y)$ eine Funktion, für die $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y$. Es ist zu zeigen, daß $f(x,y)$ nur von $x+y$ abhängt. In einem zweiten Schritt ist zu zeigen, daß $f(x,y,z)$ mit $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = \partial f/\partial z$ nur von $x+y+z$ abhängt.
(2) Sei $\vec{F}$ eine Zentralkraft, d.h. $\vec{F} \sim \vec{r}$. Ferner sei $\vec{F} = -\mathrm{grad} V$ Es ist zu zeigen, daß das Potential V nur von $\vec{r}^2$ bzw $|\vec{r}|$ abhängt.
(3) Es ist zu zeigen, daß für die Bewegung eines Teilchens im Zentralfeld der Drehimpuls eine Erhaltungsgrösse ist.
(4) Wie folgt aus der Drehimpulserhaltung, daß das Teilchen sich in einer Ebene bewegt? Man leite den Flächensatz (zweites Keplersches Gesetz) aus der Drehimpulserhaltung her.
(5) Das Zweikörperproblem ist auf eine Bewegung im Zentralfeld zurückzuführen.

A2.2 *Kepler-Problem*

Als Spezialfall der Bewegung im Zentralfeld betrachten wir nun das Keplerproblem mit

$$V(r) = -\frac{\gamma m M}{r}.$$

(1) Als x, y-Ebene sei die Ebene gewählt, in der $\vec{L}\cdot\vec{r} = 0$ ist. Es ist die Bewegungsgleichung für z zu lösen und die Bewegungsgleichung für $w = x + \mathrm{i}y$ anzugeben.
(2) Es soll für $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ eingesetzt und die Bewegungsgleichung in Real- und Imaginärteil zerlegt werden.
(3) Was folgt aus dem Imaginärteil der Newtonschen Gleichung für $F = r^2\dot{\phi}$?
(4) Es ist $\dot{\phi}$ im Realteil der Newtonschen Gleichung zu eleminieren.
(5) Man setze $r(t) = r\left(\phi(t)\right)$ ein.
(6) Man substituiere $r = 1/u$.
(7) Die Differentialgleichung für u soll gelöst werden, indem zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung addiert wird.
(8) Man gebe r als Funktion von ϕ an und diskutiere das Ergebnis.

Hausaufgaben

Abgabe 11. November – 15. November

H2.1 *Ellipsengleichung*

(1) Ausgehend von der Gärtnerkonstruktion leite man die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten her, wobei der Koordinatenurpsrung der Mittelpunkt und die x-Achse die grosse Hauptachse seien. (Hinweis: Bei der Gärtnerkonstruktion wird die Ellipse mit den folgenden Hilfsmitteln gezeichnet: 2 Reißzwecken, 1 Faden, 1 Bleistift.)

(2) Es ist die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten aufzustellen, wenn einer der Brennpunkte als Pol (Koordinatenursprung) und die Gerade durch die Brennpunkte als Polarachse (x-Achse) gewählt werden. `(12 Punkte)`

H2.2 *ϵ-Tensor und doppeltes Kreuzprodukt*

Der ϵ-Tensor ist definiert durch $\epsilon_{klm} = 1$, falls $\{k, l, m\}$ eine gerade Permutation von $\{1, 2, 3\}$ ist, und $\epsilon_{klm} = -1$, falls $\{k, l, m\}$ eine ungerade Permutation von $\{1, 2, 3\}$ ist, und $\epsilon_{klm} = 0$ sonst. Es ist nacheinander zu zeigen, daß folgendes gilt: `(6 Punkte)`

$$(\vec{x} \times \vec{y})_m = \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{klm}\, x_k\, y_l, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{klm}\epsilon_{kst} = \delta_{ls}\delta_{mt} - \delta_{lt}\delta_{ms}, \tag{2}$$

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right). \tag{3}$$

H2.3 *Erste und zweite kosmische Geschwindigkeit*

(1) Wir betrachten eine kreisförmige Bewegung eines leichten Erdtrabanten um die Erde, bei der Fliehkraft und Schwerkraft im Gleichgewicht sind. Es ist die erste kosmische Geschwindigkeit zu berechnen. (Diese hat ein künstlicher Erdtrabant, der sich in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche befindet.) (Hinweis: Erdradius $R = 6500$ km und Erdbeschleunigung $g = 9,81 m/s^2$.)

(2) Man bestimme die zweite kosmische Geschwindigkeit, d.h. die Geschwindigkeit, die ein Massenpunkt beim Abschuss von der Erdoberfläche besitzen muß, um im Unendlichen mit Geschwindigkeit Null anzukommen. `(8 Punkte)`