Anwesenheitsübungen IV

18. November – 22. November

A4.1 *Das Problem der Dido*

Unter allen Kurven der Länge l, die zwei feste Punkte verbinden, ist diejenige gesucht, die zusammen mit der Verbindungsstrecke der Punkte die größte Fläche begrenzt.

(1) Wir wählen die Koordinaten (x, y) so, daß Anfangs- und Endpunkt bei $(x_1, 0)$ respektive bei $(x_2, 0)$ liegen. Wie berechnen sich die zu maximierende Fläche und die festgehaltene Kurvenlänge aus der Kurve $y(x)$?

(2) Man stelle das zu maximierende Funktional auf und benutze die explizite x-Unabhängigkeit, um eine Differentialgleichung erster Ordnung für $y(x)$ anzugeben.

(3) Wir wählen den Anfangspunkt der Kurve als $x_1 = y_1 = 0$. Indem man x als Funktion von y ausdrückt soll die Form der Kurve veranschaulicht werden. Was ergibt sich für den Spezialfall, daß das Verhältnis aus Kurvenlänge l und dem Abstand der beiden Endpunkte $\pi/2$ ist?

A4.2 *Teilchen in parabolischem Topf*

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft auf der Innenseite eines Paraboloides, das durch $x^2 + y^2 = az$ gegeben ist.

(1) Es sind die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichung zu bestimmen.

(2) Es ist zu zeigen, daß sich das Teilchen auf einem horizontalen Kreis in der Ebene $z = h$ bewegt, vorausgesetzt ihm wird eine Anfangswinkelgeschwindigkeit verliehen. Wie hängt diese Winkelgeschwindigkeit von der Höhe h ab?

(3) Es ist zu zeigen, daß das Teilchen um die Kreisbahn oszilliert, wenn es nur schwach ausgelenkt wird. Wie groß ist die Oszillationsfrequenz?

(4) Warum bildet die Oberfläche einer konstant rotierenden Flüssigkeit einen Paraboloid?

A4.2 *Eigenfrequenzen und Eigenmoden*

Zwei durch eine Feder verbundene Perlen gleiten reibungsfrei auf einem geraden Draht.

(1) Es ist die Lagrangefunktion in der Form

$$L = \frac{1}{2}\,(\dot{x}_1, \dot{x}_2)\, M \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,(x_1, x_2)\, K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

aufzustellen.

(2) Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind in einer Matrixgleichung zusammenzufassen.

(3) Wir bezeichnen mit $\vec{x}(t)$ den Spaltenvektor $(x_1, x_2)^T$. Man setze die Lösung als $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 \cos\omega t$ an. Welche Werte sind für ω möglich, falls $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$?

(4) Zu jeder Frequenz ist die vollständige Lösung anzugeben.

Hausaufgaben

Abgabe 25. November – 29. November

H4.1 *ein klassisches Quantisierungsphänomen* (6 Punkte)

Eine Punktmasse m bewege sich reibungsfrei auf einer Oberfläche, die durch die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ (R konstant) und z beliebig beschrieben wird. Entlang der z-Achse wirke die Schwerkraft.

(1) Es sind alle Trajektorien anzugeben, die bei $t = 0$ durch den Punkt $(x, y, z) = (R, 0, z_1)$ und bei $t = T$ durch den Punkt $(R, 0, z_2)$ gehen, wobei die z-Komponente der Geschwindigkeit im Punkt $(R, 0, z_1)$ verschwinden soll.

(2) Wie groß ist die kinetische Energie zum Zeitpunkt $t = 0$? Wieviele Trajektorien gibt es für eine feste ("erlaubte") kinetische Energie?

H4.2 *Kettenlinie* (10 Punkte)

Eine Kette mit konstanter Dichte σ (Masse/Länge) und der Länge l hängt im Schwerefeld zwischen zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$. Gesucht ist die Form der Kurve unter der Annahme, daß die potentielle Energie der Kette minimal ist.

H4.3 *Ein Modell für Kohlendioxid* (7 Punkte)

Wir betrachten drei Perlen ($m_1 = m_3$), die reibungsfrei auf einem undendlich langen Draht gleiten können und nachbarweise mit gleich harten Federn verbunden sind.

(1) Warum kann man mit diesem Modell CO_2 beschreiben, nicht aber Wasser?

(2) Die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen sind vektoriell zu schreiben, wobei die Positionen der drei Perlen einen Vektor bilden.

(3) Es sind alle Lösungen, die sich aus dem Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 \cos\omega t$ ergeben, zu finden.

H4.4 *Eine Lagrangefunktion der Elektrodynamik* (8 Punkte)

Die Bewegungsgleichungen eines Teilchens im elektromagnetischen Feld lassen sich auch aus dem Wirkungsprinzip herleiten. Die entsprechende Lagrangefunktion ist

$$L\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\Phi\left(\vec{r}, t\right) + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}\left(\vec{r}, t\right),$$

wobei $\Phi\left(\vec{r}, t\right)$ das skalare und $\vec{A}\left(\vec{r}, t\right)$ das Vektorpotential sind. Für die Felder gilt

$$\begin{aligned} \vec{E}\left(\vec{r}, t\right) &= -\vec{\nabla}\Phi\left(\vec{r}, t\right) - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}\vec{A}\left(\vec{r}, t\right) \\ \vec{B}\left(\vec{r}, t\right) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}\left(\vec{r}, t\right). \end{aligned} \qquad (1)$$

(1) Es ist zu zeigen, daß die homogenen Maxwellgleichungen

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad , \quad \mathrm{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

durch (1) allgemein gelösst sind.

(2) Wie sehen die Euler-Lagrange-Gleichungen aus? Welche Kräfte treten auf?

(3) Wie sieht der kanonische Impuls $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$ aus?

(4) Wie verhalten sich die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unter der Transformation

$$\vec{A} \to \vec{A} + \mathrm{grad}\chi\left(\vec{r}, t\right) \quad , \quad \Phi \to -\frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}?$$

(5) Wie verhält sich die Lagrangefunktion unter der Transformation von Aufgabe (4)? Speziell ist zu zeigen, daß L sich um eine totale Ableitung ändert. Ist dieses Ergebnis mit den Ergebnissen von Aufgabe (2) und Aufgabe (4) konsistent?