

### Anwesenheitsübungen III

11. November – 15. November

#### A3.1 Raketenproblem

Eine startende Rakete der Anfangsmasse  $m_0$  stößt pro Zeitintervall  $\Delta t$  Gas der Masse  $\alpha\Delta t$  ( $\alpha = \text{const}$ ) aus.

- (1) Wie groß ist die Masse der Rakete in Abhängigkeit der Zeit?
- (2) Mit welcher Kraft wird die Rakete aufgrund des Gasausstoßes beschleunigt?
- (3) Es ist die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Rakete aufzustellen, wobei die Schwerkraft als konstant genähert werden soll. (*Zeitabhängigkeit der Masse beachten!*)
- (4) Wie groß ist die Raketengeschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit?
- (5) Welche Höhe hat die Rakete zur Zeit  $t$  erreicht?
- (6) Den Punkt, an dem das Gas verbraucht ist, nennen wir Brennschluss. Bei Brennschluss habe die Rakete die Masse  $m_1$ . Wie lange wurde die Rakete durch das Gas beschleunigt?
- (7) Welche Höhe und welche Geschwindigkeit hat die Rakete bei Brennschluss?
- (8) Welche maximale Höhe erreicht die Rakete?

#### A3.2 Euler-Lagrange Gleichungen

- (1) Was besagt das Hamiltonsche Prinzip?
- (2) Man berechne den in  $\delta\vec{q}$  linearen Anteil  $\delta S$  des Wirkungsfunktional der Trajektorie  $\vec{Q}(t) = \vec{q}(t) + \delta\vec{q}(t)$ .
- (3) Man mache sich klar, daß  $\frac{d}{dt}\delta\vec{q} = \delta\dot{\vec{q}}$ .
- (4) Durch Ausführen einer partiellen Integration soll erreicht werden, daß in  $\delta S$  keine Zeitableitungen von  $\delta\vec{q}$  auftreten. Die "Randterme" sollen diskutiert werden.
- (5) Wie folgen nun die Euler-Lagrange Gleichungen?
- (6) Es ist eine Lagrangefunktion zu finden, für die die Euler-Lagrange Gleichungen den Newtonschen Bewegungsgleichungen mit konservativer Kraft entsprechen. Ist die Lösung eindeutig?
- (7) Man leite den Energieerhaltungssatz sowohl aus den Newtonschen Gleichungen mit konservativer Kraft als auch aus der expliziten Zeitunabhängigkeit der soeben konstruierten Lagrangefunktion her. Man formuliere einen Vorschlag zur Verallgemeinerung der Energiedefinition.
- (\*8) Indem man die Bewegungsgleichungen für die Fluktuationen um eine klassische Lösung der Euler-Lagrange Gleichung studiert, soll festgestellt werden, ob die klassische Lösung stabil ist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine Dimension und  $L(q) = \frac{m}{2}q^2 - V(q)$ .

## Hausaufgaben

Abgabe 18. November – 22. November

### H3.1 *Kondensation eines Wassertropfens* (6 Punkte)

Ein Staubkorn vernachlässigbarer Masse beginnt, zur Zeit  $t = 0$  unter Gravitationseinwirkung durch gesättigten Wasserdampf zu fallen. Dabei kondensiert der Dampf an dem Staubteilchen mit konstanter Rate von  $\lambda$  Gramm pro Zentimeter und bildet einen Wassertropfen sich stetig vergrößernder Masse. (zu vernachlässigen: Reibung, Auftrieb, etc)

- (1) Wie groß ist die Beschleunigung des Tropfens als Funktion seiner Geschwindigkeit und des zurückgelegten Weges?
- (2) Wie lautet die Lösung der Bewegungsgleichung des Staubteilchens?
- (3) Wie hängen Beschleunigung und Geschwindigkeit von der Zeit ab?

### H3.2 *Snelliussches Brechungsgesetz* (4 Punkte)

Ausgehend vom Prinzip, daß Licht sich auf dem schnellsten Weg von A nach B bewegt, leite man das Snelliussche Brechungsgesetz her. Der Einfachheit halber kann A und B so gewählt werden, daß der Abstand zur Grenzfläche zwischen den beiden Medien gleich ist.

### H3.3 *Problem der kürzesten Verbindung* (4 Punkte)

- (1) Wie sieht die Geodäte (kürzeste Verbindung) zwischen zwei Punkten auf einer Zylinderoberfläche aus?
- (2) Warum ist die Bahn einer sich kräftefrei bewegenden Punktmasse eine Geodäte?

### H3.4 *Einfache Lagrangefunktionen* (12 Punkte)

Für die folgenden Systeme sollen eine Lagrangefunktion und die Euler-Lagrange Gleichungen aufgestellt werden:

- (1) für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten
- (2) für den isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillator in Kugelkoordinaten (isotrop = keine Richtung ausgezeichnet)
- (3) für ein mathematisches Pendel
- (4) für den freien Fall im Schwerfeld
- (5) für die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektrischen Feld
- (6) und für das Keplerproblem.