E213
Analyse von Z^0-Zerfällen

Jürgen Päpke Akın Wingerter

11./12. April 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch analysieren wir Meßdaten, die bei e^+e^--Kollisionen mit dem OPAL-Detektor am LEP-Speicherring im CERN aufgezeichnet wurden. Bei diesen Kollisionen enstehen Z^0-Teilchen, deren Zerfall in e^+e^-, $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$ und Hadronen wir beobachten. Mit den gewonnenen Daten können wir dann u.a. die Lebensdauer und Masse des Z^0, den Weinberg-Winkel und die Anzahl leichter Neutrinogenerationen berechnen.

2 Analyse von Ereignissen am Bildschirm

Am ersten Versuchstag haben wir uns mit der Klassifikation der Ereignisse am Bildschirm beschäftigt. Die Ereignisse können unterschieden werden an Hand von Kenngrößen wie die Anzahl und die Energie geladener Spuren, die im elektromagnetischen sowie hadronischen Kalorimeter deponierte Energie. Es stehen Lerndatensätze zur Verfügung, die nur "reine" Ereignisse enthalten, mit deren Hilfe wir Schnittkriterien entwickeln werden.

Zunächst haben wir uns mit dem Programm GROPE vertraut gemacht, welches die Ereignisse graphisch darstellt. Die gemessenen Koordinaten des Teilchens werden in das Bild des Detektors eingezeichnet. Die Spuren der Teilchen werden als Linien sichtbar gemacht, die in den Kalorimetern deponierte Energie wird durch eine farbige Fläche gekennzeichnet. Wir klären die Frage, welche Ereignistypen auftreten. Danach wenden wir uns der Fragestellung zu, wie man die verschiedenen Typen unterscheiden kann.

2.1 Zerfallsmodi des Z^0, das bei e^+e^--Vernichtung entsteht

2.1.1 $e^+e^- \to e^+e^-$

In niedrigster Ordnung tragen drei Prozesse zum Wirkungsquerschnitt bei, und zwar

1. s-Kanal-Austausch des Z^0,
2. s-Kanal-Austausch des Photons,
3. t-Kanal-Austausch des Photons.

Bei Schwerpunktsenergien, die der Masse des Z^0 entprechen, kann man den s-Kanal-Austausch des Photons vernachlässigen. Der t-Kanal-Austausch des Photons ist jedoch zu berücksichtigen. Dieser Prozeß hat einen hohen Wirkungsquerschnitt für kleine Streuwinkel und kann deshalb aus dem Gesamtwirkungsquerschnitt der Reaktion $e^+e^- \to e^+e^-$ herausgerechnet werden, indem wir nur große Winkel betrachten und dann über Symmetrie den Bereich kleiner Winkel rekonstruieren. Wie das genau funktioniert, werden wir in Abschnitt 4.1.3 sehen.

2.1.2 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Dieser Zerfallsmodus ist absolut unproblematisch, der Wirkungsquerschnitt ist "rein", und die Myonen sind über die Signale in den Myonkammern gut zu identifizieren.

2.1.3 $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$

Das τ-Lepton, das bei der Reaktion $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ entsteht, hat selbst viele Zerfallsmodi, und dies macht die Identifikation nicht gerade einfacher. Man unterscheidet τ-Zerfälle nach der Anzahl der emittierten Teilchen und spricht von n-prong-Ereignissen, wenn das τ in n geladene Teilchen zerfällt. Die meisten Zerfälle sind mit $\approx 86\%$ 1-prong-Ereignisse. Auf Einzelheiten gehen wir in Abschnitt 2.2.3 näher ein.

2.1.4 $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$

Der Zerfall in Neutrinos kann nicht nachgewiesen werden, man spricht von sogenannten "invisible decay modes".

2.1.5 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$

Freie Quarks können in der Natur nicht beobachtet werden (Confinement-Hypothese). Bei der e^+e^--Vernichtung entsteht im ersten Schritt ein $q\bar{q}$-Paar, welches auseinanderfliegt. In dem QCD-Feld, das zwischen den Quarks entsteht, werden weitere $q\bar{q}$-Paare erzeugt, und dieser Prozeß wiederholt sich so lange, bis das Quadrat des Impulsübertrags q^2 klein genug ist. Die entstehenden Quarks finden sich zu Hadronen zusammen, welche beobachtet werden können. Diesen gesamten Prozeß bezeichnet man als Hadronisierung.

2.2 Identifizierung der Z^0-Ereignisse

Um die charakteristischen Größen herauszufinden, an Hand derer wir die verschiedenen Zerfälle voneinander unterscheiden können, betrachten wir Testdatensätze, in denen jeweils nur Ereignisse eines bestimmten Typs vorkommen.

Für jedes Ereignis in den Datensätzen notieren wir die Anzahl der geladenen Spuren (NCHARGED), die Energiesumme aller geladener Spuren (PCHARGED), die im elektromagnetischen Kalorimeter deponierte Energie (E_ECAL), die im hadronischen Kalorimeter deponierte Energie (E_HCAL) und die Anzahl der detektierten Myonen (N_MUONS) und stellen die Ergebnisse in Form von Tabellen zusammen, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede herauszufinden.

2.2.1 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

Unsere Analyse des Testdatensatzes für Elektronen ist in Tabelle 1 gegeben.

RUN	EVENT	NCHARGED	PCHARGED	E_ECAL	E_HCAL	N_MUONS
2566	163733	2	50.9	82.6	0.0	0
	165523	2	91.9	90.0	0.0	0
	165548	3	82.5	92.3	0.0	0
	165578	2	80.9	86.8	0.0	0
	166436	2	38.1	89.5	0.0	0
	167987	2	83.8	87.5	0.0	0
	168389	2	87.4	93.2	0.0	0
	170045	2	69.3	90.7	0.0	0
	170379	2	86.1	89.4	0.5	0
	197594	2	90.3	90.6	0.0	0
	197889	2	92.1	88.5	0.5	0
2570	28178	3	81.7	91.6	0.0	0
	28499	2	89.6	92.5	0.0	0
	28743	2	61.1	89.2	0.0	0
	28777	3	88.4	89.1	0.0	0
	88224	2	90.9	90.5	0.3	0
	90060	2	64.6	88.8	0.0	0
	91274	2	95.6	96.2	0.0	0
2571	418921	2	93.0	90.8	0.0	0
	420590	2	94.1	89.2	0.0	0

Tabelle 1: Testdatensatz für Elektronen

Der Zerfall in ein e^+e^--Paar ist daran zu erkennen, daß wir 2 in entgegengesetzte Richtungen auslaufende Spuren sehen und fast die gesamte Energie im elektromagnetischen Kalorimeter (ECal) abgegeben wird. Im hadronischen Kalorimeter (HCal) wird fast keine Energie deponiert. Die Elektronen haben in den meisten Fällen die gesamte Schwerpunktsenergie von ca. 90 GeV, es kommen aber auch Elektronen mit deutlich geringerer Energie vor, welche durch Bremsstrahlung Energie verloren haben. Es werden keine Myonen detektiert.

2.2.2 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Unsere Analyse des Testdatensatzes für Myonen ist in Tabelle 2 gegeben.

RUN	EVENT	NCHARGED	PCHARGED	E_ECAL	E_HCAL	N_MUONS
2568	80617	2	90.1	1.6	7.0	2
	84297	2	93.0	1.6	8.7	2
	85398	2	96.8	2.0	0.0	2
	87693	2	89.1	2.3	8.5	2
	89929	2	90.5	1.5	7.2	2
	91048	2	91.8	1.8	4.3	2
	92681	2	86.3	3.7	3.3	3
	93199	2	99.2	1.3	2.9	2
	95202	2	88.2	1.6	3.0	2
	99962	2	90.9	1.3	6.7	2
	100566	2	95.6	2.5	6.1	2
	100721	2	75.3	3.1	6.8	2
	102167	2	85.2	5.8	4.4	2
	105720	2	98.6	3.6	5.7	3
	106346	2	86.8	1.9	7.9	2
	107030	2	98.0	1.9	2.0	3
	107772	2	108.3	2.0	8.5	3
	108553	2	92.4	3.6	6.7	2
	110610	2	92.0	1.9	22.6	2
2570	29023	2	92.6	3.6	5.7	2

Tabelle 2: Testdatensatz für Myonen

Charakteristisch für diesen Zerfall ist, daß die Anzahl der detektierten Myonen zwischen 2 und 3 liegt. Das ist ein gutes Merkmal, um z.B. den Zerfall in Myonen von einem Zerfall in Elektronen zu unterscheiden.

Auch für den Zerfall in ein $\mu^+\mu^-$-Paar haben wir 2 in entgegengesetzte Richtungen auslaufende Spuren. Der Impuls der geladenen Spuren ist ca. 90 GeV und damit gleich der Schwerpunktsenergie. Das Myon verliert deutlich weniger Energie durch Strahlung als z.B. das Elektron. Die in den beiden Kalorimetern deponierte Energie ist sehr viel geringer als in den anderen Zerfallsmodi.

2.2.3 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$

Unsere Analyse des Testdatensatzes für τ-Leptonen ist in Tabelle 4 gegeben.

Die bei diesem Zerfall entstehenden τ's kann man nicht direkt nachweisen, weil sie zu kurzlebig sind, ihre Lebensdauer ([PDG]) beträgt $\tau_L = 291.0 \cdot 10^{-15}\ s$, und in dieser Zeit legen sie eine Strecke von $\gamma c \tau_L \approx 2$ mm zurück. Sie zerfallen also, bevor sie im Detektor nachgewiesen werden können. Wir müssen also die beim τ-Zerfall entstehenden Teilchen nachweisen. Die wichtigsten Zerfallskanäle des τ haben wir in Tabelle 3 zusammengestellt.

ZERFALLSMODUS	VERZWEIGUNGSVERHÄLTNIS
$\pi^-\pi^0\nu_\tau$	$(24.0 \pm 0.6)\%$
$e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$	$(17.9 \pm 0.3)\%$
$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$	$(17.6 \pm 0.3)\%$
$\pi^-\nu_\tau$	$(11.6 \pm 0.4)\%$
$\pi^-\pi^-\pi^+\nu_\tau$	$(5.6 \pm 0.7)\%$
$\pi^-\pi^-\pi^+\pi^0\nu_\tau$	$(4.4 \pm 1.6)\%$
$\pi^-\pi^0\pi^0\pi^0\nu_\tau$	$(3.0 \pm 2.7)\%$

Tabelle 3: Die wichtigsten Zerfallskanäle des τ-Leptons

Das erste, was uns auffällt, ist, daß es in einigen Fällen mehr als 2 geladene Spuren gibt. Das unterscheidet den Zerfall in $\tau^+\tau^-$ von den anderen bis jetzt betrachteten Zerfallsarten. Probleme bei der Spurrekonstruktion im Detektor ergeben sich, wenn die beim τ-Zerfall enstehenden Pionen unter einem zu kleinen Winkel auseinanderfliegen. In diesem Fall kann es zu Fehlern bei der Anzahl der geladenen Spuren kommen.

Beim Zerfall des τ-Leptons werden Netrinos erzeugt, die einen Teil der Energie wegtragen, ohne nachgewiesen zu werden. Die Energiesumme der geladenen Teilchen und die Summe der in den Detektoren deponierten Energie weicht deshalb deutlich von der Schwerpunktsenergie von ca. 90 GeV ab. Die neutralen Pionen tragen zwar nicht zur Energiesumme der geladenen Teilchen bei, werden aber im hadronischen Kalorimeter nachgewiesen.

RUN	EVENT	NCHARGED	PCHARGED	E_ECAL	E_HCAL	N_MUONS	ZERFALLSKANAL
2566	170371	5	74.0	51.1	10.2	0	$\pi^-\pi^0\nu_\tau$, $\pi^+\pi^-\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	170508	2	46.5	17.3	8.2	1	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	179750	2	30.8	1.6	6.3	2	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$
	184010	2	29.5	10.2	4.1	1	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	184435	2	33.1	1.5	10.6	2	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$
	189056	2	24.4	12.4	11.7	0	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	208314	4	36.0	16.1	5.7	1	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\pi^+\pi^-\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	212745	2	41.3	11.1	20.0	1	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
2570	29664	2	49.7	5.2	20.3	3	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	30348	2	33.4	23.6	6.9	1	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, $\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$
	34612	2	14.1	3.3	6.3	1	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	39992	2	19.7	15.9	3.8	0	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	42200	2	26.8	16.5	3.4	1	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, $\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$
	45609	5	23.4	27.0	17.1	2	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, $\pi^-e^+e^-\gamma\nu_\tau$
	47033	2	23.8	29.4	3.6	0	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
2572	98915	2	39.0	18.9	4.4	1	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	102412	2	24.1	46.5	7.3	0	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	102586	5	38.5	28.5	0.0	0	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, $\pi^+\pi^-\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	108411	2	35.3	51.8	2.3	0	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$, $\pi^-\pi^0\nu_\tau$
	109621	2	17.8	2.5	5.0	4	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$

Tabelle 4: Testdatensatz für τ-Leptonen

Auffällig ist, daß beim τ-Zerfall zwischen 0 und 4 Myonen nachgewiesen werden, obwohl der einzige Zerfallsmodus, in dem ein Myon vorkommt, $\tau \to \mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$ ist. Man muß berücksichtigen, daß die beim τ-Zerfall erzeugten geladenen Pionen weiterzerfallen in Myonen, und zwar mit einem Verzweigungsverhältnis von 99.99% gilt $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$ bzw. $\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$. Wir haben den Zerfallskanal bestimmt und die Ergebnisse in Tabelle 4 eingetragen.

2.2.4 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$

Unsere Analyse des Testdatensatzes für Hadronen ist in Tabelle 5 gegeben.

RUN	EVENT	NCHARGED	PCHARGED	E_ECAL	E_HCAL	N_MUONS
2566	164184	15	37.7	37.0	14.1	2
	195995	17	39.2	66.8	9.9	0
	196117	46	64.6	53.0	13.0	0
	196548	8	33.3	67.5	13.3	2
2568	78191	36	45.3	53.3	7.7	0
	78425	41	49.9	53.2	13.8	0
	78553	9	21.9	65.2	8.8	0
	78787	16	55.9	50.4	24.3	1
	79038	30	38.1	68.3	13.8	0
	79043	22	34.4	75.5	6.2	0
	79181	36	51.2	62.3	5.5	0
	79337	23	63.1	56.0	17.2	0
	79487	23	59.0	60.6	8.5	1
	79517	26	62.2	67.2	20.4	0
	79642	30	43.3	71.7	4.3	0
2570	88252	40	47.8	61.4	5.7	2
	88262	19	67.9	52.1	10.6	1
	88303	14	52.1	61.0	4.4	0
	88328	29	82.6	53.8	16.4	1

Tabelle 5: Testdatensatz für Hadronen

Der Zerfall des Z^0 in ein Quark-Antiquark-Paar ist leicht zu erkennen an der hohen Zahl der geladenen Spuren. Im Zuge der Hadronisierung (siehe Abschnitt 2.1.5) entstehen insbesondere Protonen, Kaonen und Pionen. Die neutralen Pionen haben eine sehr kleine Lebensdauer von $\tau_L = 8.4 \cdot 10^{-17}\ s$ und zerfallen noch im Detektor in 2 γ's.

2.3 Analyse eines gemischten Lerndatensatzes

Mit den in Abschnitt 2.2 ausgearbeiteten Charakteristika für die verschiedenen Zerfallsmodi des Z^0 analysieren wir die Daten aus dem Testdatensatz 1. Unsere Ergebnisse sind in Tabelle 6 wiedergegeben.

Die hadronischen Ereignisse sind an der hohen Multiplizität der geladenen Spuren deutlich von den anderen Zerfallskanälen zu unterscheiden. Den Zerfall in Myonen erkennt man daran, daß die Myonkammern ansprechen und die Multiplizität geladener Spuren = 2 ist. Sowohl ECal wie auch HCal sprechen an, und beide Werte sind ≤ 10 GeV. Beim Zerfall in Elektronen wird fast immer die gesamte Schwerpunktsenergie im ECal deponiert, und die Energie im HCal ist 0 oder verschwindend gering. Die Anzahl geladener Spuren ist 2.

Etwas mehr Probleme bereitet der Zerfall in τ-Leptonen. Im Gegensatz zu Elektronen deponieren sie in jedem Fall Energie im HCal und sind über diese Eigenschaft deutlich von den Elektronen zu unterscheiden. Die Anzahl der geladenen Spuren ist ≤ 10 und damit deutlich niedriger als im hadronischen Zerfall. Diese beiden Kanäle gegeneinander abzugrenzen, ist also auch nicht schwer.

Da beim Zerfall in τ-Leptonen als Folgeprodukte Myonen entstehen können, kann man ihn über die Anzahl der Myonen nicht sicher vom Myonzerfall des Z^0 unterscheiden. Die Werte für die im hadronischen Kalorimeter deponierte Energie sind auch recht ähnlich. Aber glücklicherweise treten deutliche Unterschiede im Wert der Variablen ECal auf. Für den τ-Zerfall ist ECal deutlich größer als für Myonen.

RUN	EVENT	NCHARGED	PCHARGED	E_ECAL	E_HCAL	N_MUONS	ZERFALLSKANAL
4353	1080	19	39.5	44.3	15.6	2	$q\bar{q}$
	2387	36	42.8	57.1	12.5	1	$q\bar{q}$
	5386	2	95.7	93.4	0.0	0	e^+e^-
	6057	2	90.8	1.4	4.1	2	$\mu^+\mu^-$
	6696	4	36.5	35.8	10.8	0	$\tau \to \pi^0\pi^-,\ \pi^0\pi^-\pi^-\pi^+$
	7137	2	97.0	2.2	8.9	3	$\mu^+\mu^-$
	7219	68	42.9	48.5	6.2	2	$q\bar{q}$
	8323	5	35.0	40.8	3.3	1	$\tau \to e^-e^-e^+,\ \mu^-\nu_\tau$
	8641	21	75.8	45.8	21.0	0	$q\bar{q}$
	9149	2	95.2	1.3	7.9	2	$\mu^+\mu^-$
	9289	2	22.7	34.4	0.0	0	e^+e^-
	9593	4	44.3	37.8	2.6	0	$\tau \to \pi^0\pi^-,\ \pi^0\pi^-\pi^-\pi^+$
	9880	21	53.1	36.2	22.9	0	$q\bar{q}$
	10900	2	89.5	92.0	0.0	0	e^+e^-
	11844	2	89.1	89.7	0.0	0	e^+e^-
	13556	2	4.1	4.4	0.0	0	2γ-Ereignis
	14063	2	87.8	1.4	4.3	2	$\mu^+\mu^-$
	14640	2	75.3	90.0	0.0	0	e^+e^-
	14744	2	93.7	1.6	6.8	2	$\mu^+\mu^-$
	15775	2	67.1	93.6	0.0	0	e^+e^-

Tabelle 6: Analyse des gemischten Datensatzes 1

2.4 Erste Schritte beim Entwickeln von Schnittkriterien

Wir wollen unsere gewonnenen Erkenntnisse auf die Analyse großer Datenmengen anwenden. Hierbei ist es ganz und gar unmöglich, jedes einzelne Ereignis zu sichten und individuell zu entscheiden, um welchen Zerfallsmodus es sich handelt. Wir müssen also quantitative Kriterien entwickeln, die zur Unterscheidung der Zerfallskanäle dienen. Die bisherigen Untersuchungen haben uns schon einige Anhaltspunkte geliefert. Bevor wir nun in Abschnitt 4.1.4 dazu übergehen, unsere Kriterien zu präzisieren, erstellen wir Histogramme für die diversen Variablen, die wir benutzt haben, um die Zerfallsmodi zu identifizieren.

Die Histogramme sind in Abbildung 1 auf der nächsten Seite wiedergegeben. In Tabelle 7 haben wir die charakteristischen Wertebereiche der Variablen eingetragen, welche den verschiedenen Zerfallsmodi entsprechen. Diese Einteilung ist noch sehr grob und wird in den folgenden Abschnitten verfeinert.

	NCHARGED	PCHARGED	E_ECAL	E_HCAL
Elektronen	≤ 2	35-100	85-95	≤ 0.1
Myonen	≤ 2	85-110	≤ 4	0-10
τ-Leptonen	≤ 5	15-45	≤ 30	0-20
Hadronen	≥ 8	30-70	50-75	5-25

Tabelle 7: Schnittkriterien

Man kann den Wertebereich nicht immer klar festlegen. Wählt man ihn zu klein, zählt man einige Ereignisse nicht mit. Wählt man ihn zu groß, kann man die Zerfälle nicht klar gegeneinander abgrenzen. Auf dieses Dilemma gehen wir in Abschnitt 4.1.1 näher ein.

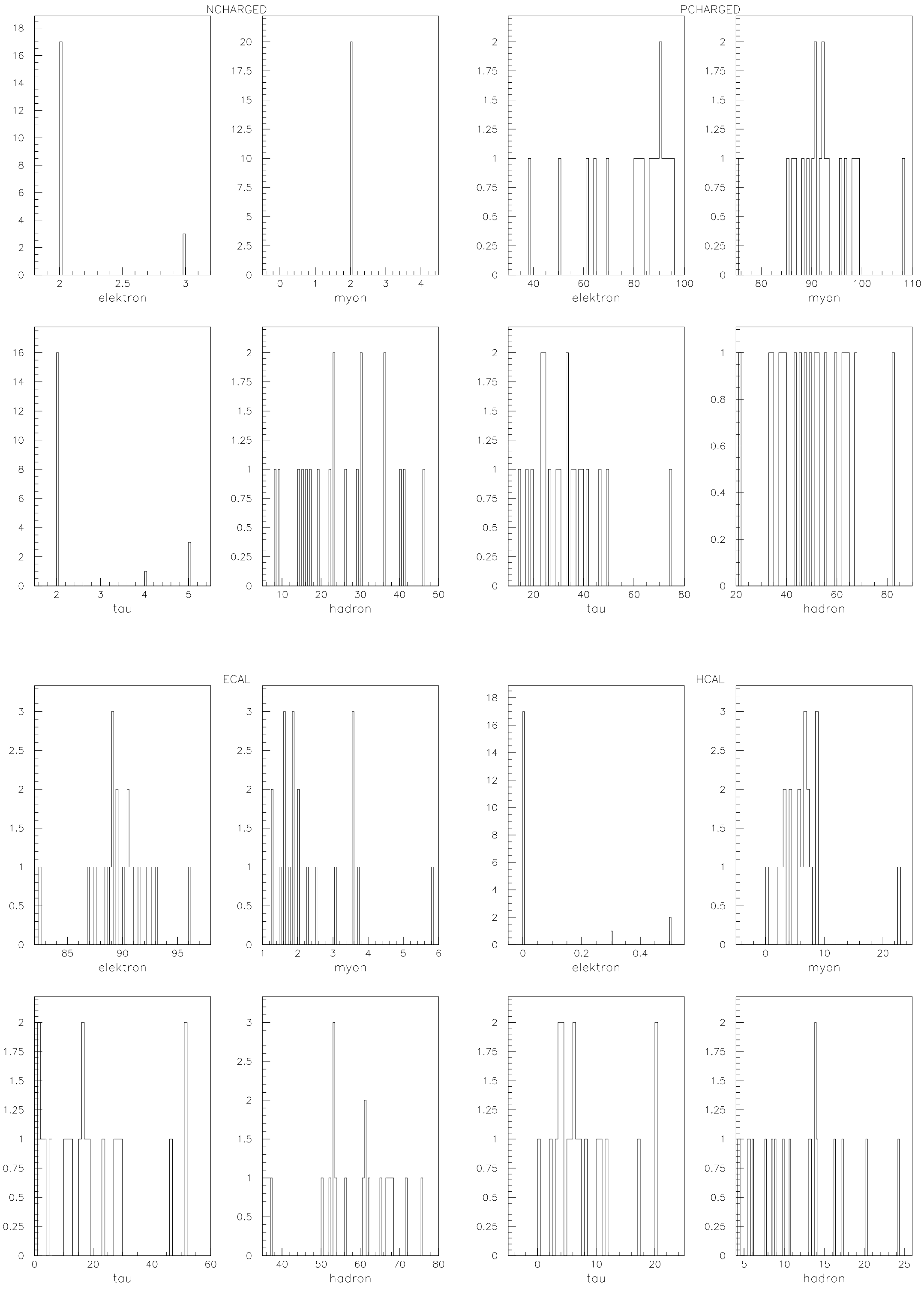

Abbildung 1: Histogramme für NCHARGED, PCHARGED, ECAL, HCAL

3 Berechnung der Zerfallsbreite des Z^0 aus der GWS-Theorie

3.1 Herleitung der Formel für die Zerfallsbreite

Bevor wir nun mit einem Breit-Wigner-Fit an die gemessenen Wirkungsquerschnitte die Zerfallsbreite des Z^0 bestimmen, wollen wir uns angucken, wie sich diese Zerfallsbreite aus der Glashow-Weinberg-Salam-Theorie berechnen läßt. Ich bitte zu beachten, daß wir in diesem Abschnitt in natürlichen Gaußeinheiten rechnen.

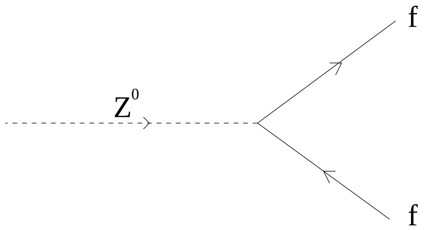

Abbildung 2: Feynman-Graph des Z^0-Zerfalls in ein Fermion-Antifermion-Paar

In Abbildung 2 haben wir den Feynman-Graphen wiedergegeben, der in erster Ordnung diesen Zerfall beschreibt. Der Vertexfaktor ist durch

$$-i\, g_z\, \gamma^\mu \frac{1}{2}(c_V^f - c_A^f \gamma^5)$$

gegeben. θ_w ist der Weinberg-Winkel, γ^μ, γ^5 sind die Dirac-Matrizen. c_V und c_A sind durch

$$c_V^f = T_3^f - 2\sin^2\theta_w\, Q_f \quad \text{und} \quad c_V^f = T_3^f$$

gegeben, wobei T_3^f die dritte Komponente des schwachen Isospins und Q_f die Ladung ist. Wir haben die Werte der Übersichtlichkeit halber in Tabelle 8 zusammengestellt.

f	c_V	c_A	Q
$\nu_e,\, \nu_\mu,\, \nu_\tau$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$e^-,\, \mu^-,\, \tau^-$	$-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$	-1
$u,\, c,\, t$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$d,\, s,\, b$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

Tabelle 8: $Z^0 \to f\bar{f}$ Vertexfaktoren im Standardmodel

Die Zerfallsbreite eines Teilchens A, das sich in seinem Ruhsystem befindet und in 2 Teilchen 1 und 2 zerfällt, ist gegeben durch ([Ha], p. 92)

$$\Gamma(A \to 1 + 2) = \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 d\Omega. \tag{1}$$

Wir brauchen also die invariante Amplitude $\mathcal{M}$, und die liefern uns natürlich die Feynman-Regeln. Wie immer haben wir über die Helizitätszustände des einlaufenden Teilchens zu mitteln und über die Spinzustände der auslaufenden Teilchen zu summieren. Wendet man die bekannten Spurtheoreme an und vernachlässigt man die Fermionmassen, so kommt man nach einiger Rechnung zum Ausdruck

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{g_z^2}{4}\left[\frac{1}{3}\sum_\lambda \epsilon_\mu^\lambda \epsilon_\nu^{\lambda *}\right]\left[(c_V^2 + c_A^2)\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k}') - 2c_V c_A \mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k}')\right].$$

Spezialisiert man schließlich auf das Ruhsystem des Teilchens, in dem

$$k = \frac{1}{2}M_Z(1,0,0,1) \quad \text{und} \quad k' = \frac{1}{2}M_Z(1,0,0,-1)$$

gilt, und setzt man das Ergebnis in Gleichung 1 ein, folgt für die Zerfallsbreite des Z^0 in ein Fermion-Antifermion-Paar

$$\Gamma(Z^0 \to f\bar{f}) = \frac{g_z^2}{48\pi}(c_V^2 + c_A^2)M_Z.$$

Es ist üblich (weiß der Kuckuck wieso), das Ergebnis mit der Fermi-Konstanten

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{g_w}{M_W}\right)^2$$

anzugeben. Sie ist eine Remineszenz aus der Zeit, in der man kein $W^\pm$ kannte und sich den β-Zerfall durch eine 4-Punkt-Wechselwirkung erklärte. Beachtet man die bekannten Beziehungen

$$g_w = g_z \cos\theta_w \quad \text{und} \quad M_W = M_Z \cos\theta_w,$$

so rechnet man leicht nach, daß die Zerfallsbreite, ausgedrückt mit der Fermi-Konstanten,

$$\Gamma(Z^0 \to f\bar{f}) = N_c \frac{\sqrt{2}}{12\pi} G_F M_Z^3 (c_V^2 + c_A^2)$$

lautet. Der Faktor N_c berücksichtigt dabei die Farbladung der Quarks. Es gilt also $N_c = 3$ für Quarks und $N_c = 1$ für Leptonen.

3.2 Berechnung der Zerfallsbreiten und Vergleich mit experimentellen Werten

Wir berechnen nun die verschiedenen Zerfallsbreiten mit dieser Formel. Wir benutzen dabei die Werte $G_F = 1.16639 \cdot 10^{-5}$ GeV^{-2}, $M_Z = 91.187$ GeV und $\sin^2\theta_w = 0.23124$ aus [PDG]. Die berechneten Werte, diejenigen aus der Versuchsanleitung und aus dem Particle Data Booklet haben wir zum Vergleich in Tabelle 9 zusammengestellt.

	$\Gamma(Z^0 \to \nu_\ell\bar{\nu}_\ell)$	$\Gamma(Z^0 \to \ell\bar{\ell})$	$\Gamma(Z^0 \to u\bar{u}, c\bar{c})$	$\Gamma(Z^0 \to d\bar{d}, s\bar{s}, b\bar{b})$
berechnet	165.9	83.4	285.4	367.9
Skriptum	167.6	83.8	299	378
PD Group	166.1	83.83	252.4	412.5

Tabelle 9: Zerfallsbreiten in MeV für die verschiedenen Fermion-Antifermion-Paare

In [PDG] war nur die hadronische Breite angegeben. Um die Werte besser vergleichen zu können, haben wir uns aus [Ce] die Werte

$$\frac{\Gamma((u\bar{u} + c\bar{c})/2)}{\Gamma(\text{hadrons})} = 0.145 \quad \text{und} \quad \frac{\Gamma((d\bar{d} + s\bar{s} + b\bar{b})/3)}{\Gamma(\text{hadrons})} = 0.237$$

beschafft und zurückgerechnet. Um die Zerfallsbreite $\Gamma(Z^0 \to \nu_\ell\bar{\nu}_\ell)$ zu erhalten, haben wir Γ(invisible) durch 3 geteilt. Γ(hadrons) und Γ(invisible) sind in Tabelle 10 gegeben. Während das Ergebnis für die Neutrinos recht gut hinkommt, ist keine zufriedenstellende Übereinstimmung für die Quarks zu sehen. Das mag an der Unkenntnis liegen, wie die Hadronen aus Quarks aufgebaut sind. Wir können ja nur die hadronische Breite direkt messen.

In Tabelle 9 fällt sofort ins Auge, daß die von uns berechneten Werte allesamt etwas kleiner sind als die im Skript angegebenen. Das liegt natürlich daran, daß wir in unseren Berechnungen nur den Feynman-Graphen erster Ordnung berücksichtigt haben. Es gibt natürlich mehr Graphen, die einen Beitrag liefern. Außerdem haben wir die Fermionenmassen vernachlässigt. Dies dürfte aber nur einen kleinen Effekt auf das Ergebnis haben.

Wir haben in Tabelle 10 die Werte für die Gesamtbreite, die hadronische Breite, die ungeladene leptonische Breite, die geladene leptonische Breite vergleichend zusammengestellt. Der maßgebliche Wert ist natürlich der am Cern gemessene. Mit dieser Größe haben wir unsere Ergebnisse zu vergleichen.

	Γ(invisible)	Γ(charged leptons)	Γ(hadrons)	Γ(total)
berechnet	497.6	250.2	1674.4	2422.3
Skriptum	502.8	251.4	1732.0	2486.2
PD Group	498.3	251.5	1740.7	2490.0

Tabelle 10: Gesamtbreite, hadronische Breite, leptonische Breiten in MeV

3.3 Berechnung der theoretischen Wirkungsquerschnitte und Vergleich mit experimentellen Werten

Wir berechnen nun die partiellen Wirkungsquerschnitte am Resonanzmaximum. Diese sind gegeben durch die Formel

$$\sigma_X^{\text{peak}} = \frac{12\pi}{M_Z^2}\frac{\Gamma_e}{\Gamma_Z}\frac{\Gamma_X}{\Gamma_Z}, \tag{2}$$

wobei M_Z die Z^0-Masse, Γ_Z die totale Breite und Γ_X die partielle Breite für das Fermion ist, in welches das Z^0 zerfällt. In Tabelle 11 haben wir die Wirkungsquerschnitte zusammengestellt.

	$Z^0 \to \nu_\ell\bar{\nu}_\ell$	$Z^0 \to \ell\ell$	$Z^0 \to u\bar{u}, c\bar{c}$	$Z^0 \to dd, s\bar{s}, bb$
Γ [MeV] aus Skript	167.6	83.8	299	378
σ [nb] daraus berechnet	4.01	1.99	7.13	9.03
Γ [MeV] von PD Group	166.1	83.83	252.4	412.5
σ [nb] daraus berechnet	3.97	1.99	6.04	9.89

Tabelle 11: Partielle Wirkungsquerschnitte am Resonanzmaximum

Zur Umrechnung von natürlichen Einheiten in mbarn benutzen wir

$$1 \text{ GeV}^{-2} = 0.3894 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 = 0.3894 \text{ mbarn}.$$

Für den späteren Vergleich mit unseren Experimentellen Ergebnissen haben wir die Wirkungsquerschnitte für die Hadronproduktion, die Leptonproduktion und die Neutrinoproduktion in Tabelle 12 zusammengestellt.

	σ(invisible) [nb]	σ(charged leptons) [nb]	σ(hadrons) [nb]
Skriptum	12.03	5.99	41.28
PD Group	11.92	6.04	41.67

Tabelle 12: Wirkungsquerschnitte für die Hadronproduktion, die Leptonproduktion und die Neutrinoproduktion

3.4 Änderung der Gesamtbreite bei Zerfall in ein weiteres leichtes Fermionpaar

Die Zerfallsbreite ist additiv. Falls der Zerfall in ein weiteres Teilchenpaar $X\bar{X}$ möglich wäre, würde sich die Gesamtbreite um $\Gamma(Z^0 \to X\bar{X})$ ändern, d.h. ausgedrückt in Prozent wäre das

$$\Delta\Gamma = \frac{\Gamma_X}{\Gamma_Z} \cdot 100\%.$$

In folgender Tabelle 13 haben wir für einige leichte Fermionpaare die prozentuale Änderung berechnet. Für Γ_X haben wir die von uns berechneten Werte in Tabelle 9 genommen. Die Gesamtbreite ist $\Gamma_Z = 2422.3$.

Fermion X	$\Gamma(Z^0 \to X\bar{X})$ [MeV]	$\Delta\Gamma[\%]$
$\nu_\ell \bar{\nu}_\ell$	165.9	6.85
$\ell\bar{\ell}$	83.4	3.44
$u\bar{u}, c\bar{c}$	285.4	11.78
$d\bar{d}, s\bar{s}, b\bar{b}$	367.9	15.19

Tabelle 13: Änderung der Gesamtbreite, wenn der Zerfall in ein weiteres Fermionpaar möglich wäre

3.5 Winkelverteilung für $e^+e^- \to e^+e^-$ und $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Der Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ ist gegeben durch ([Skr], p. 27)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \cos^2\theta.$$

Im Falle $e^+e^- \to e^+e^-$ müssen wir s-Kanalanteil und t-Kanalanteil unterscheiden. Der s-Kanalanteil ist gegeben durch den gleichen Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \cos^2\theta,$$

wohingegen der t-Kanalanteil

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{(1-\cos\theta)^2}$$

ist. Der Gesamtwirkungsquerschnitt ist dann die Summe

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim A \cdot (1 + \cos^2\theta) + B \cdot \frac{1}{(1-\cos\theta)^2},$$

wobei der zweite Summand auf der rechten Seite für kleine θ dominiert. Für große Werte von θ (in unserem Experiment ab $\cos\theta \leq 0.6$) ist der s-Kanalanteil entscheidend.

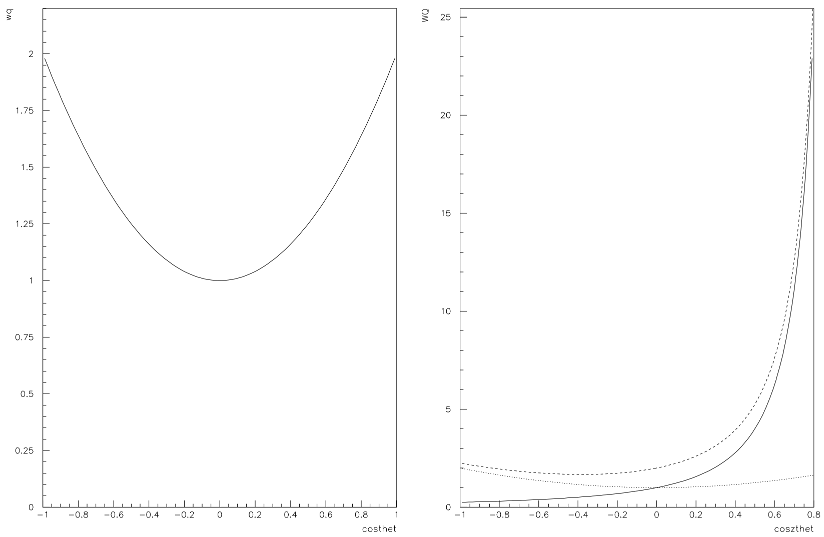

Abbildung 3: Winkelverteilung für $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ und $e^+e^- \to e^+e^-$

Wir haben in Abbildung 3 die Wirkungsquerschnitte in Abhängigkeit von $\cos\theta$ aufgetragen, wobei wir für $e^+e^- \to e^+e^-$ die s- und t-Kanalanteile getrennt haben. In Unkenntnis der wahren Werte haben wir

$A = B = 1$ gewählt. Im Experiment werden wir sehen, daß im Bereich $-0.9 \leq \cos\theta \leq 0.6$ der Gesamtwirkungsquerschnitt für die Reaktion $e^+e^- \to e^+e^-$ praktisch mit dem s-Kanalanteil zusammenfällt. Daß wir dies im Diagramm nicht erkennen, liegt einfach an der falschen Wahl von A und B. Ist $B \ll A$, fällt der Gesamtwirkungsquerschnitt für nicht allzu kleine Winkel θ mit dem s-Kanalanteil zusammen.

3.6 Berechnung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

Wir sollen die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie A_{FB} für verschiedene Werte von $\sin^2\theta_w$ und bei verschiedenen Schwerpunktsenergien $\sqrt{s}$ berechnen. Die vereinfachte Formel

$$A_{FB} \simeq 3(1 - 4\sin^2\theta_w)^2$$

gilt leider nur am Resonanzmaximum (d.h. $\sqrt{s}$=91.187 GeV). Wir müssen also auf die exakte Formel zurückgreifen. Gott sei dank beherrscht MapleV auch komplexe Arithmetik.

Die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie ist gegeben durch

$$A^f_{FB} = \frac{3}{4}\frac{F_2}{F_1},$$

wobei folgende Definitionen zu beachten sind:

$$\begin{aligned}
F_1 &= Q_f^2 - 2v_e v_f Q_f \mathrm{Re}\chi + (v_e^2 + a_e^2)(v_f^2 + a_f^2)|\chi|^2 \\
F_2 &= -2a_e a_f Q_f \mathrm{Re}\chi + 4v_e a_e v_f a_f |\chi|^2 \\
\chi &= \frac{s}{(s - M_Z^2) + is\Gamma_Z/M_Z} \\
v_f &= \frac{c_v^f}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}, \qquad a_f = \frac{c_a^f}{2\sin\theta_w\cos\theta_w} \\
Q_f &= \text{ Ladung in Einheiten der Elementarladung} \\
M_Z &= 91.187 \text{ GeV}, \quad \Gamma_Z = 2.490 \text{ GeV} \\
s &= \text{ Quadrat der Schwerpunktsenergie} \\
\sin^2\theta_w &= \text{ Weinberg-Winkel}
\end{aligned}$$

Wir variieren $\sin^2\theta_w$, $\sqrt{s}$ und berechnen für jedes Wertepaar die Asymmetrie. Unsere Ergebnisse sind in Tabelle 14 zusammengestellt. Die Details der Rechnung sind im Maple Worksheet in Anhang A zu finden.

	$\sqrt{s} = 89.225$ GeV	$\sqrt{s} = 91.225$ GeV	$\sqrt{s} = 93.225$ GeV
$\sin^2\theta_w = 0.21$	0.2357	0.0695	-0.0896
$\sin^2\theta_w = 0.23$	0.2001	0.0154	-0.1595
$\sin^2\theta_w = 0.25$	0.1953	-0.0037	-0.1901

Tabelle 14: Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in Abhängigkeit von $\sin^2\theta_w$ und $\sqrt{s}$

4 Statistische Auswertung von Z^0-Zerfällen

Das Ziel ist die Bestimmung der Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen Zerfallskanäle des Z^0. Dazu müssen wir große Datenmengen analysieren. Das Programm GROPE, mit dem wir uns die einzelnen Ereignisse angesehen haben, ist für diese Aufgabe ungeeignet.

Die Daten des Z^0-Zerfalls werden in sogenannten n-tuples zusammengefaßt. Jede Zeile dieses n-tuples stellt ein einzelnes Ereignis dar. Die Spalten entsprechen den Variablen, mit denen wir uns schon in den vorigen Abschnitten vertraut gemacht haben. Sie sind zur Übersichtlichkeit nochmal in Tabelle 15 zusammengestellt.

NCHARGED	Anzahl geladener Spuren
PCHARGED	Energiesumme aller geladener Spuren
E_ECAL	Energie im elektromagnetischen Kalorimeter
E_HCAL	Energie im hadronischen Kalorimeter
E_LEP	LEP-Strahlenergie (halbe Schwerpunktsenergie)
COS_THRU	cos des Winkels zwischen Strahlachse und Thrustachse
COS_THET	cos des Winkels zwischen Positron und auslaufendem positivem Teilchen

Tabelle 15: Übersicht über die Variablen

In Abschnitt 2.2 hatten wir gelernt, die verschiedenen Zerfallskanäle des Z^0 zu unterscheiden, und in Abschnitt 2.4 hatten wir damit begonnen, die Schnittkriterien quantitativ zu formulieren. Diese Kriterien müssen noch verfeinert werden.

4.1 Entwickeln von Schnittkriterien

Um unsere Schnittkriterien zu testen und ggf. zu verfeinern, stehen uns die Monte-Carlo-Datensätze zur Verfügung. Diese Daten werden aus der Simulation der elementaren Prozesse im Detektor gewonnen.

4.1.1 Monte-Carlo-Simulationen und Schnittbedingungen

Wenn 2 Ereignisse an Hand der Variablen X so sauber getrennt werden können wie im ersten Bild von Abbildung 4 dargestellt, sind wir überglücklich. Leider ist das nicht die Regel.

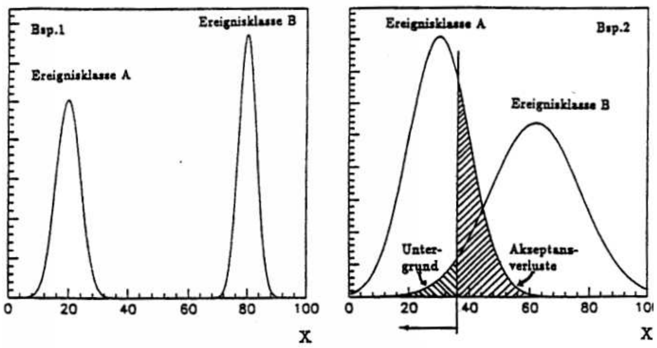

Abbildung 4: Beispiel zur Prozedur des Schneidens

Meistens liegt ein Fall vor, wie er im zweiten Bild von Abbildung 4 zu sehen ist. Wenn man nun einen Schnitt festlegt, verliert man Ereignisse der gesuchten Klasse und behält unerwünschte Ereignisse der anderen Klasse bei. Zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte benötigen wir die genaue Zahl der Ereignisse N einer bestimmten Klasse. Die Anzahl N_{beob} der beobachteten Ereignisse muß man also korrigieren.

Mit den aus den Experimenten zur Verfügung stehenden Daten ist die Berechnung der Korrektur prinzipiell nicht möglich. Man kann nämlich immer nur die Summe der beiden Ereignisklassen messen. Wir können nicht auf die Verteilung der einzelnen Ereignisklassen schließen. Eine Möglichkeit, die Korrekturen zu berechnen, bietet die Ereignissimulation am Computer. Simuliert man die Ereignisklassen A und B, kennen wir bereits die Einzelverteilungen. Wendet man nun den gleichen Schnitt auf diese simulierte Daten an, können wir die Akzeptanzverluste ausrechnen und die beobachtete Anzahl der Ereignisse korrigieren.

Uns liegen 4 Monte-Carlo-Datensätze vor, die jeweils 100,000 "reine" Ereignisse für den Zerfall des Z^0 in Elektronen, Myonen, τ-Leptonen und Hadronen enthalten. Wir werden im folgenden die Verteilung der Ereignisse in den verschiedenen Variablen betrachten und daraus unsere Schnittkriterien entwickeln. Diese Schnittkriterien wenden wir dann auf die Monte-Carlo-Datensätze an, um zu sehen, wie viele Ereignisse eines Typs auch als solche erkannt worden sind. Dies führt zum Begriff der Effizienzmatrix. Wenn zu viele Ereignisse falsch zugeordnet werden, müssen wir die Schnittkriterien nachbessern. Wenn dann schließlich unsere Schnittkriterien festliegen, wenden wir diese auf die (realen) OPAL-Daten an, um die Wirkungsquerschnitte zu bestimmen.

4.1.2 Pre-Cut-Korrekturfaktor

Die Gesamtzahl der Ereignisse ist $N = 100,000$, aber es werden einige von vornherein ausselektiert und stehen zur weiteren Auswertung nicht zur Verfügung (Pre-Cut). Der Korrekturfaktor α_i ist das Verhältnis der Anzahl der Gesamtereignisse ($N = 100,000$) zur Anzahl zugelassener Ereignisse (N_i):

	e^+e^-	$\mu^+\mu^-$	$\tau^+\tau^-$	$q\bar{q}$
N_i	93802	94381	79214	98563
α_i	1.066075	1.059535	1.262403	1.014580

Erinnern wir uns daran, daß Multiplikation mit einer Diagonalmatrix einfach die Multiplikation jeder Vektorkomponente mit dem entsprechenden Diagonalelement bedeutet, erscheint es uns sinnvoll, die Precut-Korrektur in der Form

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1.066075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.059535 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.262403 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.014580 \end{pmatrix}$$

zu schreiben. Um bei einem Datenvektor die Precut-Korrektur durchzuführen, müssen wir dann eine einfache Matrix-Vektor-Multiplikation ausführen.

4.1.3 Trennung von s- und t-Kanal-Elektronen

Wir hatten bereits in Abschnitt 2.1.1 das Problem der t-Kanal-Elektronen angesprochen. Außer den s-Kanal-Elektronen messen wir jede Menge t-Kanal-Elektronen. Um diese zu eliminieren, schränken wir uns auf den Winkelbereich $-0.9 \leq \theta \leq 0.6$ ein. Weil aufgrund der Spurrekonstruktion im Detektor zwischen den Winkeln 0° und 180° nicht sicher unterschieden werden kann, haben wir $\cos\theta \geq -0.9$ gewählt. Die Bedingung $\cos\theta \leq 0.6$ schränkt den Wert von θ auf Winkel ein, für die der Wirkungsquerschnitt des t-Kanal-Austauschs des Photons sehr klein ist.

Der Wirkungsquerschnitt für den s-Kanal-Austausch des Z^0 ist $\sim 1 + \cos^2\theta$. Um also die Zählrate auf das Intervall $-1 \leq \theta \leq 1$ zu korrigieren, müssen wir die Anzahl der Ereignisse mit

$$\alpha_\theta = \frac{\int_{-1}^{1}(1 + \cos^2\theta \; d\cos\theta)}{\int_{-0.9}^{0.6}(1 + \cos^2\theta \; d\cos\theta)} = 1.4692$$

multiplizieren, wenn wir uns auf das Intervall $-0.9 \leq \theta \leq 0.6$ beschränken. Damit sind wir die t-Kanal-Elektronen los.

4.1.4 Festlegung der Schnittkriterien

Um die Schnittkriterien festzulegen, haben wir uns die Verteilung der Anzahl der Elektronen, Myonen, τ-Leptonen und Hadronen in den Variablen NCHARGED, PCHARGED, E_ECAL, E_HCAL, COS_THET angesehen. Die entsprechenden Histogramme befinden sich in den Abbildungen 5-??.

Wir haben zunächst an Hand der Histogramme die Schnitte festgelegt und dann diese Schnitte auf unsere Monte-Carlo-Datensätze angewendet. a_{ij} sei die Anzahl der Ereignisse des Zerfallskanals j, die dem Zerfallskanal i zugeordnet wurden. Diese Einträge können wir in eine Matrix $A = (a_{ij})$ zusammenfassen.

Ziel unserer Bemühungen ist es, daß alle Ereignisse des Zerfallskanals j auch dem Zerfallskanal j zugeordnet werden, in anderen Worten, daß die Matrix A diagonal ist. Die Diskussion in Abschnitt 4.1.1 hat gezeigt, daß Fehlzuordnungen unvermeidlich sind. Wir wollen also erreichen, daß die Nichtdiagonalelemente möglichst klein werden und die Diagonalelemente gleich der Anzahl der Ereignisse des Zerfallskanals j sind:

$$a_{ii} = N_i \quad \text{und} \quad a_{ij} \approx 0 \text{ für } i \neq j$$

Wie man die Zerfallskanäle an Hand der o.a. Variablen unterscheidet, haben wir in Abschnitt 2.2 ausführlich besprochen. Wir werden diese Diskussion hier nicht wiederholen. Die mit Hilfe der Histogramme festgelegten Schnitte mußten verfeinert werden. Besonders problematisch waren die τ-Ereignisse. Wir haben die Werte der verschiedenen Variablen so lange verändert, bis die Werte a_{ij} zufriedenstellend waren. Für unsere Schnittkriterien ergaben sich die in Tabelle 16 wiedergegebenen Werte.

	NCHARGED	PCHARGED	E_ECAL	E_HCAL	COS_THET
Elektronen	2	≤ 150	≥ 78	≤ 10	-0.9 - 0.6
Myonen	2	75-150	≤ 20	≤ 20	≤ 1
τ-Leptonen	≤ 7	5-70	5-75		
Hadronen	≥ 11	≤ 150	25-75		

Tabelle 16: Schnittkriterien in endgültiger Form

Nach Anwendung der Schnittkriterien erhalten wir folgende Ergebnisse, die wir in Tabelle 17 dargestellt haben.

	e^+e^-	$\mu^+\mu^-$	$\tau^+\tau^-$	$q\bar{q}$
e^+e^-	21889	0	59	0
$\mu^+\mu^-$	0	81184	26	0
$\tau^+\tau^-$	209	1498	59587	278
$q\bar{q}$	0	0	124	90896
Gesamt G_i	33041	94381	79214	98563

Tabelle 17: Anzahl der Ereignisse des Zerfallskanals j, die dem Zerfallskanal i zugeordnet wurden

Zur Vereinfachung der späteren Notation fassen wir diese Einträge in Form einer Matrix zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} 21889 & 0 & 59 & 0 \\ 0 & 81184 & 26 & 0 \\ 209 & 1498 & 59587 & 278 \\ 0 & 0 & 124 & 90896 \end{pmatrix}$$

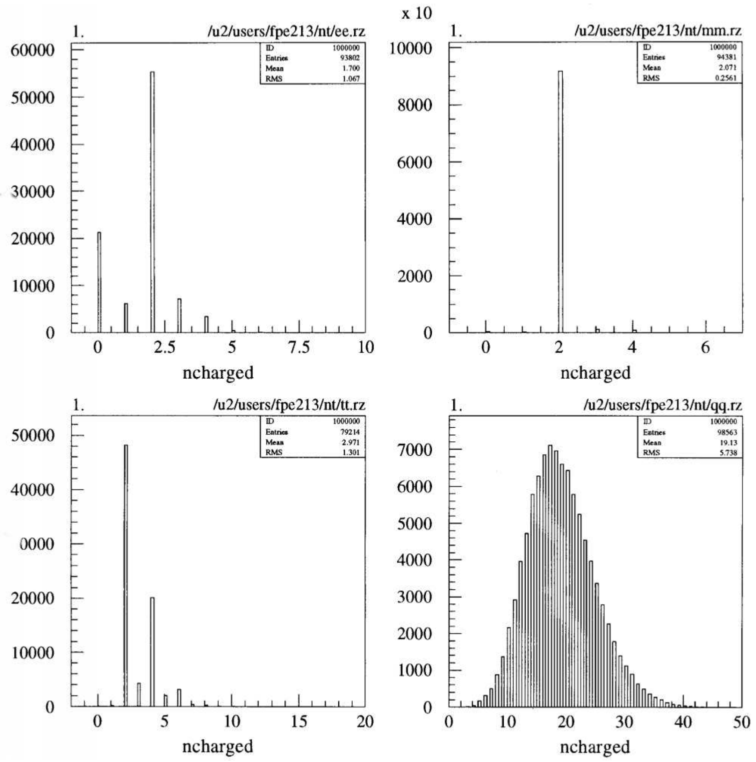

Abbildung 5: NCHARGED

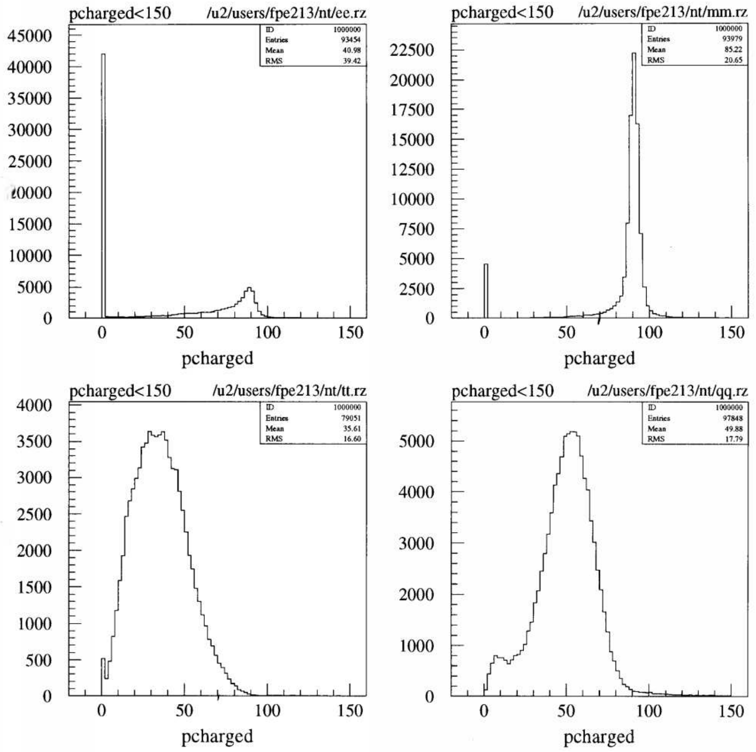

Abbildung 6: PCHARGED

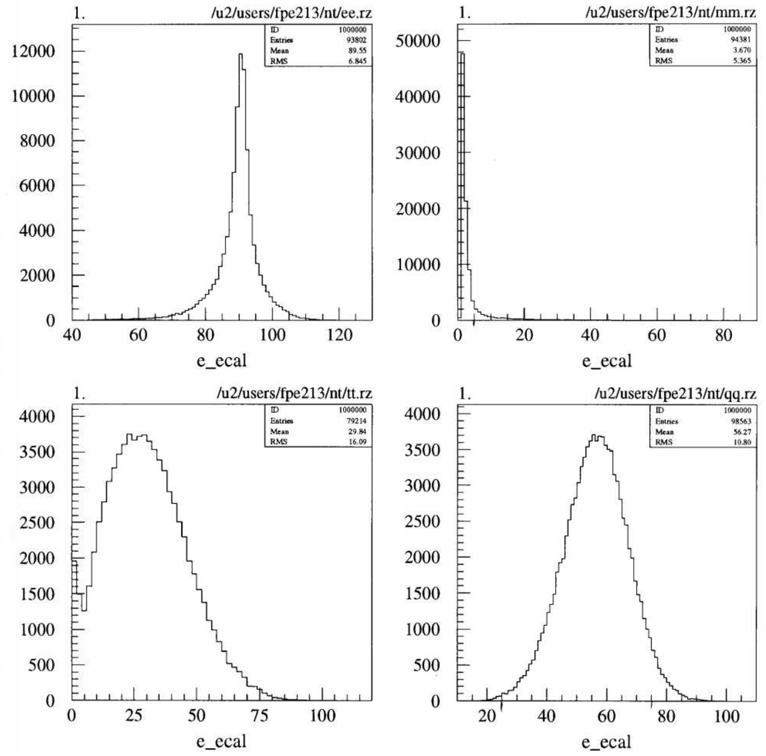

Abbildung 7: E_ECAL

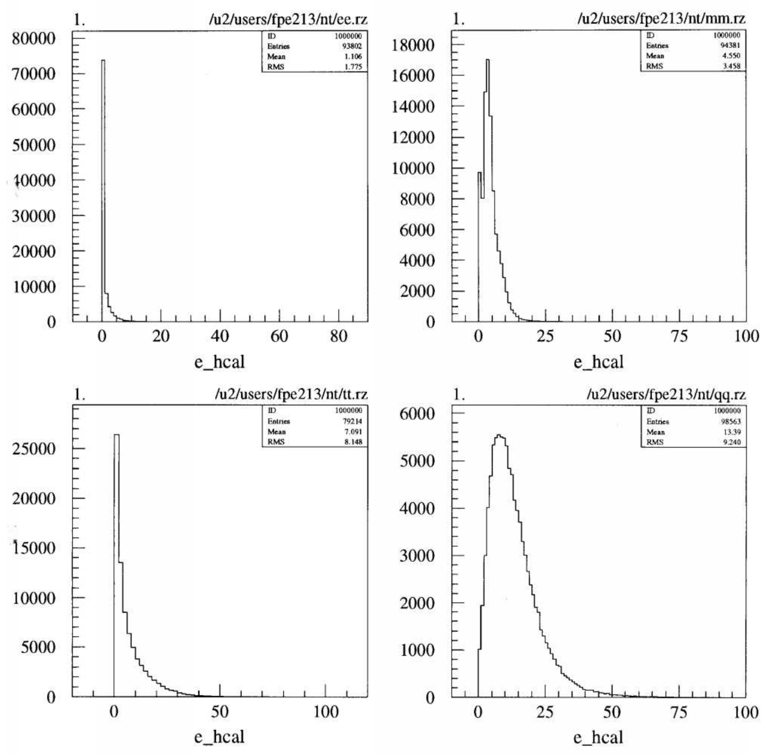

Abbildung 8: E_HCAL

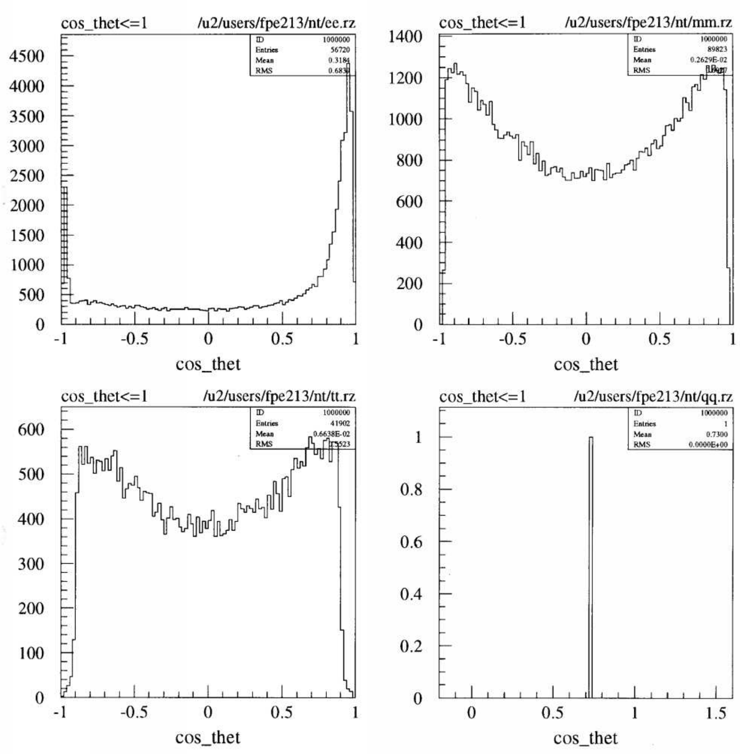

Abbildung 9: COS_THET

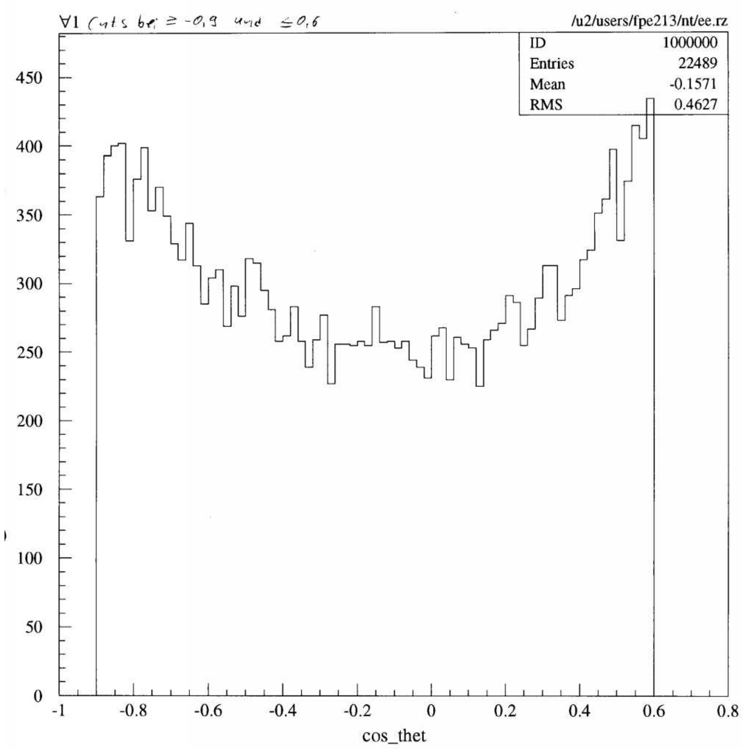

Abbildung 10: COS_THET

4.2 Berechnung der Wirkungsquerschnitte für den Z^0-Zerfall

4.2.1 Die Effizienzmatrix

In der Matrix A dividieren wir die Anzahl der Ereignisse des Zerfallskanals j, die dem Zerfallskanal i zugeordnet wurden, durch die Gesamtzahl der Ereignisse des Zerfallskanals i:

$$e_{ij} = \frac{a_{ij}}{G_i}$$

Mit den Zahlen in Tabelle 17 ergibt sich die Matrix:

$$E := \begin{bmatrix} 0.6624660 & 0 & 0.0007448178 & 0 \\ 0 & 0.8601731 & 0.0003282248 & 0 \\ 0.01365426 & 0.01587184 & 0.7522281 & 0.002820531 \\ 0 & 0 & 0.001565380 & 0.9222122 \end{bmatrix}$$

Sie heißt Effizienzmatrix. Um die folgenden Rechnungen übersichtlicher schreiben zu können, führen wir formal den Vektor

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_e \\ N_\mu \\ N_\tau \\ N_q \end{pmatrix}$$

ein, in welchem wir die Anzahl der Ereignisse für die verschiedenen Zerfälle zusammengefaßt haben. Wenn nun im Versuch $\vec{N}^{\text{mess}}$ Ereignisse gemessen werden, ist der Zusammenhang zwischen der tatsächlichen Anzahl der Ereignisse und der gemessenen gegeben durch

$$\vec{N}^{\text{mess}} = E\vec{N}.$$

Aus den gemessenen Werten erhalten wir die tatsc̈hlichen also durch

$$\vec{N} = E^{-1}\vec{N}^{\text{mess}}.$$

Zur Berechnung der Inversen haben wir das Computeralgebraprogramm MapleV eingesetzt, das uns für die Inverse

$$E^{-1} := \begin{bmatrix} 1.509542239 & 0.00002757994810 & -0.001494693083 & 0.000004571429629 \\ 0.00001045576182 & 1.162566060 & -0.0005072839327 & 0.000001551497646 \\ -0.02740123555 & -0.02453053337 & 1.329430296 & -0.004065983252 \\ 0.00004651136267 & 0.00004163857986 & -0.002256599507 & 1.084356035 \end{bmatrix}$$

ausrechnete. Die Details der Berechnung haben wir in Anhang A wiedergegeben, damit auch nachvollziehbar ist, was wir gemacht haben.

4.2.2 Berechnung des Fehler der Effizienzmatrix und ihrer Inversen

Um Fehler zu den noch zu bestimmenden Wirkungsquerschnitten und den daraus abgeleiteten Größen angeben zu können, benötigen wir den Fehler der Effizienzmatrix und ihrer Inversen. Dieser ergibt sich natürlich aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Zu beachten ist jedoch, daß die Größe a_{ij} sowohl im Zähler wie auch im Nenner von e_{ij} auftaucht. Zähler und Nenner sind also korreliert. Daß man im Fehlerfortpflanzungsgesetz die Varianzen addiert, gilt aber nur für unkorrelierte Größen. Ein Ausweg aus diesem Dilemma ist, den Nenner aufzuspalten:

$$G_i = a_{ij} + r_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ij} + r_{ij}}$$

Die Fehler sind dann gegeben durch (die Indizes i, j haben wir der Einfachheit halber weggelassen, man muß sie sich dazudenken)

$$\Delta e = \sqrt{\left(\frac{\partial e}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial r}\Delta r\right)^2} \quad \rightarrow \quad \Delta e = \frac{1}{N^2}\sqrt{r^2(\Delta a)^2 + n^2(\Delta r)^2},$$

und die in die Rechnung eingehenden Fehler der Zälraten sind

$$\Delta N = \sqrt{N}, \quad \Delta n = \sqrt{n}, \quad \Delta r = \sqrt{(\Delta N)^2 + (\Delta n)^2}.$$

Für die Rechnungen haben wir MapleV bemüht. Die Einzelheiten sind wieder in Anhang A zu finden. Wir geben das Endergebnis an:

$$\Delta E = \begin{bmatrix} 0.004936258 & 0 & 0.00009693095 & 0 \\ 0 & 0.003842002 & 0.00006435961 & 0 \\ 0.0004361738 & 0.0004069193 & 0.003619339 & 0.0001689268 \\ 0 & 0 & 0.0001404655 & 0.004079571 \end{bmatrix}$$

Den Fehler der Inversen zu berechnen, ist ungleich schwieriger. Wir wollten uns auf keine Näherungen einlassen und haben deshalb den exakten Weg beschritten. Dazu betrachten wir noch einmal die Effizienzmatrix E. Von den insgesamt 16 Einträgen sind 6 gleich 0. Wir ersetzen die Zahlen $\neq 0$ durch Variablen:

$$E := \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & e_{13} & 0 \\ 0 & e_{22} & e_{23} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ 0 & 0 & e_{43} & e_{44} \end{bmatrix}$$

Nun invertieren wir diese Matrix. Nicht erst die Zwischenschritte der Rechnungen, sondern schon das Hinschreiben des Ergebnisses ist in übersichtlicher Form nicht mehr möglich, weil die Ausdrücke zu lang werden. Wir berechnen den Fehler für jeden Eintrag in der Inversen nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz. Die Matrixeinträge der Inversen sind Funktionen der Einträge der Effizienzmatrix:

$$e_{ij}^{-1} = f_{ij}(e_{11}, \ldots, e_{44})$$

Der Fehler ist dann gegeben durch

$$\Delta e_{ij}^{-1} = \sqrt{\sum_{k,\ell=1}^{4} \left(\frac{\partial f_{ij}(e_{11}, \ldots, e_{44})}{\partial e_{k\ell}}\Delta e_{k\ell}\right)^2}.$$

Die Werte für $\Delta e_{k\ell}$ hatten wir schon ausgerechnet. Die oben auftretenden Ableitungen und die restlichen Berechnungen erledigt MapleV. Die Einzelheiten sind in Anhang A gegeben. Das Ergebnis fassen wir übersichtlich in Matrixform zusammen:

$$\Delta E^{-1} = \begin{bmatrix} 0.01124833958 & 0.000003668565695 & 0.0001949753308 & 0.0000006564827893 \\ 0.000002079845941 & 0.005192695950 & 0.00009952676853 & 0.0000003183379732 \\ 0.0009084439334 & 0.0006492072135 & 0.006396766587 & 0.0002449666261 \\ 0.000004454114498 & 0.000003899827754 & 0.0002030281249 & 0.004796873912 \end{bmatrix}$$

4.2.3 Auswertung der Opaldaten und Berechnung der Wirkungsquerschnitte

Wir haben uns Datensatz DATEN1 ausgesucht. Für verschiedene Schwerpunktsenergien $\sqrt{s_i}$ haben wir die Anzahl der Ereignisse in den Zerfallskanälen des Z^0 gemessen. Die Schwerpunktsenergie, bei der man messen will, sucht man sich dadurch aus, daß man einen Schnitt in der Variablen E_LEP macht. Unsere Ergebnisse sind in Tabelle 18 dargestellt.

$\sqrt{s_i}$ [GeV]	88.47	89.46	90.22	91.22	91.97	92.96	93.71
e^+e^-	155	230	251	2638	379	154	206
$\mu^+\mu^-$	125	219	311	3587	626	241	303
$\tau^+\tau^-$	129	176	225	3175	511	227	241
$q\bar{q}$	3354	5002	7095	86931	14394	6181	6843

Tabelle 18: Anzahl der Ereignisse in den Zerfallskanälen des Z^0

Die Anzahl der Zerfälle (bei einer festen Energie) fassen wir zum Vektor $\vec{N}^{\text{mess}}$ zusammen. Die tatsächliche Anzahl der Zerfälle ist dann $\vec{N} = E^{-1}\vec{N}^{\text{mess}}$. Die Luminosität ist die Proportionalitätskonstante zwischen Zählrate und Wirkungsquerschnitt:

$$N_i = \mathcal{L}\sigma_i$$

Aufgelöst nach dem Wirkungsquerschnitt erhalten wir somit

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\mathcal{L}}\vec{N} = \frac{1}{\mathcal{L}}E^{-1}\vec{N}^{\text{mess}}.$$

Die Vektorschreibweise ist selbsterklärend. Die Luminositäten bei den verschiedenen Schwerpunktsenergien für DATEN1 finden wir in [FP]. Wir haben sie in Tabelle 19 zusammengefaßt. Die Luminositäten sind in nb^{-1} angegeben. Alle Wirkungsquerschnitte in diesem Abschnitt haben folglich die Einheit nb.

$\sqrt{s_i}$ [GeV]	88.47	89.46	90.22	91.22	91.97	92.96	93.71
$\mathcal{L}$ [nb^{-1}]	675.859	543.627	419.776	3122.204	639.838	479.240	766.838
$\Delta\mathcal{L}$ [nb^{-1}]	5.721257	4.830643	3.974844	22.31760	5.577354	4.481870	6.497519

Tabelle 19: Luminositäten bei den verschiedenen Schwerpunktsenergien für DATEN1

Wir müssen noch 2 Korrekturen berücksichtigen. Wir hatten in Abschnitt 4.1.2 gesehen, daß bestimmte Ereignisse von vornherein aussortiert werden, und hatten dort die sogenannte Pre-Cut-Korrektur berechnet. Wir tragen dem Rechnung und multiplizieren die tatsächliche Anzahl der Ereignisse mit der Korrekturmatrix:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\mathcal{L}}\,\alpha\,E^{-1}\vec{N}^{\text{mess}}$$

Die zweite Korrektur ist subtiler. Wir hatten uns von Anfang an gefragt, warum in aller Welt beim Wirkungsquerschnitt die sogenannten Strahlungskorrekturen eine Rolle spielen, als ob das Teilchen sich sagt, es wolle bei seinem Zerfall nur Feynman-Graphen auf tree-level benutzen. Durch Subtraktion der Strahlungskorrektur vom Wirkungsquerschnitt korrigieren wir diesen “in die falsche Richtung”. Wir wollen die Zerfallsbreite und Masse des Z^0 über einen Breit-Wigner-Fit bestimmen. Die Theorie der Breit-Wigner-Resonanz ist aber klassische Quantenmechanik. Damit der Fit akzeptable Ergebnisse liefert, müssen wir die Strahlungskorrekturen abziehen. Die Strahlungskorrekturen wurden uns auf einem getrennten Blatt ausgeteilt und finden sich nicht in der Versuchsanleitung oder dem FP-Skript. Wir haben sie in Tabelle 20 zusammengefaßt.

Die endgültige Formel zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts nimmt dann die Form

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\mathcal{L}}\,\alpha\,E^{-1}\vec{N}^{\text{mess}} + \vec{S}$$

an, wobei wir mit $\vec{S}$ die Spalte von Tabelle 20 bei der entprechenden Schwerpunktsenergie bezeichnet haben.

$\sqrt{s_i}$ [GeV]	88.47	89.46	90.22	91.22	91.97	92.96	93.71
e^+e^-	0.09	0.20	0.36	0.52	0.22	- 0.01	-0.08
$\mu^+\mu^-$	0.09	0.20	0.36	0.52	0.22	- 0.01	- 0.08
$\tau^+\tau^-$	0.09	0.20	0.36	0.52	0.22	- 0.01	- 0.08
$q\bar{q}$	2.0	4.3	7.7	10.8	4.7	- 0.2	- 1.6

Tabelle 20: Strahlungskorrekturen für Leptonen und Hadronen

Wir haben für 7 Schwerpunktsenergien dieselben Rechnungen durchzuführen. Der Gedanke liegt nahe, die Daten in Matrixform zu organisieren. Jede Spalte der 4×7-Matrix stellt dann einen Vektor dar, und den Zeilen des Vektors entsprechen der Zerfall in e^+e^-, $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$, $q\bar{q}$. Wir stellen die Zählraten in Tabelle 18 als Matrix dar:

$$n_{ij} = \begin{bmatrix} 155 & 230 & 251 & 2638 & 379 & 154 & 206 \\ 125 & 219 & 311 & 3587 & 626 & 241 & 303 \\ 129 & 176 & 225 & 3175 & 511 & 227 & 241 \\ 3354 & 5002 & 7095 & 86931 & 14394 & 6181 & 6843 \end{bmatrix}$$

Entsprechen schreiben wir auch die Daten in Tabelle 20 als Matrix:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} 0.09 & 0.20 & 0.36 & 0.52 & 0.22 & -0.01 & -0.08 \\ 0.09 & 0.20 & 0.36 & 0.52 & 0.22 & -0.01 & -0.08 \\ 0.09 & 0.20 & 0.36 & 0.52 & 0.22 & -0.01 & -0.08 \\ 2.0 & 4.3 & 7.7 & 10.8 & 4.7 & -0.2 & -1.6 \end{bmatrix}$$

Der Wirkungsquerschnitt berechnet sich dann gemäß (über k ist als stummer Index zu summieren)

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\mathcal{L}_j}\alpha_i e_{ik}^{-1} n_{kj} + s_{ij}.$$

Setzt man die entsprechenden Zahlenwerte ein, erhält man

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0.4588 & 0.8804 & 1.322 & 1.878 & 1.172 & 0.5065 & 0.3519 \\ 0.3177 & 0.6961 & 1.272 & 1.935 & 1.425 & 0.6092 & 0.4066 \\ 0.3712 & 0.6690 & 1.129 & 2.019 & 1.394 & 0.6921 & 0.3801 \\ 7.459 & 14.42 & 26.29 & 41.43 & 29.45 & 13.99 & 8.217 \end{bmatrix}.$$

Der Fehler berechnet sich nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu (über k ist wieder zu summieren)

$$\Delta\sigma_{ij} = \sqrt{\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial L_j}\right)^2 (\Delta L_j)^2 + \left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial e_{ik}^{-1}}\right)^2 (\Delta e_{ik}^{-1})^2 + \left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial n_{kj}}\right)^2 (\Delta n_{kj})^2}$$

bzw. nach Ausführen der Differentiationen

$$\Delta\sigma_{ij} = \sqrt{\left(\frac{1}{L_j^2}\alpha_i e_{ik}^{-1} n_{kj}\right)^2 (\Delta L_j)^2 + \left(\frac{1}{L_j}\alpha_i n_{kj}\right)^2 (\Delta e_{ik}^{-1})^2 + \left(\frac{1}{L_j}\alpha_i e_{ik}^{-1}\right)^2 (\Delta n_{kj})^2}.$$

Einsetzen von Zahlenwerten liefert uns die Fehler der Wirkungsquerschnitte:

$$\Delta\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0.0300 & 0.0457 & 0.0620 & 0.0302 & 0.0504 & 0.0422 & 0.0306 \\ 0.0205 & 0.0339 & 0.0527 & 0.0266 & 0.0497 & 0.0405 & 0.0284 \\ 0.0312 & 0.0463 & 0.0691 & 0.0446 & 0.0706 & 0.0596 & 0.0387 \\ 0.108 & 0.175 & 0.294 & 0.278 & 0.318 & 0.233 & 0.151 \end{bmatrix}$$

4.3 Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie und Bestimmung des Weinberg-Winkels

Zählt man (z.B. für den Zerfall in Myonen), wie viele μ^+ in die Vorwärtshemisphäre ($0° \leq \theta \leq 90°$) gestreut werden und wieviele in die Rückwärtshemisphäre ($90° \leq \theta \leq 180°$), so stellt man fest, daß mehr Teilchen nach vorne gestreut werden. Diese "Asymmetrie" möchte man auch quantitativ erfassen, und man definiert die sogenannte Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

$$A_{FB} = \frac{V - R}{V + R},$$

wobei wir zur Abkürzung

$$V = \int_0^1 \frac{d\sigma}{d\cos\theta} d\cos\theta, \qquad R = \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d\cos\theta} d\cos\theta$$

gesetzt haben. Theoretisch rechnet man für die Asymmetrie

$$A_{FB} \simeq 3(1 - 4\sin^2\theta_w)^2 \tag{3}$$

am Resonanzmaximum aus. Diese Beziehung ermöglicht uns, den Weinberg-Winkel θ_w zu bestimmen.

Die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie berechnen wir mit den Myonereignissen. Für den Zerfall in τ-Leptonen und in $q\bar{q}$ ist der θ (Winkel zwischen einlaufendem Positron und auslaufendem positiven Teilchen) nicht definiert, weil es in diesem Fall mehrere positive Endprodukte gibt. Bei den Elektronen geht die Bhabha-Streuung in den Wirkungsquerschnitt mit ein und müßte berücksichtigt werden. Mit Myonen ist alles unproblematischer.

In Tabelle 21 haben wir unsere Ergebnisse zusammengestellt. Für jede Schwerpunktsenergie haben wir die Anzahl der μ^+ notiert, die in die Vorwärts- bzw. Rückwärtshemisphäre gestreut wurden, und haben mit diesen Zahlenwerten die Asymmetrie A_{FB} und ihren Fehler berechnet.

$\sqrt{s_i}$ [GeV]	88.47	89.46	90.22	91.22	91.97	92.96	93.71
V	50	109	127	1699	306	133	164
R	72	105	173	1751	301	94	135
A_{FB}	-0.1803	0.0187	-0.1533	-0.0151	0.0082	0.1718	0.0969
ΔA_{FB}	0.0891	0.0683	0.0571	0.0170	0.0406	0.0654	0.0576

Tabelle 21: Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie beim Zerfall in Myonen

Um den Weinbeger-Winkel auszurechnen, benutzen wir Gleichung 3, die nur im Bereich des Resonanzmaximums gültig ist. Wir greifen dem Ergebnis unserer Untersuchungen etwas vor und schlagen in [PDG] die Masse des Z^0 nach:

$$m_Z = 91.187 \pm 0.007 \text{ GeV}$$

Für die Berechnung von θ_w nehmen wir A_{FB} bei derjenigen Schwerpunktsenergie, die der Z^0-Masse am nächsten kommt, d.h, $\sqrt{s_i} = 91.22$ GeV. Wir haben also

$$A_{FB} = -0.0151 \pm 0.0170.$$

Zwei Sachen springen uns sofort ins Auge. Erstens, dieser Wert is negativ. Nach Gleichung 3 erwarten wir aber eine positive Größe. Zweitens, der Fehler der Asymmetrie ist größer als die Asymmetrie selbst.

Wir haben alle Zwischenschritte, die zu dem negativen Wert führten, noch einmal überprüft. Die Definition des Winkels θ, der in die Definition der Asymmetrie eingeht, ist dieselbe wie diejenige in Tabelle 15, wo wir die Variablen eingeführt haben. Falls wir den Angaben im Skript vertrauen können, ist der Fehler woanders zu suchen. Möglich ist, daß wir beim Notieren der Ergebnisse $\cos\theta \geq 0$ und $\cos\theta \leq 0$ vertauscht haben. Ich halte das für unwahrscheinlich, aber eine andere Erklärung fällt mir nicht ein, außer der trivialen, daß nämlich der Asymmetriewert von $A_{FB} \approx 0.015$, der zum richtigen Weinberg-Winkel führt, innerhalb der 2σ Fehlergrenze liegt. Daß sich also genau der negative Wert der erwarteten Asymmetrie ergibt, wäre bloßer Zufall.

Wir nehmen an, das Minuszeichen könne man irgendwie erklären, und rechnen mit dem Wert

$$A_{FB} = 0.0151 \pm 0.0170.$$

weiter. Löst man Gleichung 3 nach $\sin^2\theta_w$ auf, so erhalten wir

$$\sin^2\theta_w = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{A_{FB}}.$$

Einsetzen des Wertes für A_{FB} ergibt

$$\sin^2\theta_w = 0.23 \pm 0.13.$$

Dieser Wert zeigt blendende Übereinstimmung mit dem Literaturwert ([PDG], p. 150) von

$$\sin^2\theta_w = 0.23124 \pm 0.00017.$$

Wir wollen den Weinberg-Winkel auch aus unseren Monte-Carlo-Daten für Myonen berechnen. Wir erhalten die Werte $V = 41231$ und $R = 40782$. Damit berechnet sich die Asymmetrie zu

$$A_{FB} = 0.00547 \pm 0.00347$$

und daraus der Weinberg-Winkel

$$\sin^2\theta_w = 0.239 \pm 0.076.$$

Auch in diesem Fall haben wir gute Übereinstimmung mit dem Literaturwert.

4.4 Überprüfung der Lepton-Universalität

An dieser Stelle scheint die Aufgabenstellung in [Skr] falsch oder mißverständlich formuliert worden zu sein. Wir sollen die Wirkungsquerschnitte am Peak miteinander vergleichen. Diese Wirkungsquerschnitte jedoch werden wir erst in Abschnitt 5.3 bestimmen.

Natürlich könnte man als Wirkungsquerschnitt am Peak einfach den Eintrag in der vierten Spalte von σ_{ij} nehmen, da $\sqrt{s} = 91.22$ GeV ungefähr der Z^0-Masse entspricht. Der Wert wäre aber nicht zuverlässig, und zudem könnten wir keinen Fehler angeben. Wir haben also die Diskussion der Lepton-Universalität in Abschnitt 5.7 verlegt.

5 Bestimmung der Zerfallsbreiten und der Z^0-Masse

5.1 Breit-Wigner-Resonanz

In Abschnitt 4.2.3 hatten wir die Wirkungsquerschnitte σ_{ij} für die verschiedenen Zerfallskanäle des Z^0 bestimmt. Nach der Theorie erwarten wir für den Zerfall in $X\bar{X}$ eine Resonanzkurve der Form

$$\sigma_X = \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{s\Gamma_e\Gamma_X}{(s-M_Z^2)^2 + s^2\Gamma_Z^2/M_Z^2}, \tag{4}$$

die Breit-Wigner-Resonanz heißt. Wir haben für die 4 Zerfallskanäle bei jeweils 7 Energien den Wirkungsquerschnitt bestimmt. Tragen wir nun für jeden Zerfallsmodus unsere 7 Meßpunkte in einen Graphen ein, so erwarten wir eine Kurve der Form, wie sie durch Gleichung 4 gegeben ist. Das Ergebnis ist in Abbildung 11 dargestellt.

Die Resonanzkurve ist durch 3 Parameter vollständig beschrieben, nämlich

1. dem maximalen Wirkungsquerschnitt: σ^{peak},
2. der x-Koordinate des Schwerpunkts: M_Z,
3. der Breite der Kurve: Γ_Z.

Wir suchen nun diejenige Kurve, die mit den gemessenen Datenpunkten "bestmögliche" Übereinstimmung zeigt. Was heißt bestmöglich? Diese Frage beantworten wir in Abschnitt 5.2.

5.2 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Gegeben seien

1. eine Menge von Werten x_i,
2. dazugehörige Werte y_i mit Fehler σ_i,
3. eine Funtion $f(x;a)$, die für gegebenes x_i den Wert y_i vorhersagt, wobei a ein freier Parameter ist.

Wir suchen denjenigen Wert für den Parameter a, für den die Summe der Abstandsquadrate unserer Meßpunkte von der Kurve minimal wird, d.h. die Funktion

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - f(x_i;a)}{\sigma_i}\right]^2$$

soll minimiert werden. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Ableitung nach dem freien Parameter a verschwinden soll:

$$\frac{d}{da}\chi^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{df(x_i;a)}{da}[y_i - f(x_i;a)] = 0$$

Mit dieser Gleichung können wir a und seinen Fehler (gegeben durch die Wurzel aus der Varianz) bestimmen. Hängt die Funktion f von mehreren Parametern ab, müssen die Ableitungen nach jedem dieser Parameter verschwinden, und wir erhalten ein Gleichungssystem, aus dem wir die Parameter bestimmen können.

Das Program, das wir für unseren Fit benutzen, rechnet keine analytischen Ableitungen aus, sondern nimmt numerische Verfahren, um χ^2 zu minimieren.

Um zu beurteilen, wie gut unser Fit ist, betrachten wir die Verteilung der Größe χ^2. Man kann zeigen ([Ba], p.108), daß sie gegeben ist durch

$$P(\chi^2;n) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}\chi^{n-2}e^{-\chi^2/2}.$$

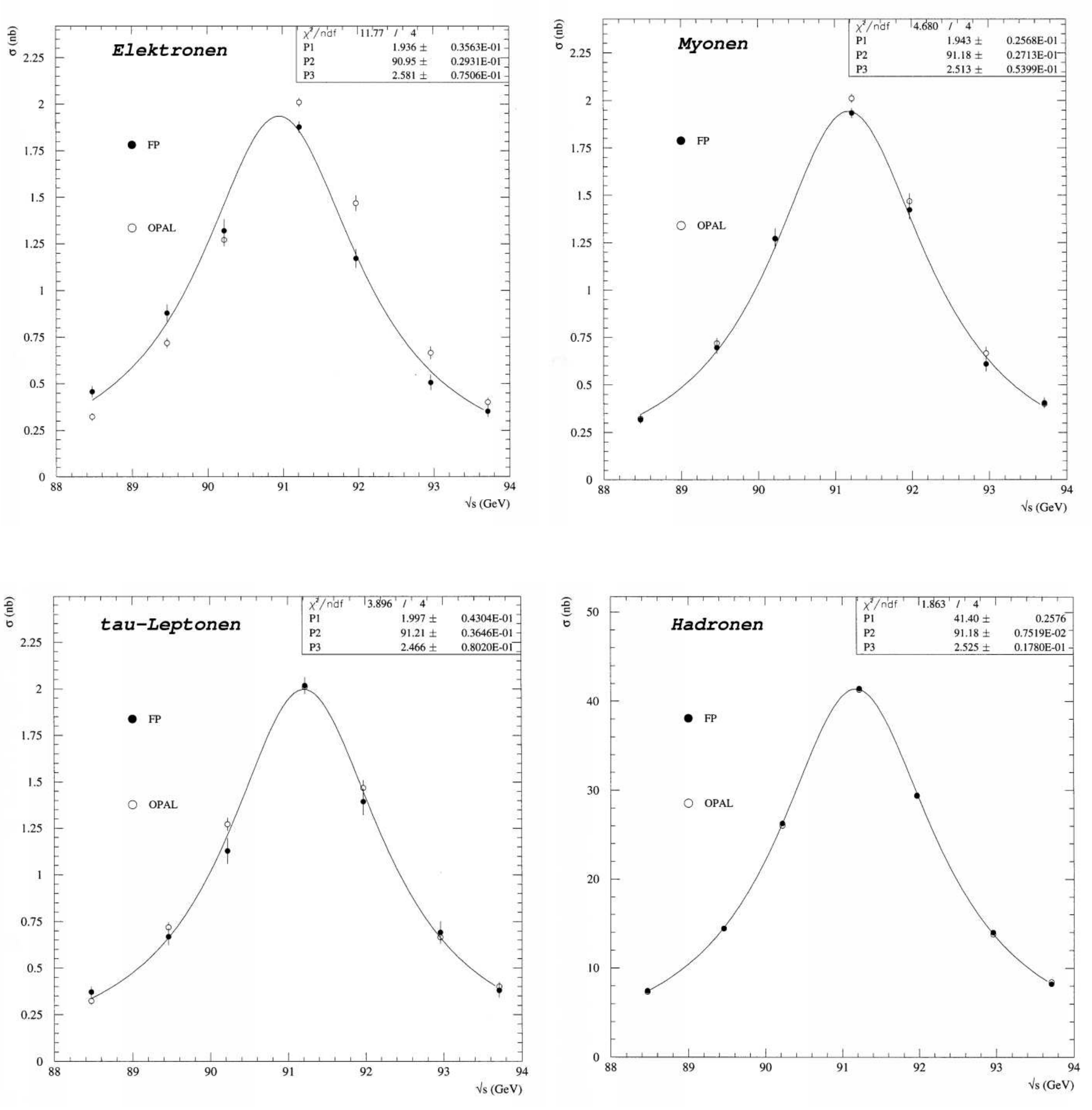

Abbildung 11: Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen Zerfallskanäle des Z^0

n ist die Anzahl der Freiheitsgrade, d.h. Anzahl der Meßpunkte minus Anzahl der Fitparameter. Der Mittelwert der χ^2-Verteilung ist n und ihre Varianz ist $2n$. Die Verteilung kann nur für sehr großes n mit hinreichender Genauigkeit als Gauß-förmig angesehen werden. Wir haben also Probleme, eine Abweichung unseres χ^2 vom Mittelwert richtig zu beurteilen.

Für kleine n ist es besser, $\sqrt{2\chi^2}$ zu betrachten, weil die Verteilung dieser Größe mit hinreichender Genauigkeit als Gauß-verteilt angesehen werden kann. Der Mittelwert der Verteilung ist $\sqrt{2n-1}$ und die Varianz ist 1. Kleines n heißt aber trotzdem $n \geq 30$, und in unserem Fall haben wir nur 7 Meßpunte und 3, Parameter, also $n = 4$.

Um die Güte unseres Fits beurteilen zu können, betrachten wir die Größe

$$\mathcal{P}(\chi^2; n) = \int_{\chi^2}^{\infty} P(\chi^2; n) d\chi^2.$$

Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß die Funtion $f(x; a)$, welche die gesuchte Kurve beschreibt, für die Summe der Abstandsquadrate einen Wert liefert, der größer oder gleich unserem χ^2 ist. Ist $\mathcal{P}(\chi^2; n)$ klein, ist es sehr unwahrscheinlich, daß der "richtige" Fit diesen Wert für χ^2 liefert, der Fit ist also schlecht. Als Faustregel kann man sich merken, $\mathcal{P}(\chi^2; n) \geq 10\%$ heißt, daß der Fit die Datenpunkte mit zufriedenstellender Genauigkeit beschreibt. Ist allerdings $\mathcal{P}(\chi^2; n) \approx 1$, ist dies ein deutlicher Hinweis darauf, daß die Fehler zu groß gewählt worden sind. Der Fit sagt dann nicht sehr viel aus.

5.3 Fit an die Datenpunkte

Das Ergebnis unseres Fits ist in Abbildung 11 eingezeichnet. Die Werte für die Parameter haben wir in Tabelle 22 zusammengestellt. Um beurteilen zu können, wie gut uns der Fit gelungen ist, haben wir auch die Werte für χ^2 eingetragen.

	$Z^0 \to e^+e^-$	$Z^0 \to \mu^+\mu^-$	$Z^0 \to \tau^+\tau^-$	$Z^0 \to q\bar{q}$
M_Z [GeV]	90.95 ± 0.029	91.18 ± 0.027	91.21 ± 0.036	91.18 ± 0.008
Γ_Z [GeV]	2.581 ± 0.075	2.513 ± 0.054	2.466 ± 0.080	2.525 ± 0.018
σ^{peak} [nb]	1.936 ± 0.036	1.943 ± 0.026	1.997 ± 0.043	41.40 ± 0.258
χ^2	11.77	4.680	3.896	1.863
$\mu \pm \sigma$	4 ± 2.83	4 ± 2.83	4 ± 2.83	4 ± 2.83
$\sqrt{2\chi^2}$	4.85	3.06	2.79	1.93
$\mu \pm \sigma$	2.65 ± 1	2.65 ± 1	2.65 ± 1	2.65 ± 1
$\mathcal{P}(\chi^2; 4)$	1.91%	32.2%	42.0%	76.1%

Tabelle 22: Ergebnisse des Breit-Wigner-Fits

In Abschnitt 5.2 hatten wir dargelegt, daß es für kleine n wenig Sinn macht, χ^2 direkt zu betrachten. Wir haben trotzdem aus Neugierde die Werte berechnet. Wir sehen, daß für Elektronen unser χ^2 um 2.75σ vom Mittelwert abweicht. Der Fit ist als schlecht zu beurteilen. In den anderen 3 Fällen liegt χ^2 innerhalb der Fehlergrenzen vom Mittelwert. Legt man die Werte für $\sqrt{2\chi^2}$ zugrunde, kommt man zum gleichen Ergebnis.

Wir betrachten nun die entscheidende Größe, nach der wir unseren Fit beurteilen werden, nämlich $\mathcal{P}(\chi^2; 4)$. Der Wert für die Elektronen liegt deutlich unter 10%, der Fit ist also schlecht. Für die anderen 3 Fälle liegt $\mathcal{P}(\chi^2; 4)$ deutlich über 10%, wir sind mit dem Ergebnis zufrieden. Der Wert für die Quarks ist 76.1%, und dies ist weit genug von der 1 entfernt.

5.4 Zerfallsbreite und Masse des Z^0

Der Fit für die Elektronen ist so schlecht, daß wir beschlossen haben, ihn aus den weiteren Berechnungen herauszunehmen. Als die von uns ermittelte Zerfallsbreite geben wir das gewichtete Mittel

$$\Gamma_Z = \frac{\sum \Gamma_i/\sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2} \qquad \text{mit Fehler} \qquad \Delta\Gamma_Z = \sqrt{\frac{1}{\sum 1/\sigma_i^2}}$$

an, und wenn wir die Werte aus Tabelle 22 einsetzen, erhalten wir

$$\Gamma_Z = 2.521 \pm 0.017 \text{ GeV}.$$

Der Wert $\Gamma_Z = 2.490$ GeV aus [PDG] liegt 1.8σ von unserem Wert entfernt. Die Übereinstimmung ist zufriedenstellend.

Für die Masse des Z^0 bilden wir ebenfalls das gewichtete Mittel aus den 3 letzten Werten und erhalten

$$M_Z = 91.18 \pm 0.008 \text{ GeV}$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem Wert $M_Z = 91.187 \pm 0.007$ GeV aus [PDG].

5.5 Berechnung der partiellen Zerfallsbreiten aus den Wirkungsquerschnitten

Wir hatten in Abschnitt 3.3 gesehen, wie man mit Gleichung 2 aus den partiellen Zerfallsbreiten die Wirkungsquerschnitte berechnet. Wir gehen nun den umgekehrten Weg. Lösen wir Gleichung 2 nach Γ_X auf, so erhalten wir

$$\Gamma_X = \frac{M_Z^2}{12\pi} \frac{\Gamma_Z^2}{\Gamma_e}\, \sigma_X^{\text{peak}}. \tag{5}$$

Auch hier ist zu beachten, daß alle Formeln in natürlichen Einheiten geschrieben sind. Um von GeV^{-2} in cm^2 umzurechnen, benutzen wir $1\ \text{GeV}^{-2} = 0.3894$ mb.

Wie wir sehen, müssen wir mit der Bestimmung von Γ_e anfangen. Alle anderen Partialbreiten lassen sich dann berechnen. Bringen wir Γ_e auf die linke Seite, erhalten wir

$$\Gamma_e^2 = \frac{M_Z^2}{12\pi}\, \Gamma_Z^2\, \sigma_e^{\text{peak}},$$

und wenn wir die von uns in den vorigen Abschnitten bestimmten Werte $M_Z = 91.18 \pm 0.008$ GeV, $\Gamma_Z = 2.521 \pm 0.017$ GeV, $\sigma_e^{\text{peak}} = 1.936 \pm 0.036$ nb einsetzen, erhalten wir

$$\Gamma_e = 83.5 \pm 1.7\ \text{MeV}.$$

Es ist bedauerlich, daß die Größe Γ_e, die in alle weiteren Rechnungen eingeht, aus einem so schlechten Fit mit $\mathcal{P}(\chi^2;4)$=1.91% stammt. Wir können es leider nicht ändern. Nun rechnen wir mit Gleichung 5 alle restlichen Partialbreiten aus. Die Ergebnisse haben wir in Tabelle 23 zusammengefaßt. Zum Vergleich haben wir die von uns in Abschnitt 3.3 berechneten Werte und diejenigen aus [PDG] dazugeschrieben.

	$Z^0 \to e^+e^-$	$Z^0 \to \mu^+\mu^-$	$Z^0 \to \tau^+\tau^-$	$Z^0 \to q\bar{q}$
Γ [MeV]	83.5 ± 1.7	83.6 ± 2.2	85.9 ± 3.0	1780 ± 67
Γ^{theo} [MeV]	83.4	83.4	83.4	1674.4
Γ^{PDG} [MeV]	83.83	83.83	83.83	1740.7

Tabelle 23: Zerfallsbreiten aus Versuch, Theorie und CERN

Wir sehen gute Übereinstimmung mit den Werten aus [PDG]. Der schlechte Fit für die Elektronen hat sich nicht im Ergebnis niedergeschlagen.

5.6 Anzahl der leichten Neutrinogenerationen

Die Gesamtbreite des Z^0-Zerfalls setzt sich zusammen aus

$$\Gamma_Z = \Gamma_e + \Gamma_\mu + \Gamma_\tau + n \cdot \Gamma_\nu + \Gamma_{\text{had}} + \Gamma_{\text{unbekannt}}. \tag{6}$$

Wenn wir davon ausgehen dürfen, daß von den noch nicht entdeckten Teilchen leichte Neutrinos (d.h. $m_\nu \leq M_Z/2$) die einzigen sind, die an das Z^0 koppeln, können können wir $\Gamma_{\text{unbekannt}} = 0$ setzen und Gleichung 6 nach n auflösen:

$$n = \frac{\Gamma_Z - \Gamma_e - \Gamma_\mu - \Gamma_\tau - \Gamma_{\text{had}}}{\Gamma_\nu}$$

Mit den Werten aus Tabelle 23 ergibt sich

$$n = 2.91 \pm 0.40,$$

wobei wir den Wert $\Gamma_\nu = 167.6$ MeV, den wir im Experiment (natürlich) nicht messen konnten, der Versuchsanleitung entnommen haben. Wir wollten den von uns ausgerechneten Wert nicht benutzen, weil er die Feynman-Graphen höherer Ordnung nicht enthält. Den Wert in [PDG] dürfen wir nicht nehmen, weil Γ(invisible)/3 natürlich auch die Beiträge des vierten Neutrinos enthielte, wenn es ihn denn gäbe.

Wie wahrscheinlich oder unwahrscheinlich ist ein viertes Neutrino? Wir nehmen an, daß n Gauß-verteilt ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß $n \leq 2$ oder $n \geq 4$ ist, ist dann gegeben durch

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx + \int_{4}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = 1.47\%,$$

wobei wir $\mu = 2.94$ und $\sigma = 0.40$ eingesetzt haben. Wir können also mit ziemlicher Sicherheit sagen, daß es kein weiteres Neutrino mit einer Masse $\leq M_Z/2$ gibt, das an das Z^0 koppelt.

5.7 Lepton-Universalität

In Tabelle 24 haben wir die Wirkungsquerschnitte am Peak aufgelistet.

	$Z^0 \to e^+e^-$	$Z^0 \to \mu^+\mu^-$	$Z^0 \to \tau^+\tau^-$	$Z^0 \to q\bar{q}$
σ^{peak} [nb]	1.936 ± 0.036	1.943 ± 0.026	1.997 ± 0.043	41.40 ± 0.258
$\sigma_i/\sigma_{\text{had}}$	4.68 ± 0.09 %	4.69 ± 0.07 %	4.82 ± 0.11%	100%
$(\Gamma_i/\Gamma)/(\Gamma_{\text{had}}/\Gamma)$	4.82%	4.82%	4.81%	100%

Tabelle 24: Wirkungsquerschnitt der leptonischen Prozesse im Vergleich

Wir dividieren alle Wirkungsquerschnitte durch den hadronischen Wirkungsquerschnitt, um unsere Ergebnisse mit den Daten in [PDG], p. 10, vergleichen zu können. Dort sind die branching ratios gegeben. Wegen Gleichung 2 in Abschnitt 3.3 ist das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte gleich dem Verhältnis der Zerfallsbreiten, also

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_{\text{had}}} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{\text{had}}}.$$

Wie wir in Tabelle 24 sehen können, haben wir gute Übereinstimmung unserer Daten mit den Werten aus [PDG]. Überraschenderweise ist die Übereinstimmung im Fall der τ-Leptonen besonders gut. Dieses Ergebnis hätten wir nicht erwartet, weil diese Ereignisse besonders schwer von den anderen zu trennen waren und einen hohen Untergrundanteil enthielten.

Die große Abweichung im Fall der Elektronen ist bei dem schlechten Fit keine Überraschung. Leider liegen die Myonereignisse auch nicht näher am Literaturwert. Eine Erklärung hierfür habe ich nicht. Es könnte sich um Zufall handeln.

Die Wirkungsquerschnitte für den Zerfall in $\ell\bar{\ell}$ liegen alle um 1.99 nb. Ich sehe die Annahme der Leptonuniversalität als bestätigt an.

5.8 Diskussion der systematischen Fehler

Wir haben in der Auswertung die Effizienzmatrix als energieunabhängig angenommen. Für die Berechnung der Effizienzmatrix standen uns monoenergetische Monte-Carlo-Daten zur Verfügung. Ob die entwickelten Schnittkriterien bei den realen Daten zur selben Effizienzmatrix führen würden, ist nicht sicher.

Eine weitere Stelle, wo sich Fehler eingeschlichen haben, ist die Trennung von s- und t-Kanal-Elektronen. Der Wirkungsquerschnitt der t-Kanal-Elektronen ist in dem betrachteten Energiebereich ungefähr konstant, wohingegen derjenige für die s-Kanal-Elektronen eine Resonanzkurve durchläuft. Der Korrekturfaktor, den wir in Abschnitt 4.1.3 berechnet haben, weist sicherlich einen systematischen Fehler auf.

Der sogenannte Pre-Cut ist auch eine Quelle möglicher Fehler. Wir wissen nicht, welche Ereignisse ausselektiert wurden (Entweder hat man es nicht gesagt oder nicht genau erläutert oder es ist mir entfallen). Wir wissen nicht, ob die Schnittkriterien mit dem Pre-Cut "kommutieren".

Vernachlässigt haben wir ferner die Detektoreffizienzen und ihrer Energieabhängigkeit. Kein Detektor ist 100% effizient, und einige Ereignisse gehen einfach verloren oder werden falsch zugeordnet. Der OPAL-Detektor hat auch einen "toten Winkel", nicht der gesamte Raumwinkel von 4π ist von Detektoren abgedeckt. Die Bestimmung des Winkels für die Teilchenbahnen wird bei $\theta \approx 0$ sehr ungenau, und man kann zwischen $\theta \approx 0°$ und $\theta \approx 180°$ nicht unterscheiden.

Die angegebenen Luminositäten enthielten einen systematischen Fehler, der in die Berechnung der Wirkungsquerschnitte und folglich in das Endergebnis einging.

Bei allen Berechnungen haben wir Feynman-Graphen höherer Ordnung sowie alle Fermionenmassen vernachlässigt. Außerdem ist die Breit-Wigner-Form, die man für den Wirkungsquerschnitt ausgerechnet hat, nicht exakt, Strahlungskorrekturen z.B. fallen unter den Tisch, wer weiß, was für Näherungen noch gemacht wurden.

Literatur

[Skr] UNIVERSITÄT BONN *Praktikumsanleitung zu E213: Analyse von Z^0-Zerfällen* Bonn

[FP] UNIVERSITÄT BONN *Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, Teil II* Bonn, Februar 1999

[PDG] PARTICLE DATA GROUP *Particle Physics Booklet* Springer, July 1998

[Ce] PARTICLE DATA GROUP *http://pdg.web.cern.ch/pdg/1998/contents_large_listings.html* CERN, 2000

[Griff] D. GRIFFITHS *Introduction to Elementary Particles* Wiley, 1987

[Ha] F. HALZEN, A. D. MARTIN *Quarks and Leptons* Wiley, 1984

[Ba] R. J. BARLOW *Statistics: A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences* Wiley, 1989

[Leo] W. R. LEO *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments* Springer, 1994

[Pe] M. E. PESKIN, D. V. SCHROEDER *An Introduction to Quantum Field Theory* Perseus Books, 1995

[Re] P. RENTON *Electroweak Interactions* Cambridge University Press, 1990

A Maple Worksheet

```
> alpha_cut:=evalf(100000/93802,7);
>
> alpha_theta:=int(1+x^2,x=-1..1)/int(1+x^2,x=-0.9..0.6);
>
> 22489*alpha_theta:
> alpha:=array(1..4):
> alpha[1]:=evalf(100000/93802,7):
> alpha[2]:=evalf(100000/94381,7):
> alpha[3]:=evalf(100000/79214,7):
> alpha[4]:=evalf(100000/98563,7):
> print(alpha);
>
> N:=array(1..4):
> N[1]:=33041:
> N[2]:=94381:
> N[3]:=79214:
> N[4]:=98563:
> print(N);
>
>
>
> n:=array(1..4,1..4):
> n[1,1]:=21889:
> n[2,1]:=0:
> n[3,1]:=209:
> n[4,1]:=0:
>
> n[1,2]:=0:
> n[2,2]:=81184:
> n[3,2]:=1498:
> n[4,2]:=0:
>
> n[1,3]:=59:
> n[2,3]:=26:
> n[3,3]:=59587:
> n[4,3]:=124:
>
> n[1,4]:=0:
> n[2,4]:=0:
> n[3,4]:=278:
> n[4,4]:=90896:
>
> print(n);
>
> eff_mat:=array(1..4,1..4):
> eff_mat[1,1]:=evalf(21889/(22489*alpha_theta),7):
> eff_mat[2,1]:=evalf(0/22489*alpha_theta,7):
> eff_mat[3,1]:=evalf(209/22489*alpha_theta,7):
> eff_mat[4,1]:=evalf(0/22489*alpha_theta,7):
>
> eff_mat[1,2]:=evalf(0/94381,7):
> eff_mat[2,2]:=evalf(81184/94381,7):
> eff_mat[3,2]:=evalf(1498/94381,7):
> eff_mat[4,2]:=evalf(0/94381,7):
>
```

```
> eff_mat[1,3]:=evalf(59/79214,7):
> eff_mat[2,3]:=evalf(26/79214,7):
> eff_mat[3,3]:=evalf(59587/79214,7):
> eff_mat[4,3]:=evalf(124/79214,7):
>
> eff_mat[1,4]:=evalf(0/98563,7):
> eff_mat[2,4]:=evalf(0/98563,7):
> eff_mat[3,4]:=evalf(278/98563,7):
> eff_mat[4,4]:=evalf(90896/98563,7):
>
> print(eff_mat);
>
> with(linalg):
> inv_eff_mat:=inverse(eff_mat);
>
> delta_eff_mat:=array(1..4,1..4):
> for i from 1 to 4 do
>   for j from 1 to 4 do
>     r:=N[j]-n[i,j];
>     delta_N:=sqrt(N[j]);
>     delta_n:=sqrt(n[i,j]);
>     delta_r:=sqrt(delta_N^2+delta_n^2);
>     delta_eff_mat[i,j]:=evalf(1/N[j]^2*sqrt(r^2*delta_n^2 + n[i,j]^2*delta_r^2
),7);
>   od;
> od;
>
> print(delta_eff_mat);
>
>
> A:=array(1..4,1..4):
> A[1,1]:=a11:
> A[2,1]:=0:
> A[3,1]:=a31:
> A[4,1]:=0:
>
> A[1,2]:=0:
> A[2,2]:=a22:
> A[3,2]:=a32:
> A[4,2]:=0:
>
> A[1,3]:=a13:
> A[2,3]:=a23:
> A[3,3]:=a33:
> A[4,3]:=a43:
>
> A[1,4]:=0:
> A[2,4]:=0:
> A[3,4]:=a34:
> A[4,4]:=a44:
>
> A_inv:=inverse(A):
>
> delta_A_inv:=array(1..4,1..4):
> summe:=0:
> for i from 1 to 4 do
>   for j from 1 to 4 do
```

```
>    summe:=(diff(A_inv[i,j],a11)*delta_eff_mat[1,1])^2
>  + (diff(A_inv[i,j],a13)*delta_eff_mat[1,3])^2
>  + (diff(A_inv[i,j],a22)*delta_eff_mat[2,2])^2
>  + (diff(A_inv[i,j],a23)*delta_eff_mat[2,3])^2
>  + (diff(A_inv[i,j],a31)*delta_eff_mat[3,1])^2
>  + (diff(A_inv[i,j],a32)*delta_eff_mat[3,2])^2
>  + (diff(A_inv[i,j],a33)*delta_eff_mat[3,3])^2
>  + (diff(A_inv[i,j],a34)*delta_eff_mat[3,4])^2
>  + (diff(A_inv[i,j],a43)*delta_eff_mat[4,3])^2
>  + (diff(A_inv[i,j],a44)*delta_eff_mat[4,4])^2;
>
> delta_A_inv[i,j]:=sqrt(summe);
>   od;
> od;
>
> delta_inv_eff_mat:=array(1..4,1..4):
> for i from 1 to 4 do
>   for j from 1 to 4 do
>    delta_inv_eff_mat[i,j]:=
> subs(a11=eff_mat[1,1],
> a13=eff_mat[1,3],
> a22=eff_mat[2,2],
> a23=eff_mat[2,3],
> a31=eff_mat[3,1],
> a32=eff_mat[3,2],
> a33=eff_mat[3,3],
> a34=eff_mat[3,4],
> a43=eff_mat[4,3],
> a44=eff_mat[4,4], delta_A_inv[i,j]);
>   od;
> od;
>
> print(delta_inv_eff_mat);
>
>
>
> Lum:=array(1..7):
> Lum[1]:=675.8590:
> Lum[2]:=543.6270:
> Lum[3]:=419.7760:
> Lum[4]:=3122.204:
> Lum[5]:=639.8380:
> Lum[6]:=479.2400:
> Lum[7]:=766.8380:
>
> delta_Lum:=array(1..7):
> delta_Lum[1]:=5.721257:
> delta_Lum[2]:=4.830643:
> delta_Lum[3]:=3.974844:
> delta_Lum[4]:=22.31760:
> delta_Lum[5]:=5.577354:
> delta_Lum[6]:=4.481870:
> delta_Lum[7]:=6.497519:
>
> s:=array(1..4,1..7):
>
> s[1,1]:=0.09:
```

```
> s[1,2]:=0.20:
> s[1,3]:=0.36:
> s[1,4]:=0.52:
> s[1,5]:=0.22:
> s[1,6]:=-0.01:
> s[1,7]:=-0.08:
>
> s[2,1]:=0.09:
> s[2,2]:=0.20:
> s[2,3]:=0.36:
> s[2,4]:=0.52:
> s[2,5]:=0.22:
> s[2,6]:=-0.01:
> s[2,7]:=-0.08:
>
> s[3,1]:=0.09:
> s[3,2]:=0.20:
> s[3,3]:=0.36:
> s[3,4]:=0.52:
> s[3,5]:=0.22:
> s[3,6]:=-0.01:
> s[3,7]:=-0.08:
>
> s[4,1]:=2.0:
> s[4,2]:=4.3:
> s[4,3]:=7.7:
> s[4,4]:=10.8:
> s[4,5]:=4.7:
> s[4,6]:=-0.2:
> s[4,7]:=-1.6:
>
>
>
> m:=array(1..4,1..7):
> m[1,1]:=155:
> m[2,1]:=125:
> m[3,1]:=129:
> m[4,1]:=3354:
>
> m[1,2]:=230:
> m[2,2]:=219:
> m[3,2]:=176:
> m[4,2]:=5002:
>
> m[1,3]:=251:
> m[2,3]:=311:
> m[3,3]:=225:
> m[4,3]:=7095:
>
> m[1,4]:=2638:
> m[2,4]:=3587:
> m[3,4]:=3175:
> m[4,4]:=86931:
>
> m[1,5]:=379:
> m[2,5]:=626:
> m[3,5]:=511:
```

```
> m[4,5]:=14394:
>
> m[1,6]:=154:
> m[2,6]:=241:
> m[3,6]:=227:
> m[4,6]:=6181:
>
> m[1,7]:=206:
> m[2,7]:=303:
> m[3,7]:=241:
> m[4,7]:=6843:
>
> k:=multiply(inv_eff_mat,m):
>
> WQ:=array(1..4,1..7):
> for j from 1 to 7 do
>  for i from 1 to 4 do
>   WQ[i,j]:=1/Lum[j]*alpha[i]*k[i,j] + s[i,j];
>  od;
> od;
>
> print(WQ);
>
>
> delta_WQ:=array(1..4,1..7):
> for j from 1 to 7 do
>  for i from 1 to 4 do
>   summe:=0;
>   for k from 1 to 4 do
>   summe:=summe + sqrt((1/Lum[j]^2*alpha[i]*inv_eff_mat[i,k]*m[k,j]*delta_Lum[j
])^2 + (1/Lum[j]*alpha[i]*m[k,j]*delta_inv_eff_mat[i,k])^2 + (1/Lum[j]*alpha[i]*
inv_eff_mat[i,k]*sqrt(m[k,j]))^2);
>   od;
>  delta_WQ[i,j]:=summe;
>  od;
> od;
>
> print(delta_WQ);
>
>
>
>
> GF:=1.16639e-5:
> MZ:=91.187:
> Nc:=1:
> sw:=0.23124:
> cV:=1/2:
> cA:=1/2:
> Gamma1:=evalf(Nc*sqrt(2)/12/Pi*GF*MZ^3*(cV^2+cA^2),5);
> cV:=-1/2+2*sw:
> cA:=-1/2:
> Gamma2:=evalf(Nc*sqrt(2)/12/Pi*GF*MZ^3*(cV^2+cA^2),5);
> Nc:=3:
> cV:=1/2-4/3*sw:
> cA:=1/2:
> Gamma3:=evalf(Nc*sqrt(2)/12/Pi*GF*MZ^3*(cV^2+cA^2),5);
>
```

```
> Nc:=3:
> cV:=-1/2+2/3*sw:
> cA:=-1/2:
> Gamma4:=evalf(Nc*sqrt(2)/12/Pi*GF*MZ^3*(cV^2+cA^2),5);
>
> Gamma5:=3*Gamma1;
> Gamma6:=3*Gamma2;
> Gamma7:=2*Gamma3+3*Gamma4;
> Gamma8:=Gamma5+Gamma6+Gamma7;
> MZ:=91.187:
> Gamma_e:=83.83:
> Gamma_X:=251.5:
> Gamma_Z:=2490:
> sigma:=evalf(12*Pi/MZ^2*Gamma_e*Gamma_X/Gamma_Z^2,3)*0.3894*1e6;
> s:=89.225^2:
> sw:=0.21:
> Qf:=1:
> MZ:=91.187:
> GammaZ:=2.49:
> siw:=sqrt(sw):
> cow:=sqrt(1-sw):
> cvf:=-1/2+2*sw:
> caf:=-1/2:
> cve:=-1/2+2*sw:
> cae:=-1/2:
> vf:=cvf/(2*siw*cow):
> af:=caf/(2*siw*cow):
> ve:=cve/(2*siw*cow):
> ae:=cae/(2*siw*cow):
> chi:=s/((s-MZ^2)+I*s*GammaZ/MZ):
> F1:=Qf^2-2*ve*vf*Qf*Re(chi)+(ve^2+ae^2)*(vf^2+af^2)*abs(chi)^2:
> F2:=-2*ae*af*Qf*Re(chi)+4*ve*ae*vf*af*abs(chi)^2:
> A_FB:=3/4*F2/F1;
> chi2:=(n,x)->2^(-n/2)/GAMMA(n/2)*x^((n-2)/2)*exp(-x/2);
> evalf(Int(chi2(4,x),x=1.864..infinity)*100,3);
> (2.513/0.054^2 + 2.466/0.080^2 + 2.525/0.018^2)/(1/0.054^2 + 1/0.080^2 + 1/0.0
18^2);
> sqrt(1/(1/0.054^2 + 1/0.080^2 + 1/0.018^2));
> (91.18/0.027^2+91.21/0.036^2+91.18/0.008^2)/(1/0.027^2+1/0.036^2+1/0.008^2);
> sqrt(1/(1/0.027^2+1/0.036^2+1/0.008^2));
> M_Z:=91.18:
> d_M_Z:=0.008:
> Gamma_Z:=2.521:
> d_Gamma_Z:=0.017:
> sigma_e:=1.936:
> d_sigma_e:=0.036:
> Gamma_e:=evalf(sqrt(M_Z^2/12/Pi*Gamma_Z^2*sigma_e*1e-6/0.3894),3);
> d_Gamma_e:=evalf(Gamma_e*sqrt((d_M_Z/M_Z)^2+(d_Gamma_Z/Gamma_Z)^2+(d_sigma_e/s
igma_e)^2),2);
> M_Z:=91.18:
> d_M_Z:=0.008:
> Gamma_Z:=2.521:
> d_Gamma_Z:=0.017:
> sigma_X:=41.40:
> d_sigma_X:=0.258:
> Gamma_X:=evalf((M_Z^2/12/Pi*Gamma_Z^2/Gamma_e*sigma_X*1e-6/0.3894),3);
> d_Gamma_e:=evalf(Gamma_X*sqrt((d_M_Z/M_Z)^2+(d_Gamma_Z/Gamma_Z)^2+(d_sigma_X/s
```

```
igma_X)^2+(d_Gamma_e/Gamma_e)^2),2);
> ge:=83.5: d_ge:=1.7:
> gm:=83.6: d_gm:=2.2:
> gt:=85.9: d_gt:=3.0:
> gq:=1780: d_gq:=67:
> gz:=2521: d_gz:=17:
> gn:=167.6: d_gn:=0:
> n:=(gz-ge-gm-gt-gq)/gn;
> d_n:=sqrt(1/gn^2*(d_ge^2+d_gm^2+d_gt^2+d_gq^2)+1/gn^4* (gz-ge-gm-gt-gq)^2*d_gn
^2);
>
> gauss:=(x,m,s)->Int(1/s/sqrt(2*Pi)*exp(-(t-m)^2/2/s^2),t=-infinity..x);
> evalf(gauss(2,2.91,0.40)+1-gauss(4,2.91,0.40));
> 1.997/41.40;
> 3.360/69.90;
> 4.82*sqrt((0.043/1.997)^2+(0.258/41.40)^2);
```

B PAW-Macros für den Breit-Wigner-Fit

```
* fit.kumac, 05-Aug-99, S.Baumann
* ---------------------------------------------------------------------
* The kumac runs the lineshape fits on the four channels
*
* Author   : S.Baumann
* Version  : 1.00
* Created  : 05-Aug-99
* Last Mod : 05-Aug-99
*
* INPUT  : channel - ee,mm,tt,qq
* INPUT  : same    - one more iteration
* INPUT  : minos   - if yes use MINOS error evaluation
* INPUT  : s       - if yes use s dependent BW function
*                    s-dependent     -> fitsbw.f
*                    non s-dependent -> fitbw.f
* INPUT  : m       - if yes run MINUIT interactively
* ---------------------------------------------------------------------

 MACRO fit channel=qq same=no minos=no s=no m=0
* say hello
   MESSAGE "Fitting Breit-Wigner function to [channel] channel"
* if same is no read the input data
   IF [same] .eq. 'no' THEN
* delete some vectors to avoid nasty PAW messages
     V/DEL ECM
     V/DEL DECM
     V/DEL XSECT
     V/DEL DXSEC
     V/DEL PAR
     V/DEL OPAL
     V/DEL DOPAL
     V/DEL RADCORR
* the center of mass energies
     V/CREATE ECM(7)  R 88.47 89.46 90.22 91.22 91.97 92.96 93.71
     V/CREATE DECM(7) R 7*0.
* vectors for the cross-sections and their errors
     V/CREATE XSECT(7)
     V/CREATE DXSEC(7)
* read cross sections
     MESS 'Enter values for cross sections and their errors:'
     DO I = 1, 7
       V/INPUT XSECT($SIGMA([I]))
       V/INPUT DXSEC($SIGMA([I]))
     ENDDO
* fill OPAL numbers into vector depending on channel (lepton universality
* seems to be perfect here); the radiation corrections are not the same
* as in the script - but they are applied to the OPAL data, so let's leave
* them untouched.
* The vector PAR takes the starting values for the fit
     IF [channel].EQ.'ee' .OR. [channel].EQ.'mm' .OR. [channel].EQ.'tt' THEN
       V/CREATE RADCORR(7) R 0.090 0.200 0.360 0.520 0.220 -0.020 -0.080
       V/CREATE OPAL(7)    R 0.233 0.519 0.912 1.491 1.249  0.686  0.481
       V/CREATE DOPAL(7)   R 0.020 0.027 0.035 0.023 0.042  0.035  0.024
       V/CREATE PAR(3)     R 2. 91. 2.
     ELSEIF [channel] .EQ. 'qq' THEN
```

```
      V/CREATE RADCORR(7) R 2.00  4.30  7.70 10.80  4.70 -0.30 -1.50
      V/CREATE OPAL(7)    R 5.35 10.13 18.32 30.48 24.69 14.11  9.95
      V/CREATE DOPAL(7)   R 0.10  0.13  0.17  0.13  0.22  0.18  0.12
      V/CREATE PAR(3)     R 40. 91. 2.
    ENDIF
* for some reason the OPAL and RADCORR vectors have to be added (just copying
* this blindly from the old kumac)
    VADD OPAL RADCORR OPAL
  ENDIF
* now we should have all numbers needed for fitting - first find out if we
* want interactive MINUIT
  IF [m] .EQ. 'yes' THEN
    fopt = 'ms'
  ELSE
    fopt = 's'
  ENDIF
* see if we want minos errors
  IF [minos] .EQ. 'yes' THEN
    fopt = [fopt]e
  ENDIF
* determine type of fit function
  IF [s] .EQ. 'yes' THEN
    ffunc = '/u2/users/fpe213/kumac/fitsbw.for'
  ELSE
    ffunc = '/u2/users/fpe213/kumac/fitbw.for'
  ENDIF
* set some options and make a title
  OPT NSTA
  OPT FIT
  hhtitle=Lineshape for Z"5#[channel]
  TITLE [hhtitle]
* put a frame on the window
  HPL/NULL 88. 94. 0. $SIGMA(PAR(1) * 1.25)
  hmax = $SIGMA(PAR(1) * 1.15)
* run fit
  V/FIT ecm xsect dxsec [ffunc] [fopt] 3 par
* put in the measured points
  TIC
  HPL/ERR ECM XSECT DECM DXSEC 7. 20 0.18
* make a legend
  KEY 89. $SIGMA([hmax]*0.8) 20 'FP'
* and some axis title
  ATIT '"R#s (GeV)' '[s] (nb)'
* put in OPAL data
  MESSAGE
  MESSAGE Draw OPAL data points (y/n)?
  opalpoints='y'
  READ    opalpoints

  IF [opalpoints] .eq. 'y' THEN
    HPL/ERR ecm opal decm dopal 7 24 0.18
    KEY 89. $SIGMA([hmax]*0.6) 24 'OPAL'
  ENDIF
* that's it
 RETURN
```

```
 FUNCTION FITBW(X)
 COMMON/PAWPAR/PAR(3)
 FITBW =  PAR(1) / ( 4./par(3)**2 * ( X-PAR(2) )**2 + 1. )
 END


 FUNCTION FITSBW(X)
 COMMON/PAWPAR/PAR(3)
 FITSBW =  PAR(1) / ( 4./par(3)**2 * ( X-PAR(2) )**2 +
&                     (X/par(2))**2 )
 END
```

C PAW-Macros zur Erzeugung der Histogramme

```
MACRO ALLDEF

Size 18 24
Next
Set * ; Option *
opt zfl1
Size 18 24
Histogram/Delete * ; Vector/Delete *
Title_global ' '
Title_global ' ' U
Option NBOX
Option NGRI
Set HWID 1
Set FWID 1
Set BWID 1
Set PWID 1
Set LWID 1
Set CSIZ 0.25
Set VSIZ 0.25
Set TSIZ 0.32
Set XMGL 1.2
Set XMGR 1.2
Set YMGU 0.5
Set YMGL 1.5
Set GSIZ 0.1
Set YHTI 0.7
Set KSIZ 0.15
Set MTYP 1
Zone 1 1
range
points
Next
RETURN


MACRO ncharged

exec ALLDEF
opt utit

SET GSIZ 0.3
SET YGTI 0.1
Title_global 'NCHARGED'

n/cre 10 'elektron' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 10 elektron.txt

n/cre 20 'myon' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 20 myon.txt

n/cre 30 'tau' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 30 tau.txt

n/cre 40 'hadron' 4 ' ' 19 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 40 hadron.txt
```

```
for/file 99 ncharged.eps
metafile 99 -113
zone 2 2
Title_global 'elektron' U
n/plot 10.ncharged
Title_global 'myon' U
n/plot 20.ncharged
Title_global 'tau' U
n/plot 30.ncharged
Title_global 'hadron' U
n/plot 40.ncharged
close 99
RETURN


MACRO pcharged

exec ALLDEF
opt utit

SET GSIZ 0.3
SET YGTI 0.1
Title_global 'PCHARGED'

n/cre 10 'elektron' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 10 elektron.txt

n/cre 20 'myon' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 20 myon.txt

n/cre 30 'tau' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 30 tau.txt

n/cre 40 'hadron' 4 ' ' 19 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 40 hadron.txt

for/file 99 pcharged.eps
metafile 99 -113
zone 2 2
Title_global 'elektron' U
n/plot 10.pcharged
Title_global 'myon' U
n/plot 20.pcharged
Title_global 'tau' U
n/plot 30.pcharged
Title_global 'hadron' U
n/plot 40.pcharged
close 99
RETURN


MACRO ecal

exec ALLDEF
opt utit
```

```
SET GSIZ 0.3
SET YGTI 0.1
Title_global 'ECAL'

n/cre 10 'elektron' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 10 elektron.txt

n/cre 20 'myon' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 20 myon.txt

n/cre 30 'tau' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 30 tau.txt

n/cre 40 'hadron' 4 ' ' 19 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 40 hadron.txt

for/file 99 ecal.eps
metafile 99 -113
zone 2 2
Title_global 'elektron' U
n/plot 10.ecal
Title_global 'myon' U
n/plot 20.ecal
Title_global 'tau' U
n/plot 30.ecal
Title_global 'hadron' U
n/plot 40.ecal
close 99
RETURN


MACRO hcal

exec ALLDEF
opt utit

SET GSIZ 0.3
SET YGTI 0.1
Title_global 'HCAL'

n/cre 10 'elektron' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 10 elektron.txt

n/cre 20 'myon' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 20 myon.txt

n/cre 30 'tau' 4 ' ' 20 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 30 tau.txt

n/cre 40 'hadron' 4 ' ' 19 ncharged pcharged ecal hcal
n/read 40 hadron.txt

for/file 99 hcal.eps
metafile 99 -113
zone 2 2
Title_global 'elektron' U
n/plot 10.hcal
```

```
Title_global 'myon' U
n/plot 20.hcal
Title_global 'tau' U
n/plot 30.hcal
Title_global 'hadron' U
n/plot 40.hcal
close 99
RETURN


MACRO costhet

exec ALLDEF
opt utit
set mtyp 21
for/file 99 costhet1.eps
metafile 99 -113
fun/plot (1+x**2) -1 1
Set CLIP 0 ; ATITLE 'costhet' 'wq'
close 99

for/file 99 costhet.eps
metafile 99 -113
fun/plot 1/(1-x)**2 -1 0.8
fun/plot 1/(1-x)**2+(1+x**2) -1 1 's'
fun/plot (1+x**2) -1 1 's'
Set CLIP 0 ; ATITLE 'costhet' 'wq'
close 99
RETURN
```