Anwesenheitsübungen VIII

15. Dezember – 20. Dezember

A8.1 *Allgemeines zum Hamiltonformalismus*

(1) Was folgt aus der expliziten $\dot{q}_i$ Unabhängigkeit von

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L$$

für die p_i?

(2) Wie sieht das vollständige Differential der Hamiltonfunktion aus, falls die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllt sind?

(3) Durch Koeffizientenvergleich mit dem vollständigen Differential einer allgemeinen Funktion $H(q_i, p_i, t)$ sollen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen abgeleitet werden.

(4) Was geschieht mit zyklischen Koordinaten beim Übergang von der Lagrange- zur Hamiltonfunktion?

(5) Es ist zu zeigen, daß

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Wann ist H erhalten?

(6) Welcher Größe entspricht H für ein freies konservatives System?

(7) Aus der Translationsinvarianz von H ist die Erhaltung des Gesamtimpulses zu folgern.

(8) Wie sieht H für ein Teilchen in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten aus?

A8.2 *Poissonklammern*

Die Poissonklammer zweier Größen f und g ist wie folgt definiert,

$$\{f(p_i, q_i, t), g(p_i, q_i, t)\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right).$$

(1) Was ergibt sich für $\{q_i, q_j\}$, $\{p_i, p_j\}$ und $\{q_i, p_j\}$?

(2) Für die Poissonklammer sind die Linearität und die Schiefsymmetrie zu zeigen. Was folgt für $\{f, f\}$?

(3) Für $f = f(p_i, q_i, t)$ ist zu zeigen, daß

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \{f, q_i\} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial q_i} = -\{f, p_i\} \quad , \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}.$$

(Damit können die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen als $\dot{p}_i = \{H, p_i\}$, $\dot{q}_i = \{H, q_i\}$ geschrieben werden.)

(4) Es ist die Produktregel

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\} g$$

zu beweisen.

(5) Ausgehend von $\{p, q\} = 1$ und der Produktregel ist zu zeigen ($n \in \mathbb{N}$), daß $\{p, q^n\} = nq^{n-1}$, $\{p, f(q)\} = f'(q)$, $\{p^n, g(q)\} = np^{n-1}g'(q)$ und $\{f(p), g(q)\} = f'(p)g'(q)$.

Hausaufgaben

Abgabe 6. Januar – 10. Januar

H8.1 *Die Hamiltonfunktion der Elektrodynamik* (8 Punkte)

Die Euler-Lagrange Gleichungen zur Lagrangefunktion

$$L\left(\dot{\vec{r}},\vec{r},t\right)=\frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2-q\Phi\left(\vec{r},t\right)+\frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}\left(\vec{r},t\right)$$

beschreiben die Bewegung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld (siehe H4.4).
(1) Wie sieht die Hamiltonfunktion aus? Welche physikalische Größe beschreibt sie?
(2) Es sind dH/dt zu berechnen und das Ergebnis zu interpretieren.
(3) Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind mit den Euler-Lagrange Gleichungen zu vergleichen. (Beachte: im allgemeinen $\partial\vec{A}/\partial t \neq d\vec{A}/dt$.)
(4) Wie verändert sich die Hamiltonfunktion unter den Eichtransformationen aus Aufgabe H4.4 (4) ?

H8.2 *Eigenschaften der Poissonklammer* (8 Punkte)

(1) Es ist zu zeigen, daß

$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}+\{H,\{f,g\}\}\,.$$

(2) Es ist die Jacobiidentität

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$

nachzurechnen.
(3) Es ist zu beweisen, daß die Poissonklammer von Erhaltungsgrößen wieder eine Erhaltungsgröße ist. Bekommt man auf diese Art beliebig viele Erhaltungsgrößen?
(4) Eine Funktion $f\left(q(t),p(t)\right)$ soll derart beschaffen sein, daß wir sie in eine Potenzreihe

$$f\left(q(t),p(t)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n t^n$$

entwickeln können. Es ist zu zeigen, daß für $dH/dt=0$

$$f_n=\frac{1}{n!}\underbrace{\{H,\{H,\ldots\{H}_{n\text{ Klammern}}\,,f\left(q(0),p(0)\right)\}\ldots\}\}\,.$$

H8.3 *Wiederholung der Mechanik* (Punkte in der Klausur)

Neben dem Nacharbeiten der Vorlesung und dem Literaturstudium ist das Trainieren des Lösens von Aufgaben erfahrunsgemäß eine ausgezeichnete Klausurvorbereitung. Für die Mechanik kann zum Jahreswechsel mit dem Training begonnen werden. Der folgende Plan soll als Anregung dienen.

Newtonsche Mechanik

(a) *Einteilchensysteme:* Newtonsche Gesetze, qualitative Vorhersage der Bahn aus dem Potential, Bewegung unter Reibung, Bewegung mit veränderlicher Masse, Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls.
(b) *Mehrteilchensysteme:* Newtonsche Gesetze, Schwerpunktsatz, Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls.
(c) *Keplerproblem:* reduzierte Masse, Drehimpulserhaltung, Bahntypen.
wichtige Aufgaben: A1.2, H1.1, A2.1, A2.2, A3.1

Lagrangeformalismus

(a) *Allgemeines:* Prinzip der kleinsten Wirkung, Herleitung Euler-Lagrange Gleichungen, geometrische Extremalprobleme, Berücksichtigung holonomer Zwangsbedingungen mit Multiplikatoren
(b) *Anwendungen:* u.a. Eigenfrequenzen/moden, Ankopplung elektromagnetischer Felder
(c) *Noethertheorem:* Symmetrietransformationen, Galileigruppe, Berechnung von Erhaltungsgrößen, Drehgruppe, infinitesimale Drehungen
wichtige Aufgaben: A3.2, H3.4, A4.1, A4.2, A4.3, H4.4, A5.1, A5.2

Starrer Körper

(a) *Kinematik:* Drehimpuls, raum/körperfeste Koordinaten, Trägheitstensor, Hauptachsen, Steinerscher Satz
(b) *Dynamik:* Eulersche Gleichungen, Nutation, Präzession, Scheinkräfte
wichtige Aufgaben: A6.2, H6.2, A7.1, A7.2, A7.3

Hamiltonformalismus

(a) *Allgemeines:* Hamiltonfunktion aus Lagrangefunktion, Hamiltonsche Gleichungen
(b) *formale Mechanik:* Definition und Eigenschaften von Poissonklammern
wichtige Aufgaben: A8.1, A8.2, H8.1, H8.2

Ich wünsche allen Studentinnen, allen Studenten, allen Tutorinnen und allen Tutoren ein ganz tolles Weihnachten und einen guten Rutsch!

Stefan