Anwesenheitsübungen VII

9. Dezember – 13. Dezember

A7.1 *Nachtrag zur Winkelgeschwindigkeit*

(1) In Aufgabe A.6.2 (2) hatten wir uns auf den Spezialfall $\left[\dot{\Omega}, \Omega\right] = 0$ beschränkt. Es ist zu zeigen, daß für $A \in SO(3)$ allgemein gilt $\left(\dot{A}A^{-1}\right)^T = -\dot{A}A^{-1}$, so daß die folgende Definition der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ Sinn macht. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ ist im raumfesten System gegeben durch

$$\left(\dot{A}A^{-1}\right)_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \vec{\Omega}_k,$$

wobei A die Transformation von körperfesten zu raumfesten Koordinaten beschreibt.

(2) Wir definieren die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System als $\vec{\Omega}_B = A^{-1}\vec{\Omega}_A$, wobei $\vec{\Omega}_A = \vec{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit im raumfesten System aus (1) ist. Es ist zu zeigen, daß $-\vec{\Omega}_B$ sich aus der Definition von $\vec{\Omega}_A$ ergibt, wenn man A durch A^{-1} ersetzt. Wie erklärt sich das Auftreten des zusätzlichen Minuszeichens?

(3) Unter welchen Voraussetzungen verschwindet die Differenz zwischen der im körperfesten und der im raumfesten System gemessenen Winkelgeschwindigkeit?

A7.2 *Eulergleichung*

(1) Mit $\vec{a}_A$ ($\vec{a}_B$) bezeichnen wir einen beliebigen Vektor $\vec{a}$, der in raumfesten (körperfesten) Koordinaten gegeben sei. Man gebe eine Beziehung zwischen $d\left(\vec{a}_A\right)/dt$ und $d\left(\vec{a}_B\right)/dt$ an, die kovariant unter der Rotation des Systems, in dem $d\left(\vec{a}_A\right)/dt$ und $d\left(\vec{a}_B\right)/dt$ gemessen werden, ist. (Kovariant heißt, daß die Gleichung in allen Systemen von derselben Form sein soll.)

(2) Das Drehmoment $\vec{N}$ ist $d(\vec{L}_A)/dt$. Die Eulergleichung gibt an, wie sich $\vec{N}$ im körperfesten Hauptachsensystem aus Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmomenten berechnet. Wie sieht die Eulergleichung aus?

A7.3 *Wurf eines Gegenstandes*

Wirft man mit Effet einen Gegenstand zum Fenster hinaus, wird man feststellen, daß nach einer gewissen Zeit die Rotationsachse mit der Hauptträgheitsachse des kleinsten oder des größten Trägheitsmomentes übereinstimmt. Diese Beobachtung soll theoretisch "vorhergesagt" werden.

(1) Warum ist eine Kugel für das Experiment nicht geeignet?

(2) Wir gehen von der Situation aus, daß der Gegenstand um eine seiner Hauptträgheitsachsen mit endlicher Winkelgeschwindigkeit Ω_1 rotiert. Die anderen beiden Komponenten der Winkelgeschwindigkeit sollen infinitesimal klein sein. Wie lautet die näherungsweise Lösung der Eulergleichungen und wie ist das Ergebnis zu interpretieren?

(3) Für den Fall $I_1 = I_2$ (symmetrischer Kreisel) ist die näherungsweise Lösung von (2) durch die exakte Lösung zu ersetzen. Wie groß ist die Nutationsfrequenz der Erde (Abplattung $(I_{max} - I_{min})/I_{max} = 1/298$)?

Hausaufgaben

Abgabe 16. Dezember – 20. Dezember

H7.1 *Zwei astronomische Perioden* (18 Punkte)

Wir betrachten zwei unendlich dünne Kreisringe mit den Radien R_1 und R_2 ($R_1 \gg R_2$), Massen M_1 und M_2 sowie Mittelpunkt jeweils im Ursprung. Der erste Ring liege in der xy-Ebene, der zweite kann sich um einen Winkel θ dagegen neigen. Wir parameterisieren die Ringe jeweils durch Winkel ϕ_i $(i = 1, 2)$. Das Gravitationspotential des zweiten Ringes im Feld des ersten Ringes ist dann nur eine Funktion von θ:

$$V(\theta) = -\gamma \frac{M_1 M_2}{4\pi^2} \int_{Ring\,1} \int_{Ring\,2} \frac{d\phi_1\, d\phi_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

(1) Es ist zu zeigen, daß die θ-Abhängigkeit des Potentials in niedrigster Ordnung von R_2/R_1 lautet:

$$V(\theta) = const. - \frac{3\gamma}{8} \frac{M_1 M_2}{R_1} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\right).$$

Warum liefert $|dV/d\theta|$ das Drehmoment auf den zweiten Ring? Wie wirkt dieses?

Die Erdachse präzediert wegen der Drehmomente durch Sonne und Mond, was durch die Abplattung der Erde zustande kommt, denn auf eine Kugel kann kein Gravitationsdrehmoment ausgeübt werden. In erster Näherung kann man deshalb die Erde als eine Kugel vom Radius R_E mit einem Äquatorgürtel ansehen, wobei die Masse des Gürtels m_G und die der Kugel so zu wählen sind, daß diese Kombination dieselben Trägheitsmomente wie die Erde (Masse m_E) aufweist. Das gesammte Drehmoment geht so aufs Konto des Gürtels. Da die Präzession im Vergleich zu einem Jahr bzw einem Monat sehr langsam ist, kann man sich Sonne und Mond als auf Kreisen mit Radien R_S beziehungsweise R_M verteilt vorstellen, in deren Zentren die Erde sitzt. Ferner kann man annehmen (vergleiche unten), daß die beiden Ringe in einer Ebene, der *Ekliptik* verlaufen. Diese ist um $\theta = 23,5°$ gegen die Äquatorebene geneigt.

(2) Es ist zu zeigen, daß für die Masse des Gürtels $2(I_{max} - I_{min}) = m_G R_E^2$ zu wählen ist.

(3) Für das Drehmoment, das Sonne und Mond auf die rotierende Erde ausüben, ist zu zeigen, daß

$$N = \frac{3\gamma}{4}(I_{max} - I_{min}) \left(\frac{m_S}{R_S^3} + \frac{m_M}{R_M^3}\right) \sin 2\theta.$$

(4) Es ist der folgende Zusammenhang zwischen N, θ, der Präzessionsfrequenz Ω_P und dem Drehimpuls L der Erde zu begründen: $\Omega_P = N/(L \sin\theta)$.

(5) Es ist Ω_P für $m_M = m_E/81$ zu berechnen. Das Ergebnis soll mit dem tatsächlichen Wert von $2\pi/(25800 \text{ Jahre})$ verglichen werden und die astronomischen Auswirkungen sollen diskutiert werden.

Eine zweite Periode (Saruszyklus) entsteht dadurch, daß die Mondbahn um $\theta = 5,5°$ gegen die Eklyptik geneigt ist und die Sonne auf das Erde/Mond-System ein Drehmoment ausübt. Wie oben wird die Mondbahn als kreisförmig angenommen und der Einfluß der Sonne als Gravitionsfeld eines Ringes modelliert.

(6) Es ist zu zeigen, daß das Trägheitsmoment des Erde/Mond-Systems $I = \mu R_M^2$ lautet, wobei μ die reduzierte Masse $\mu^{-1} = m_E^{-1} + m_M^{-1}$ des Erde/Mond-Systems ist.

(7) Es ist zu zeigen, daß das Drehmoment, das die Sonne auf das Erde/Mond-System ausübt $N = (3\gamma/8)\mu R_M^2(m_s/R_S^3)\sin 2\theta$ ist.

(8) Wie groß ist die Frequenz der erzeugten Präzession? (Tatsächlicher Wert ist $2\pi/(18{,}3$ Jahre).) Gibt es eine astronomische Asuwirkung, die ohne aufwendige Instrumente beobachtet werden kann?

H7.2 *Kommutatoren* **(5 Punkte)**

A, B, C seien $n \times n$ Matrizen, $\lambda \in \mathbb{C}$. Für den Kommutator $[A, B] = AB - BA$ sind die folgenden Identitäten zu beweisen:

$$\begin{array}{rl} \text{Linearität} & [\lambda A, B] = \lambda\,[A, B]\ ,\ \ [A + B, C] = [A, C] + [B, C] \\ \text{Produktregel} & [AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B \\ \text{Schiefsymmetrie} & [A, B] = -\,[B, A] \\ \text{Jacobiidentität} & [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \end{array}$$