Anwesenheitsübungen VI

2. Dezember – 6. Dezember

A6.1 *Freiheitsgrade*

Wieviele Freiheitsgrade haben ein Punktteilchen, ein starrer Körper, ein Magnetfeld?

A6.2 *Der starre Körper*

Wir betrachten Drehungen, bei denen der starre Körper in einem Punkt festgehalten wird. Diesen Punkt wählen wir als Ursprung des raumfesten und des körperfesten Koordinatensystems.

(1) Wie hängen körperfeste Korrdinate $\vec{r}$ und raumfeste Koordinate $\vec{r}_A$ zusammen? Wie hängen die Betragsquadrate der beiden Koordinaten zusammen?

(2) In Aufgabe A.5.1 (4) wurde gezeigt, daß sich eine infinitesimale Drehung durch eine Matrix $A(\omega) = 1 + \omega$ ($\omega^T = -\omega$) darstellen läßt. Es ist die endliche Drehmatrix $A(\Omega) = \lim_{n\to\infty} (1 + \Omega/n)^n$ zu berechnen. Für den Spezialfall, daß $\left[\Omega, \dot{\Omega}\right] = 0$, ist in dem für $\dot{A}(\Omega)\, A(\Omega)$ resultierenden Ausdruck $\dot{\Omega}_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \vec{\Omega}_k$ zu ersetzen. ($\vec{\Omega}$ ist die Winkelgeschwindigkeit.)

(3) Wir bezeichnen mit $\vec{v}^{\,(R)}$ die zeitliche Änderung (Geschwindigkeit) der raumfesten Koordinate eines Punktes des starren Körpers. Diese kann im raumfesten System A oder im körperfesten System B gemessen werden. Es ist zu zeigen, daß sowohl $\vec{v}^{\,(R)}_A = \vec{\Omega}_A \times \vec{r}_A$ als auch $\vec{v}^{\,(R)}_B = \vec{\Omega}_B \times \vec{r}_B$, d.h. der Systemindex kann weggelassen werden.
<u>Hinweis:</u> Für $A \in SO(3)$ gilt $\left(A\vec{\Omega}_B\right) \times \left(A\vec{r}_B\right) = A\left(\vec{\Omega}_B \times \vec{r}_B\right)$. (Siehe H.6.1.)

(4) Der Trägeheitstensor Θ ist über die kinematischen Größen Drehimpuls $\vec{L}$ und kinetische Energie T definiert als

$$\vec{L} = \Theta\vec{\Omega} \ \text{ bzw. } \ T = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \left(\Theta\vec{\Omega}\right) = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{L}.$$

Es ist zu zeigen, daß

$$\Theta_{ij} = \int d^3r \rho\left(\vec{r}\,\right)\left(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right).$$

(5) Wie ist die Beziehung des im raumfesten System gemessenen Trägheitstensors zu dem im körperfesten System gemessenen Trägheitstensor? Was ist eine Hauptachsentransformation? Warum sind die Eigenwerte (Hauptträgheitsmomente) des Trägeheitstensors alle positiv? Wie sehen qualitativ die Hauptträgheitsmomente einer Scheibe, einer Stange und einer Kugel aus?

(6) Es sind die Trägheitstensoren für eine Vollkugel mit Masse m, Radius R und Mittelpunkt im Ursprung, sowie für ein Quadrat in der xy-Ebene mit Masse m, Kantenlänge a, Ecken auf den Koordinatenachsen und Mittelpunkt im Ursprung zu berechnen.

(7) Sei $\Theta^{(S)}$ der Trägheitstensor für ein Koordinatensystem mit dem Schwerpunkt S als Ursprung. Es ist zu zeigen, daß für den Trägheitstensor Θ bezüglich eines um $\vec{a}$ verschobenen Koordinatensystems der *Satz von Steiner* gilt:

$$\Theta_{ij} = \Theta^{(S)}_{ij} + m\left(\left|\vec{a}\,\right|^2 \delta_{ij} - a_i a_j\right).$$

Was gilt speziel für ein Trägheitsmoment I um eine parallel verschobene Achse?

Hausaufgaben

Abgabe 9. Dezember – 13. Dezember

H6.1 *Transformation des Kreuzproduktes* (7 Punkte)

Es ist zu zeigen, daß für zwei beliebige dreidimensionale Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und eine invertierbare drei mal drei Matrix A die folgende Identität gilt:

$$\left(A\vec{a}\right) \times \left(A\vec{b}\right) = \det\left(A\right) \left(A^{-1}\right)^T \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$$

H6.2 *Zweidimensionale Drehungen* (7 Punkte)

In A6.2 (2) wurde gezeigt, daß eine eigentliche dreidimensionale Drehung durch den Exponenten einer antisymmetrischen Matrix dargestellt werden kann. Dies gilt in beliebigen Dimensionen. Speziell in zwei Dimensionen zeige man, daß

$$A = \exp\left\{\phi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Was beschreibt die Transformation $\vec{r}\,' = A\vec{r}$ in kartesischen Koordinaten? Wie sieht diese Transformation in komplexen Koordinaten ($z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$) aus?

H6.3 *Pendelnder Würfel* (10 Punkte)

(1) Wie groß ist das Trägheitsmoment eines homogenen mit Masse erfüllten Würfels um eine seiner Kanten?

(2) Ein Würfel der Kantenlänge a und der Masse m hängt vertikal von einer seiner Kanten herab. Wie groß ist die Periode für kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage? Wie groß ist die Länge des äquivalenten Fadenpendels?
Hinweis: Die Bewegungsgleichung ist $\vec{D} = \dot{\vec{L}}$, wobei $\vec{D} = \int d^3r\,(\vec{r} \times \rho\vec{g})$ ($\vec{g}$ = Erdbeschleunigung) das Drehmoment ist.

H6.4 *Billard* (4 Punkte)

In welcher Höhe muß eine Kugel durch einen geraden horizontalen Stoß (ohne Seiteneffet) getroffen werden, damit sie rollt, ohne anfänglich zu rutschen? Was passiert, wenn der Stoß höher oder niedriger ausgeführt wird?
Hinweis: Erhaltungssätze benutzen.

H6.5 *Jacobi-Determinante* (4 Punkte)

Es ist die beim Wechsel von kartesischen zu Kugelkoordinaten entstehende Jacobi-Determinante zu berechnen.

H6.6 *Ein Wagen auf der schiefen Ebene* (6 Punkte)

Ein Wagen der Masse $M + m$ *rollt* ein Gefälle vom Winkel α herab, ohne zu gleiten. Dabei sei m die Masse der als Scheiben angenommenen Räder. Es ist die Lagrangefunktion L aufzustellen und zu zeigen, daß der Wagen mit $a = g(\sin\alpha)(2M + 2m)/(2M + 3m)$ beschleunigt wird.