Anwesenheitsübungen IX

6. Januar – 10. Januar

A9.1 *Eigenschaften der Deltadistribution*

Die Diracsche Deltadistribution wird symbolisch mit der Deltafunktion geschrieben:

$$\delta\,[f] = f(0) =: \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx.$$

(1) Was ergibt sich für $\delta(x-a)$ und $\delta(ax)$? Was ist $x\delta(x)$?
(2) Es sind die Formel $\delta'\,[f] = -f'(0)$ zu begründen und der entsprechende Asudruck für die n-te Ableitung anzugeben.
(3) Die δ-Funktionen $\delta\left(x^2-a^2\right)$ und allgemein $\delta\left(g\left(x\right)\right)$ sind durch δ-Funktionen, deren Argumente aus der Summe von x und einem x-unabhängigen Term bestehen, darzustellen.

A9.2 *Mehrdimensionale Deltadistribution*

Die dreidimensionale Deltadistribution ist wie folgt definiert:

$$\int_V d^3r f\left(\vec{r}\,\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\,\right) = \begin{cases} f\left(\vec{r}_0\,\right), & \text{falls } \vec{r}_0 \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

(1) Wie läßt sich dies explizit in kartesischen und in Kugelkoordinaten schreiben?
(2) Wie läßt sich die Ladungsdichte einer homogen geladenen Kugelschale vom Radius R mit Gesamtladung Q mit Hilfe der Deltadistribution darstellen?

A9.3 *Greensche Funktion der Laplacegleichung*

Die Greensche Funktion $G\left(\vec{r}\,\right)$ der Laplacegleichung für den Raum $\mathbb{R}^3$ ist diejenige Distribution, die $\Delta G\left(\vec{r}\,\right) = \delta\left(\vec{r}\,\right)$ erfüllt und im Unendlichen wie $1/r$ abfällt.
(1) Es ist zu zeigen, daß $G\left(\vec{r}\,\right) = -\frac{1}{4\pi r}$. (Hinweis: In Kugelkoordinaten arbeiten.)
(2) Aus (1) ist zu folgern, daß das Faltungsintegral mit der Greenschen Funktion

$$\Phi\left(\vec{r}\,\right) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho\left(\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}$$

die Poissongleichung $\Delta\Phi = -4\pi\rho$ löst. Inwieweit ist die Lösung eindeutig?

Hausaufgaben

Abgabe 13. Januar – 17. Januar

H9.1 *Greensche Funktion und Deltafunktion in* $\mathbb{R}$ (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $g_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\epsilon(x) = \sqrt{x^2+\epsilon^2}$.
(1) Es ist zu zeigen, daß $g_\epsilon''(x) = 2\delta_\epsilon(x)$ mit $\delta_\epsilon(x) = \epsilon^2/\left(2\left(x^2+\epsilon^2\right)^{3/2}\right)$.
(2) Man überprüfe, daß für $\epsilon \to 0$ $\delta_\epsilon(x)$ die charakteristischen Eigenschaften einer Deltafunktion hat:

- $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(x) = 0$ falls $x \neq 0$
- $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(x) = \infty$ falls $x = 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_\epsilon(x) = 1$
- $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, \delta_\epsilon(x-y) = f(x)$

(3) Es ist zu zeigen, daß die Differentialgleichung $\varphi'' = 2\rho$ durch das Faltungsintegral $\displaystyle\varphi(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \rho(y) g_\epsilon(x-y)$ gelöst wird. Ist die Lösung eindeutig?

(4) Wie sehen die Funktionen $\lim\limits_{\epsilon\to 0} g_\epsilon(x)$ und $\lim\limits_{\epsilon\to 0} g'_\epsilon(x)$ aus? In (3) ist g_ϵ durch g_0 zu ersetzen.

H9.2 *Yukawapotential* (6 Punkte)

Es ist die Greensche Funktion $G_\mu(\vec{r})$ zu berechnen, die der Gleichung $(\Delta - \mu^2)\, G_\mu(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ genügt und im Unendlichen gegen Null geht. Wie sieht die Lösung für $\mu = 0$ aus?

H9.3 *Symmetrien der Laplacegleichung* (6 Punkte)

(1) Es ist zu zeigen, daß $\Delta\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^3$ unter der Inversion $\vec{r} \to \vec{r}/r^2$, $\Phi(\vec{r}) \to \Phi(\vec{r}/r^2)/r$ invariant ist.

(2) Wie sieht die Inversionsabbildung in zwei Dimensionen aus? (Hinweis: Es ist nützlich, den Laplaceoperator in holomorphen Koordinaten $(z, \bar{z})$ auszudrücken.) Gibt es noch weitere Transformationen, die die Potentialgleichung in zwei Dimensionen nicht ändern?

H9.4 *Vektoranalysis* (6 Punkte)

Die folgenden Relationen für die Differentialoperatoren div und grad sind nachzurechnen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) &= \vec{b} \cdot \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot}\vec{b} \\
\operatorname{rot}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) &= \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\, \vec{b} + \vec{a}\, \operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\, \operatorname{div}\vec{a} \\
\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a} \\
\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) &= \left(\vec{\nabla}\varphi\right) \times \vec{a} + \varphi \operatorname{rot}\vec{a}
\end{aligned}$$

H9.5 *Greensche Theoreme* (4 Punkte)

Seien Φ und Ψ differenzierbare skalare Felder, V ein abgeschlossenes Volumen mit Oberfläche ∂V und $\partial_{\mathbf{n}} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$ die Richtungsableitung bzgl der Oberflächennormale. Zu zeigen sind
(1) die Greensche Identität

$$\int_V d^3r \left(\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi + \Phi\Delta\Psi\right) = \int_{\partial V} d^2r\, \Phi\partial_{\mathbf{n}}\Psi$$

(2) und der Greensche Satz

$$\int_V d^3r\; (\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi) = \int_{\partial V} d^2r\; (\Phi\partial_{\mathbf{n}}\Psi - \Psi\partial_{\mathbf{n}}\Phi)\,.$$