Anwesenheitsübungen V

25. November – 29. November

A5.1 *Die Galileigruppe*

Die Galileigruppe besteht aus folgenden Transformationen

- zeitliche Translationen: $\vec{q}'(t') = \vec{q}(t)$, $t' = t + b$.
- räumliche Translationen: $\vec{q}'(t') = \vec{q}(t) + \vec{a}$, $t' = t$.
- räumliche Drehung: $\vec{q}'(t') = A\vec{q}(t)$, $t' = t$ $A \in SO(3)$.
- spezielle Galileitransformation: $\vec{q}'(t) = \vec{q}(t) + \vec{v}t$.

(1) Es ist zu zeigen, daß die Galileitransformationen eine Gruppe bilden.
(2) Wie transformieren sich $\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$ unter infinitesimalen zeitabhängigen Zeitverschiebungen? Wie transformieren sich Lagrangefunktion und Wirkung?
(3) Wie transformieren sich $\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$ unter infinitesimalen zeitabhängigen räumlichen Translationen? Wie transformiert sich die Lagrangefunktion?
(4) Man schreibe das Matrixelement einer orthogonalen Matrix als $A_{ij} = \delta_{ij} + \omega_{ij}$. Welche Bedingung folgt aus der Orthogonalität an ω_{ij} unter der Annahme, daß $\omega_{ij} \ll 1$ für alle $i, j = 1, 2, 3$? Wie groß ist die Determinante von A?
(5) Durch wieviele Parameter wird eine räumliche Drehung festgelegt? Wie paßt das mit dem Ergebnis von Aufgabe (4) zusammen?
(6) Wie verhalten sich $\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$ und die Lagrangefunktion unter infinitesimalen zeitabhängigen Drehungen?
(7) In die Lösung von (6) ist $\omega_{ij} = \sum_k \epsilon_{ijk}\omega_k$ einzusetzen.

A5.2 *Noether-Theorem*

Das Noether-Theorem besagt, daß es zu jeder zeitunabhängigen Symmetrie eine Erhaltungsgröße gibt. Im folgenden wollen wir Erhaltungsgrößen aus der Galileiinvarianz konstruieren. Dabei soll benutzt werden, daß einerseits $\delta L = 0$ für konstante Transformationsparameter und beliebige Trajetkorien $\vec{q}(t)$ und andererseits $\delta S = 0$, falls $\vec{q}(t)$ die Bewegungsgleichung erfüllt und die Transformationsparameter zu den Anfangs- und Endzeiten t_1 und t_2 verschwinden.
(1) Welche Erhaltungsgröße ergibt sich aus der Rotationsinvarianz?
(2) Welche Erhaltungsgröße ergibt sich aus der Invarianz unter räumlichen Translationen?
(3) Welche Erhaltungsgröße ergibt sich aus der Invarianz unter zeitlichen Translationen?

Hausaufgaben

Abgabe 2. Dezember – 6. Dezember

H5.1 *Ergänzung zum Noether-Theorem* (10 Punkte)

In den Anwesenheitsübungen wurden Erhatlungsgrößen aus Transformationen, unter denen die Lagrangefunktion invariant ist, hergeleitet. Analog lassen sich auch Erhaltungsgrößen konstruieren, wenn sich die Lagrangefunktion um eine totale Zeitableitung ändert.

(1) Unter infinitesimalen konstanten räumlichen Verschiebungen verändere sich die Lagrangefunktion um $\delta L = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$. Wie modifiziert sich der Impulserhaltungssatz?

(2) Wie verhält sich die Lagrangefunktion $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{q}}^2 - \frac{m}{2}\omega^2\vec{q}^2$ des sphärischen harmonischen Oszillators unter der Transformation $\delta q_i = \frac{\epsilon}{2\omega}\left(\delta_{ik}\dot{q}_l + \delta_{il}\dot{q}_k\right)$ für $k, l = 1, 2, 3$ und konstantes ϵ?

(3) Aus dem Ergebnis von (2) konstruiere man die entsprechenden Erhaltungsgrößen. Wieviele sind das?

H5.2 *Das massive Federpendel* (7 Punkte)

An einer homogenen Feder (Masse M_0, Konstante K) hängt eine Masse M.

(1) Es ist zu zeigen, daß das Geschwindigkeitsprofil entlang der Feder linear ist.

(2) Mit dem Ergebnis von (1) stelle man die Lagrangefunktion auf und löse die resultierenden Bewegungsgleichungen.

H5.3 *Das Pendeln von Lasten an einem Kran* (7 Punkte)

Eine Last hängt an einem masselosen Seil, dessen Länge sich durch Aufwickeln auf einer Winde vom Radius R gemäß $l(t)$ ändert. Die Auslenkung des Seiles sei der Winkel ϕ.

(1) Es ist die Bewegungsgleichung

$$(l + R\phi)\,\ddot{\phi} + R\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{l} + g\sin\phi = 0$$

herzuleiten.

(2) Wie ist die Lösung für eine gleichförmige langsam bewegte Winde, kleine Auslenkung und verschwindenden Windenradius? Es ist zu prüfen, ob das Ergebnis beim "Heben" und beim "Senken" den Erwartungen entspricht.
Hinweis: Es soll genügen, den Effekt des "Hebens" und des "Senkens" auf die Amplitude zu studieren. Das heißt, in der Bewegungsgleichung kann man den Faktor bei $\ddot{\phi}$ durch seinen konstanten Anteil ersetzen, so daß die Lösung eine gedämpfte Schwingung mit konstanter Frequenz ist.

H5.4 *Herabrutschendes Seil* (4 Punkte)

Ein Seil der Länge l und der Masse ρ pro Längeneinheit rutscht ohne Reibung über eine Tischkante herunter. Es sind die Lagrangefunktion aufzustellen und die Bewegungsgleichungen zu lösen.