K123
β-Spektroskopie

Jürgen Päpke   Akın Wingerter

18./19. Oktober 1999

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Ziel des Versuches

Ziel des Versuchs ist es, das β-Spektrum von ^{22}Na und ^{204}Tl aufzunehmen und die Zerfallsenergien zu bestimmen. Hierzu wird das Spektrometer mittels der Konversionslinien von ^{137}Cs geeicht. Aus der K-Linie von ^{137}Cs bestimmen wir das Auflösungsvermögen des Spektrometers.

2 Theorie des β-Zerfalls

2.1 Allgemeines

Unter dem Begriff β-Zerfall werden alle Kernzerfälle zusammengefaßt, bei denen sich die Kernladungszahl um 1 ändert, die Massenzahl A aber konstant bleibt. Es gibt 3 Arten von β-Zerfall:

β^--Zerfall: Der Kern emittiert ein Elektron, die Kernladungszahl ändert sich von Z in Z+1.

β^+-Zerfall: Der Kern emittiert ein Positron, die Kernladungszahl ändert sich von Z in Z-1. Die Atomhülle gibt ein überschüssiges Elektron ab.

Elektroneneinfang: Ein Elektron aus der Atomhülle wird vom Kern absorbiert. Vorwiegend werden Elektronen aus der K- und L-Schale eingefangen, weil sie eine größere Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Kernort haben als die anderen Hüllenelektronen. Die Kernladungszahl ändert sich von Z in Z-1, das Atom ist neutral, aber die Elektronenhülle ist in einem angeregten Zustand (weil das absorbierte Elektron eine Lücke gelassen hat).

Die entstandene Lücke hat zur Folge, daß das Atom charakteristische Röntgenstrahlung emittiert oder Auger-Elektronen abgibt. Auger-Eletronen entstehen dadurch, daß die beim Übergang in den Grundzustand freigewordene Energie auf ein Elektron in einer weiter außen liegenden Schale übertragen wird, dessen Bindungseinergie geringer ist und somit ins Kontinuum übergeht.

In vielen Fällen führt der β-Zerfall auf einen angeregten Zustand des Kerns. Die Anregungsenergie wird durch Emission von γ-Quanten oder Konversionselektronen abgegeben. Konversionselektronen entstehen dadurch, daß ein angeregter Kern mit einem gebundenen Hüllenelektron in direkte Wechselwirkung tritt und es so aus dem Atom emittiert.

Aus heutiger Sicht erklärt man sich den β-Zerfall als Umwandlung eines Protons oder Neutrons im Kern:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu_e} \quad \text{und} \quad p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \tag{1}$$

Das Feyman-Diagramm ist in Abbildung 1 angegeben. Die Zeit läuft nach oben.

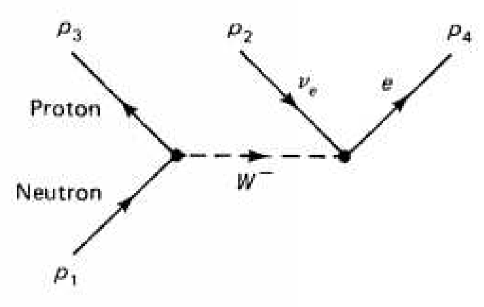

Abbildung 1: Ein Feynman-Graph, der zum β-Zerfall beiträgt

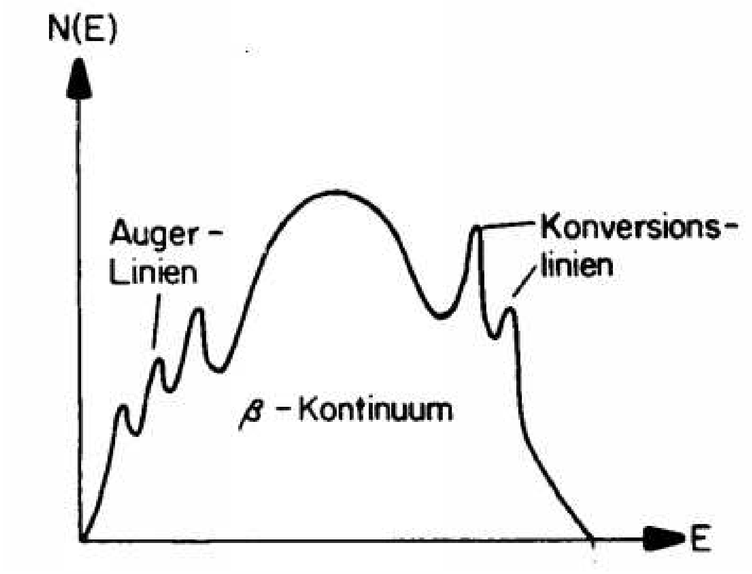

Abbildung 2: Energiespektrum der β-Teilchen

2.2 Energiespektrum der β-Teilchen

Das Energiespektrum der β-Teilchen ist kontinuierlich. Dies war eine Überraschung, da man beim β-Zerfall nur 2 Teilchen (Kern und β-Teilchen) detektiert hatte, und beim Zwei-Körper-Zerfall die Energien der Zerfallsprodukte wegen des Energie- und Impulserhaltungssatzes eindeutig festliegen. Also hatte man ein diskretes Spektrum erwartet. Eine Lösung dieses scheinbaren Wiederspruchs gelang erst, als Pauli 1930 das Neutrino postulierte. Das Neutrino konnte erst nach dem Krieg nachgewiesen werden.

Das β-Spektrum ist in Abbildung 2 wiedergegeben. Dem kontinuierlichen Spektrum sind die diskreten Linien der Auger-Elektronen und der Konversionselektronen überlagert.

2.3 Theorie des β-Zerfalls von Fermi

Wie man in der Quantenmechanik lernt, ist die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand f gegeben durch

$$W = N(p)dp = \frac{2\pi}{\hbar}|H_{if}|^2 \frac{dn}{dE_0}. \tag{2}$$

$|H_{if}|$ ist das als klein angenommene Matrixelement der Wechselwirkung und $\frac{dn}{dE_0}$ ist die Dichte der Endzustände in dem Energieintervall $[E_0, E_0 + dE_0]$.

Infolge der Heisenbergschen Unschärferelation hat ein Elektron eine Phasenfläche von $(\Delta x \cdot \Delta p_x) \cdot (\Delta y \cdot \Delta p_y) \cdot (\Delta z \cdot \Delta p_z) \simeq \hbar^3$. Das Phasenvolumen eines Elektrons im Volumen V ist $V \cdot 4\pi p^2 dp$, also ist die Zahl der Zustände des Elektrons im Phasenraum gegeben durch:

$$dn_e = V \cdot \frac{4\pi p^2 dp}{\hbar^3} \tag{3}$$

Dieselben Überlegungen gelten auch für das Neutrino. Die Einzelwahrscheinlichkeiten multiplizieren sich zur Gesamtwahrscheinlichkeit: $dn = dn_e \cdot dn_\nu$. Die Zustandsdichte ist dann

$$\frac{dn}{dE_0} = V \cdot \frac{4\pi p^2 dp}{\hbar^3} \cdot V \cdot \frac{4\pi p_\nu^2}{\hbar^3} \cdot \frac{dp_\nu}{dE_0} \tag{4}$$

Wir eliminieren die Neutrino-Terme mit Hilfe des Energiesatzes:

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c}, \quad E_0 = E + E_\nu \quad \rightarrow \quad p_\nu = \frac{1}{c}(E_0 - E) \quad \rightarrow \quad p_\nu^2 \left(\frac{dp_\nu}{dE_0}\right) = \frac{1}{c^3}(E - E_0)^2 \tag{5}$$

Dies liefert folgenden endgültigen Ausdruck für die Zustandsdichte:

$$\frac{dn}{dE_0} = \frac{16\pi^2 V^2}{\hbar^6 c^3} p^2 (E - E_0)^2 dp \tag{6}$$

Man kann zeigen, daß das Übergangsmatrixelement H_{if} für erlaubte Übergänge (solche Übergänge, welche die Drehimpulserhaltung nicht verletzen) energieunabhängig und von der Größenordnung 1 ist. Somit ist die Zerfallswahrscheinlichkeit im wesentlichen bestimmt durch die Dichte der Endzustände:

$$N(p)dp \sim \frac{16\pi^2 V^2}{\hbar^6 c^3} p^2 (E - E_0)^2 dp \tag{7}$$

Infolge der Coulomb-Wechselwirkung mit der Kernladung werden die emittierten Elektronen abgebremst und die Positronen beschleunigt. Diese Effekte berücksichtigt man durch Multiplikation mit der Korrekturfunktion F(E,Z), die von der Energie und der Kernladungszahl des Atomkerns abhängt. Die Berechnungen führen zu komplizierten Formeln für F(E,Z), die nur numerisch gelöst werden können. Die Werte dieser Funktion sind tabelliert. Alles in allem erhalten wir

$$N(p)dp \sim F(E, Z) \frac{16\pi^2 V^2}{\hbar^6 c^3} p^2 (E - E_0)^2 dp \tag{8}$$

2.4 Kurie-Plot

Aus der vorigen Gleichung folgt

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(E, Z)}} = \text{const} \cdot (E - E_0), \tag{9}$$

Wir erhalten also eine Gerade. Diese Darstellung bietet eine Reihe von Vorteilen. Wir können auf einen Blick erkennen, ob das gemessene Spektrum mit dem aus der Fermi-Theorie berechneten übereinstimmt. Wenn das Spektrum aus mehreren Zerfällen zusammengesetzt ist, erscheint im Kurie-Plot ein Knick, und wir können die beiden Zerfälle unterscheiden. Außerdem ermöglichst uns der Kurie-Plot, die Zerfallsenergie (maximale Energie der Elektronen) sehr einfach zu bestimmen, indem wir den x-Achsen-Schnittpunkt der Geraden ablesen. Hierbei nehmen wir an, daß das Neutrino keine oder nur eine sehr geringe Masse hat.

3 Versuchsaufbau

Zur Aufnahme des Spektrums wird ein doppeltfokussierendes Spektrometer benutzt. Im Spektrometer wird ein axialsymmetrisches Magnetfeld erzeugt, das in radialer Richtung $\sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ abnimmt. Das Magnetfeld sorgt dafür, daß ein Elektron, das von einem Punkt des Sollkreises unter einem radialen Winkel $\neq 0$ startet, nach einem Winkel von $\pi\sqrt{2}$ den Sollkreis wieder schneidet. Verläßt das Elektron den Sollkreis unter einem axialen Winkel $\neq 0$, sorgt das Magnetfeld nach einem Winkel von $\pi\sqrt{2}$ dafür, daß das Elektron den Sollkreis schneidet. Genau an dieser Stelle befindet sich der Halbleiterdetektor für die β-Teilchen.

In dem Spektrometer befindet sich eine drehbare Blende, mit der wir die Transmission auf 1%, 2% oder 4% stellen können. Die Stärke des Magnetfeldes messen wir mit einer Hallsonde, die Hallspannung lesen wir an einer Digitalanzeige ab (in Skalenteilen). Da wir nicht wissen, welchem Magnetfeld (in Weber / m^2) diese in Skalenteilen abgelesene Spannung entspricht, müssen wir eine Eichung durchführen (siehe unten).

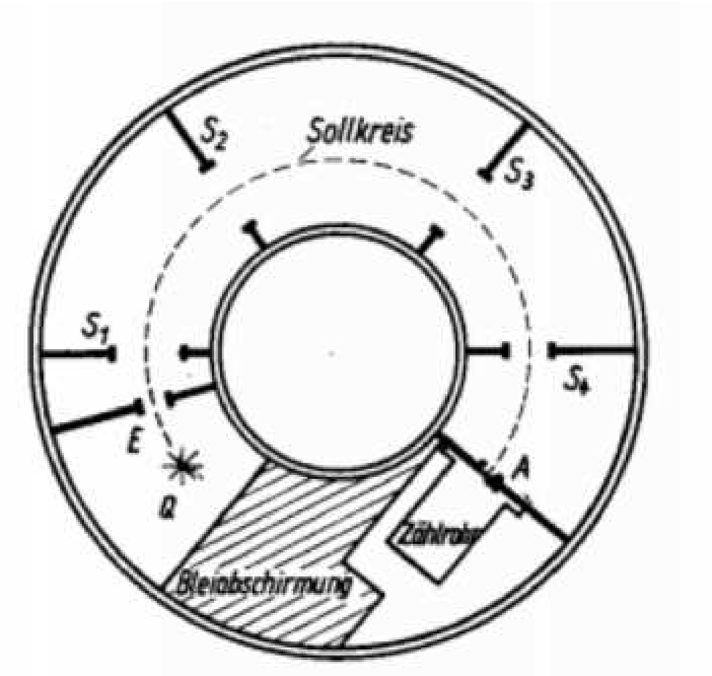

Abbildung 3: Aufbau des 2π-Spektrometers

Damit die Teilchen den Detektor erreichen, müssen wir für ein Vakuum sorgen. Die Vakuumpumpe erreicht einen Druck von ca. $0.5 \cdot 10^{-1}$ Torr. Dieser Wert verbesserte sich im Laufe des Versuchs geringfügig.

Abbildung 3 zeigt einen schematischen Aufbau des Spektrometers. Die Blenden S_1 bis S_4 sollen die Streustrahlung der Kammerwand abblenden.

4 Versuchsdurchführung

4.1 Messung der Offsetspannung

Der Spannungsmesser zeigt bei abgeschaltetem Magneten eine von Null verschiedene Hallspannung an (Remanenz). Wir fahren den Magnetstrom hoch und wieder zurück auf Null und notieren die angezeigte Hallspannung $U_{\min}^{e^-}$. Danach Polen wir den Magneten um und wiederholen die Messung, es wird die Hallspannung $U_{\min}^{e^+}$ angezeigt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 auf der nächsten Seite dargestellt.

Die bei den Mittelwerten angegebenen Fehler sind die Standardabweichungen σ. Die Offsetspannung ist der Mittelwert aus $U_{\min}^{e^-}$ und $U_{\min}^{e^+}$. Der Fehler errechnet sich wie folgt ([Ba], S. 57):

$$\Delta U_{\text{Offset}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 (\Delta U_{\min}^{e^-})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\Delta U_{\min}^{e^+})^2} \tag{10}$$

4.2 Eichung des Spektrometers

4.2.1 Messung des Untergrundes von ^{137}Cs

Wir setzen das Caesium-Präparat in das Spektrometer ein. Wichtig hierbei ist, daß wir es nur an dem Griff oben anfassen, da die Probe sehr empfindlich ist. Nachdem wir die Probe in das Spektrometer eingesetzt haben, drehen wir sie so, daß die Richtung der β^--Strahlung senkrecht zum Radius des Spektrometers steht (die

Messung Nr.	$U_{\text{min}}^{e^-}$	$U_{\text{min}}^{e^+}$
1	3.7	8.3
2	3.65	8.2
3	3.6	8.25
4	3.6	8.2
5	3.6	8.2
6	3.6	8.2
7	3.6	8.2
8	3.6	8.2
9	3.6	8.2
Mittelwert	3.617	8.217
Fehler	0.035	0.035
Offsetspannung		5.917
Fehler		0.025

Tabelle 1: Offset-Spannung

Teilchen sollen ja auf Kreisbahnen beschleunigt werden). Danach justieren wir durch Drehen einer Blende im Spektrometer die Transmission auf 4% und evakuieren es auf einen Druck von ca. $0.5 \cdot 10^{-1}$ Torr.
Wir fahren das Spektrum grob durch und finden einen Spannungswert, der einer großen Zählrate von Elektronen entspricht. Damit haben wir sichergestellt, daß die Polung des Magneten korrekt auf Elektronen eingestellt ist.
Danach fahren wir den Magneten hoch und runter und messen den Untergrund des Präparats bei der Hallspannung $U_{\text{min}}^{e^-}$. Die Ergebnisse der Messung sind in Tabelle 4 auf der nächsten Seite zusammengefaßt.
Wir wiederholen die Messung für 2% und 1% Transmission. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 und Tabelle 2 dargestellt.
Die bei den Mittelwerten angegebenen Fehler sind die Standardabweichungen σ.

Messung Nr.	Zahl der Ereignisse n
1	7
2	19
3	27
4	23
5	22
Mittelwert	19.60
Fehler	7.60

Tabelle 2: Untergrund ^{137}Cs, 1% Transmission, 40s Zählzeit

Messung Nr.	Zahl der Ereignisse n
1	10
2	18
3	15
4	19
5	21
Mittelwert	16.60
Fehler	4.28

Tabelle 3: Untergrund ^{137}Cs, 2% Transmission, 40s Zählzeit

Messung Nr.	Zahl der Ereignisse n
1	40
2	43
3	51
4	62
5	52
Mittelwert	49.60
Fehler	8.62

Tabelle 4: Untergrund ^{137}Cs, 4% Transmission, 80s Zählzeit

4.2.2 Messung des Spektrums von ^{137}Cs

Wir stellen die Transmission auf 1% ein und fahren den Magnetstrom runter. Nun messen wir das Spektrum in der Umgebung der Konversionslinien in Schritten von 2 Skalenteilen einmal durch, indem wir zu jedem Wert der Hallspannung U_H die Anzahl der Ereignisse n (Zahl der detektierten Teilchen) notieren. Die Zählzeit beträgt 80 Sekunden für 4% Transmission, für 2% und 1% Transmission haben wir die Zählzeit auf 40 Sekunden verkürzt. Wir sehen, wo Maxima der detektierten Teilchen liegen, und die Umgebung dieser Maxima wird in Schritten von 1 Skalenteil und in einigen Fällen auch in Schritten von 0.5 Skalenteilen ausgemessen. Das Ergebnis dieser Messung ist in Tabelle 5 wiedergegeben.

U_H	n	U_H^k	n_k	Δn_k	n_f	Δn_f
155.00	31	149.08	11.40	9.42	0.076	0.063
156.20	65	150.28	57.40	11.08	0.382	0.074
157.00	93	151.08	73.40	12.28	0.486	0.081
158.00	185	152.08	165.40	15.58	1.088	0.102
159.00	452	153.08	432.40	22.58	2.825	0.147
160.10	539	154.18	519.40	24.43	3.369	0.158
160.40	408	154.48	388.40	21.58	2.514	0.14
160.70	186	154.78	166.40	15.61	1.075	0.101
161.00	113	155.08	93.40	13.07	0.602	0.084
161.50	60	155.58	40.40	10.85	0.26	0.07
162.00	49	156.08	29.40	10.33	0.188	0.066
162.50	125	156.58	105.40	13.52	0.673	0.086
163.00	177	157.08	157.40	15.32	1.002	0.098
163.50	206	157.58	186.40	16.24	1.183	0.103
164.00	210	158.08	190.40	16.36	1.204	0.104
164.50	173	158.58	153.40	15.19	0.967	0.096
165.00	146	159.08	126.40	14.27	0.795	0.09
165.50	92	159.58	72.40	12.24	0.454	0.077
166.00	40	160.08	20.40	9.89	0.127	0.062
166.50	27	160.58	7.40	9.21	0.046	0.057
167.00	28	161.08	8.40	9.26	0.052	0.057
167.50	28	161.58	8.40	9.26	0.052	0.057
168.00	42	162.08	22.40	9.99	0.138	0.062
168.50	41	162.58	21.40	9.94	0.132	0.061
169.00	36	163.08	16.40	9.68	0.101	0.059
169.60	13	163.68	-6.60	8.41	-0.04	-0.051
170.00	8	164.08	-11.60	8.11	-0.071	-0.049

Tabelle 5: Eichung ^{137}Cs, 1% Transmission, 40s Zählzeit

Der Nullpunkt der Skala der Hallspannung ist U_{Offset}, deshalb müssen wir die gemessene Hallspannung korrigieren, indem wir U_{Offset} abziehen:

$$U_H^k = U_H - U_{\text{Offset}} \tag{11}$$

$$\Delta U_H^k = \sqrt{(\Delta U_H)^2 + (\Delta U_{\text{Offset}})^2} \tag{12}$$

Als Fehler der gemessenen Hallspannung nehmen wir die Ungenauigkeit der Ablesung am Meßgerät: $\Delta U_H = 0.1$ Skalenteile. Der Fehler der Offsetspannung ist die Standardabweichung aus Tabelle 1 auf Seite 6: $\Delta U_{\text{Offset}} = 0.025$ Skalenteile. Damit ergibt sich $\Delta U_H^k = 0.103$

Von der Zahl der Ereignisse muß der zuvor bestimmte Untergrund (siehe Tabelle 2 auf Seite 6) abgezogen werden:

$$n_k = n - n_{\text{untergrund}} \tag{13}$$

$$\Delta n_k = \sqrt{(\Delta n)^2 + (\Delta n_{\text{untergrund}})^2} \tag{14}$$

Die Zahl der radioaktiven Zerfälle in einem Zeitintervall ist Poisson-verteilt. Der Fehler von n ist also die Standardabweichung der Poissonverteilung, diese ist gleich der Wurzel aus dem Mittelwert der Ereignisse, und diesen Mittelwert wollen wir als n annehmen. Also gilt für den Fehler : $\Delta n = \sqrt{n}$. Der Fehler des Untergrunds ist die Standardabweichung aus Tabelle 2 auf Seite 6.

Die Anzahl der in einer Zeitspanne gemessenen Teilchen ist direkt proportional zum Impuls $|\vec{p}|$ der Teilchen. Da wir uns für die Anzahl der Zerfälle im Kern interessieren, teilen wir durch eine zu $|\vec{p}|$ proportionale Grösse, in unserem Fall ist diese Größe die korrigierte Hallspannung U_H^k:

$$n_f = \frac{n_k}{U_H^k} \tag{15}$$

$$\Delta n_f = |n_f| \sqrt{\left(\frac{\Delta n_k}{n_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U_H^k}{U_H^k}\right)^2} \tag{16}$$

Wir wiederholen die Messung für die Transmissionen 2% und 4% (Zählzeit 40s). Die Ergebnisse sind in Tabelle 6 auf der nächsten Seite und Tabelle 7 auf Seite 10 dargestellt.

4.2.3 Eichung der Spannungsskala

Wenn wir die Zentripetalkraft und die Lorentzkraft gleichsetzen, erhalten wir einen linearen Zusammenhang zwischen Impuls $\vec{p}$ und Magnetfeld $\vec{B}$ (e ist die Ladung des Teilchens, ρ dessen Sollkreisradius):

$$|\vec{p}| = e \cdot |\vec{B}| \cdot \rho \tag{17}$$

In der Beta-Spektroskopie ist es üblich, den Impuls der Teilchen in Werten von $B \cdot \rho$ anzugeben:

$$B \cdot \rho = \frac{p}{e} \tag{18}$$

Wir lösen die Gleichung $E_{\text{kin}} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$ nach p auf und setzten das Ergebnis in die vorige Gleichung ein:

U_H	n	U_H^k	n_k	Δn_k	n_f	Δn_f
155.00	79	149.08	62.40	9.87	0.419	0.066
156.10	110	150.18	105.72	11.33	0.704	0.075
157.00	179	151.08	162.40	14.05	1.075	0.093
158.10	270	152.18	253.40	16.98	1.665	0.112
159.10	731	153.18	714.40	27.37	4.664	0.179
160.00	888	154.08	871.40	30.11	5.655	0.195
160.50	491	154.58	474.40	22.57	3.069	0.146
161.00	133	155.08	116.40	12.30	0.751	0.079
161.50	143	155.58	126.40	12.70	0.812	0.082
162.10	141	156.18	124.40	12.62	0.796	0.081
162.50	241	156.58	224.40	16.10	1.433	0.103
163.00	331	157.08	314.40	18.69	2.001	0.119
163.60	316	157.68	299.40	18.28	1.899	0.116
164.00	284	158.08	267.40	17.39	1.692	0.110
164.50	255	158.58	238.40	16.53	1.503	0.104
165.10	184	159.18	167.40	14.22	1.052	0.089
166.00	43	160.08	26.40	7.83	0.165	0.049
167.00	38	161.08	21.40	7.50	0.133	0.047
168.10	78	162.18	61.40	9.81	0.379	0.061
169.00	26	163.08	9.40	6.66	0.058	0.041
170.00	22	164.08	5.40	6.35	0.033	0.039

Tabelle 6: Eichung ^{137}Cs, 2% Transmission, 40s Zählzeit

$$B \cdot \rho = \frac{1}{ce} \sqrt{{E_{\mathrm{kin}}}^2 + 2E_{\mathrm{kin}} mc^2} \tag{19}$$

Aus den Graphen des ^{137}Cs-Spektrums entnehmen wir die Werte in Tabelle 8 auf Seite 11 für die korrigierte Hallspannung U_H^k. Da der Plot mit dem Programm xmgr/ACE erfolgte, konnten wir die Lage der Maxima durch Positionieren des Mauszeigers genauer ablesen als man es den abgedruckten Graphen entnehmen kann.

Weil die L-Linien des ^{137}Cs zu dicht beianander liegen, können Sie nicht unterschieden werden. Deshalb bilden wir einen gewichteten Mittelwert aus den Energien dieser Linien. Die L-Linie ist in J entartet: $2S_{1/2}, \quad 2P_{1/2}, \quad 2P_{3/2}$. Wir haben hierbei die in der Spektroskopie übliche Notation $n^{2s+1}L_J$ benutzt (n Hauptquantenzahl, 2s+1 Multiplizität, L Bahndrehimpuls, J Gesamtdrehimpuls). Für den gewichteten Mittelwert ergibt sich schließlich:

$$\bar{E_L} = \frac{2E_{L_I} + 2E_{L_{II}} + 4E_{LIII}}{8} \tag{20}$$

Mit den Werten aus dem FP-Skript ergibt sich $\bar{E_L}$=5.526 keV. Für den Wert von E_K entnehmen wir dem Skript 37.441 keV.

Die kinetische Energie der Konversionselektronen ist gleich der Gamma-Zerfallsenergie des Caesium (E_γ=661.660 keV) minus der Bindungsenergie der Elektronen (E_K, bzw. $\bar{E_L}$):

$$E_K^{\mathrm{kin}} = E_\gamma - E_K \tag{21}$$
$$E_L^{\mathrm{kin}} = E_\gamma - \bar{E_L} \tag{22}$$

Damit können wir $B \cdot \rho$ ausrechnen. Die Zahlenwerte stehen in Tabelle 8 auf Seite 11.

Um den Proportionalitätsfaktor s in der Beziehung $B\rho = s \cdot U_H^k$ zu finden, bilden wir den Mittelwert der Peaks aus den drei Eichmessungen (Tabelle 8 auf Seite 11). Als dritten Punkt nehmen wir den Ursprung hinzu, und

U_H	n	U_H^k	n_k	Δn_k	n_f	Δn_f
140.00	113	134.08	63.40	13.69	0.473	0.102
142.00	90	136.08	40.40	12.82	0.297	0.094
144.10	78	138.18	28.40	12.34	0.206	0.089
146.10	79	140.18	29.40	12.38	0.21	0.088
148.10	109	142.18	59.40	13.54	0.418	0.095
150.10	150	144.18	100.40	14.98	0.696	0.104
151.20	128	145.28	78.40	14.22	0.54	0.098
152.10	166	146.18	116.40	15.5	0.796	0.106
153.00	180	147.08	130.40	15.95	0.887	0.108
154.00	194	148.08	144.40	16.38	0.975	0.111
155.00	227	149.08	177.40	17.36	1.19	0.116
156.10	255	150.18	205.40	18.15	1.368	0.121
157.20	429	151.28	379.40	22.43	2.508	0.148
158.00	778	152.08	728.40	29.19	4.789	0.192
159.10	1756	153.18	1706.40	42.78	11.14	0.279
160.10	2808	154.18	2758.40	53.69	17.89	0.348
161.10	1131	155.18	1081.40	34.72	6.969	0.224
161.70	562	155.78	512.40	25.23	3.289	0.162
162.20	603	156.28	553.40	26.03	3.541	0.167
162.70	891	156.78	841.40	31.07	5.367	0.198
163.00	1017	157.08	967.40	33.03	6.159	0.21
163.60	1007	157.68	957.40	32.88	6.072	0.209
164.10	945	158.18	895.40	31.93	5.661	0.202
165.00	735	159.08	685.40	28.45	4.308	0.179
166.10	289	160.18	239.40	19.06	1.495	0.119
168.00	233	162.08	183.40	17.53	1.132	0.108

Tabelle 7: Eichung ^{137}Cs, 4% Transmission, 80s Zählzeit

führen eine lineare Regression durch (Programm xmgr/ACE). Das Ergebnis ist in Tabellle 9 auf der nächsten Seite dargestellt. Wir entnehmen der Tabelle s=22.09 und Δs=0.22. Die Korrelation beträgt 99%.

4.3 Auflösungsvermögen des Spektrometers

Die K-Linie im Cs-Spektrum hat Gauß-Form. Mit FWHM (full width at half maximum) bezeichnen wir die Breite des x-Intervalls bei einer Gauß-Kurve, in dem die Kurve oberhalb ihres halben Maximalwertes liegt. Es besteht bekanntlich folgender Zusammenhang: FWHM = 2.35σ, wobei σ die Standardabweichung der Kurve ist. Wir lesen für alle 3 Transmissionen den Wert von FWHM in den Graphen ab und berechnen σ. Die Standardabweichung ist gleich dem Auflösungsvermögen des Spektrometers $\frac{\Delta p}{p}$. Die Werte stehen in Tabelle 10 auf der nächsten Seite.

Hieraus kann man keinen Zusammenhang zwischen Auflösungsvermögen und Transmission erkennen. Im Falle 4% Transmission konnte der Wert für FWHM graphisch nur ungenau abgelesen werden.

4.4 Messung der Spektren von ^{22}Na und ^{204}Tl

Zur Messung der Spektren von ^{22}Na und ^{204}Tl gehen wir genauso vor wie im Fall Caesium. Da ^{22}Na ein β^+-Strahler ist, müssen wir bei dieser Messung den Magnetstrom umpolen. Die Meßwerte für den Untergrund stehen in Tabelle 11 auf Seite 12 und in Tabelle 12 auf Seite 12.

Genauso wie bei der Messung von ^{137}Cs variieren wir das Magnetfeld und notieren die Anzahl der detektierten Ereignisse. Die Hallspannung U_H wird um den Offset korrigiert. Da ^{22}Na ein β^+-Strahler ist und wir die Spannung negativ polen mußten (die Werte in der Tabelle sind die Absolutbeträge), muß der Offset in diesem Fall hinzuaddiert werden (nicht abgezogen). Die Größen U_H^k bis Δn_f werden genauso berechnet wie im Fall Caesium. Das Spektrum von ^{137}Cs und ^{22}Na ist in Abbildung 8 auf Seite 20 und Abbildung 9 auf Seite 21 dargestellt.

Transmission	Linie	U_H^k	E_{kin} [keV]	$B \cdot \rho$ [Gauß $\cdot$ cm]
1%	K	153.94	624.219	3381.36
	L	157.90	656.134	3500.17
2%	K	154.02	624.219	3381.36
	L	157.51	656.134	3500.17
4%	K	154.00	624.219	3381.36
	L	157.39	656.134	3500.17
Mittelwert, K-Linie		153.99		3381.36
Mittelwert, L-Linie		157.60		3500.17

Tabelle 8: Konversionslinien ^{137}Cs

Number of observations	= 3
Mean of independent variable	= 103.8633
Mean of dependent variable	= 2293.843
Standard dev. of ind. variable	= 89.96639
Standard dev. of dep. variable	= 1987.415
Correlation coefficient	= 0.9999517
Regression coefficient (SLOPE)	= 22.08957
Standard error of coefficient	= 0.2171618
t - value for coefficient	= 101.7194
Regression constant (INTERCEPT)	= -0.4526162
Standard error of constant	= 27.62616
t - value for constant	= -0.01638361

Tabelle 9: Ergebnis der linearen Regression, Eichung ^{137}Cs

Bρ berechnet sich gemäß der im letzten Abschnitt aufgestellten Formel $B \cdot \rho = s \cdot U_H^k$. Für den Fehler gilt $\Delta(B \cdot \rho) = \sqrt{(\Delta s)^2 (U_H^k)^2 + s^2 (\Delta U_h^k)^2}$.

Wie im Buch [Rie] beschrieben, führen wir dimensionslose Größen ein:

$$\eta = \frac{p}{mc^2} = \frac{B \cdot \rho}{1704 \text{ Gauß} \cdot cm}, \quad \Delta\eta = \frac{\Delta(B \cdot \rho)}{1704 \text{Gauß} \cdot cm}, \tag{23}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \eta^2}, \quad \Delta\epsilon = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \Delta\eta \tag{24}$$

Die Korrekturfunktion $F(Z, \epsilon)$ lesen wir im Falle ^{22}Na am Graphen in [Rie], Seite 107, ab. Für ^{204}Tl sind einige Werte im Praktikumsskript angegeben. Die anderen Werte, die wir brauchten, haben wir linear interpoliert. Den Fehler beim Ablesen und Interpolieren haben wir als $\Delta F = 0.2$ angenommen.

Nun berechnen wir die Größe

Transmission	FWHM	$\frac{\Delta p}{p}$
1	2.2	0.94
2	1.9	0.81
4	2.9	1.06

Tabelle 10: Auflösungsvermögen des Spektrometers

Messung Nr.	Zahl der Ereignisse n
1	48
2	49
3	46
4	36
5	35
6	42
7	31
8	35
9	38
Mittelwert	40
Fehler	6.48

Tabelle 11: Untergrund ^{22}Na

Messung Nr.	Zahl der Ereignisse n
1	17
2	16
3	12
4	11
5	16
6	16
Mittelwert	14.67
Fehler	2.50

Tabelle 12: Untergrund ^{204}Tl

$$\left(\frac{n_k}{F(Z,\epsilon)\cdot\eta\cdot\epsilon}\right)^{1/2} \tag{25}$$

und den Fehler

$$\Delta\left(\frac{n_k}{F(Z,\epsilon)\cdot\eta\cdot\epsilon}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n_k}{F(Z,\epsilon)\cdot\eta\cdot\epsilon}\right)^{1/2}\sqrt{\left(\frac{\Delta n_k}{n_k}\right)^2+\left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2+\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2+\left(\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right)^2}. \tag{26}$$

Die Werte aller ausgerechneter Größen befinden sich in Tabelle 15 auf Seite 15 (für ^{22}Na) und in Tabelle 16 auf Seite 15 (für ^{204}Tl).

Wenn man alle Meßpunkte im Kurie-Plot berücksichtigen möchte, sieht man, daß die ersten 4 bis 5 Meßpunkte in der Tabelle nicht auf einer Geraden liegen. Die Ursache hierfür ist, daß dem β-Zerfall andere Prozesse (Konversionselektronen und Auger-Elektronen) überlagert sind. In der durchzuführenden linearen Regression haben wir diese Punkte weggelassen. Außerdem ergaben sich negative Werte für n_k. Diese Werte haben wir zu 0 gesetzt und die Punkte bei der Regression nicht berücksichtigt. Für einige ϵ-Werte konnten wir die Korrekturfunktion $F(Z,\epsilon)$ nicht ablesen oder interpolieren. Diese Punkte fanden bei der Regression ebenfalls keine Berücksichtigung. Das Ergebnis der Regresson ist in Abbildung 10 auf Seite 22, Abbildung 11 auf Seite 23, sowie in Tabelle 13 auf der nächsten Seite, Tabelle 14 auf der nächsten Seite wiedergegeben.

Wir stellen die Gleichung der Geraden auf und bestimmen den Schnittpunkt mit der x-Achse (^{22}Na):

$$f(\epsilon) = -5.59\epsilon + 11.83, \quad f(\epsilon) = 0, \quad \epsilon = 2.12, \quad \Delta\epsilon = 0.012, \tag{27}$$

Dasselbe nochmal für ^{204}Tl:

Number of observations	= 14
Mean of independent variable	= 1.737143
Mean of dependent variable	= 2.114286
Standard dev. of ind. variable	= 0.2266624
Standard dev. of dep. variable	= 1.272379
Correlation coefficient	= -0.9964317
Regression coefficient (SLOPE)	= -5.593515
Standard error of coefficient	= 0.136774
t - value for coefficient	= -40.89603
Regression constant (INTERCEPT)	= 11.83102
Standard error of constant	= 0.2394668
t - value for constant	= 49.40569

Tabelle 13: Ergebnis der linearen Regression, ^{22}Na

Number of observations	= 10
Mean of independent variable	= 2.012
Mean of dependent variable	= 0.095
Standard dev. of ind. variable	= 0.2716943
Standard dev. of dep. variable	= 0.05948856
Correlation coefficient	= -0.9761845
Regression coefficient (SLOPE)	= -0.2137395
Standard error of coefficient	= 0.01679392
t - value for coefficient	= -12.7272
Regression constant (INTERCEPT)	= 0.525044
Standard error of constant	= 0.0340655
t - value for constant	= 15.41278

Tabelle 14: Ergebnis der linearen Regression, ^{204}Tl

$$f(\epsilon) = -0.21\epsilon + 0.53, \quad f(\epsilon) = 0, \quad \epsilon = 2.46, \quad \Delta\epsilon = 0.014 \tag{28}$$

Die Fehler erhalten wir nach der Formel $V(Y) = V(\hat{c}) + X^2 V(\hat{m}) + 2X \operatorname{cov}(\hat{m}, \hat{c})$ (siehe [Ba], Seite 103). Als Fehler der y-Werte haben wir den maximalen Wert von $\Delta\epsilon$ in der Tabelle genommen.

Die kinetische Energie der Elektronen errechnet sich aus diesem ϵ-Wert wie folgt ([Rie], Seite 104):

$$E_{\text{kin}} = (\epsilon - 1) \cdot mc^2, \quad \Delta E_{\text{kin}} = \Delta\epsilon \cdot mc^2 \tag{29}$$

Somit ergibt sich für die maximale kinetische Energie der Elektronen im β-Zerfall von ^{22}Na

$$E_{\text{kin}} = 572.32 \text{ keV}, \quad \Delta E_{\text{kin}} = 6.11 \text{ keV}, \tag{30}$$

und für ^{204}Tl entsprechend

$$E_{\text{kin}} = 746.06 \text{ keV}, \quad \Delta E_{\text{kin}} = 7.13 \text{ keV}. \tag{31}$$

5 Zusammenfassung

Der Literaturwert für die kinetische Energie ist $E_{\text{kin}} = 545.7$ keV für ^{22}Na, bzw. $E_{\text{kin}} = 763.7$ keV für ^{204}Tl. Beide Werte liegen außerhalb unserer Fehlergrenzen. Dies deutet darauf hin, daß wir falsche Annahmen über die Fehler beim Ablesen, die Meßgenauigkeit der Apparate etc. gemacht haben.

Die Messungen bei ^{204}Tl waren besonders problematisch, weil die Probe sehr schwach radioaktiv war, so daß wir bei einer Zählzeit von 200 s immer noch eine niedrige Zählrate erhielten. Die statistischen Schwankungen haben das Ergebnis der Messung stärker beeinflußt als es im Idealfall geschehen wäre.

Ein weiterer Punkt, der die Ergebnisse beeinflußt haben könnte, ist die Änderung des Drucks im Spektrometer. Dieser war über die Gesamtzeit der Messung nicht konstant, sondern änderte sich um einen Faktor 2. Dies kann aber nur zu geringen Fehlern geführt haben.

Uns fiel auf, daß die Zählapparatur zweimal eine Fehlfunktion hatte, nämlich, sie zählte mehrere tausend Teilchen auf einmal. Dieser Effekt läßt sich auch durch Streuung der Elektronen an den Wänden des Spektrometers o.ä. nur schwer erklären. Wir nehmen an, daß die Zählelektronik oder der Detektor nich 100% zuverlässig funktionieren.

Beim Ablesen der Hallspannung bei den Konversionslinien von Caesium könnte man einen Gauß-Fit machen. Bei der linearen Regression könnte man ferner die Punkte nach Fehlern gewichten statt einheitlich den Maximalfehler zu nehmen. Da der erwartete Gewinn an Genauigkeit zu gering erschien, ist dies unterblieben.

U_H	n	U_H^k	n_k	Δn_k	n_f	Δn_f	Bρ	Δ(Bρ)	η	ϵ	$\Delta\epsilon$	F(Z,ϵ)	$\sqrt{\frac{N}{F\eta\epsilon}}$	$\Delta(\ldots)$
10.10	39	16.02	0	9.00	0.00	0.00	353.80	4.16	0.21	1.02	0.001	0.00	0.00	0.000
20.10	59	26.02	19	10.05	0.73	0.39	574.70	6.09	0.34	1.06	0.002	0.47	2.09	0.554
30.00	54	35.92	14	9.80	0.39	0.27	793.38	8.13	0.47	1.10	0.003	0.57	1.15	0.404
40.20	69	46.12	29	10.54	0.63	0.23	1018.70	10.27	0.60	1.17	0.004	0.66	1.17	0.213
50.10	114	56.02	74	12.49	1.32	0.22	1237.38	12.38	0.73	1.24	0.006	0.68	1.47	0.126
60.00	186	65.92	146	15.10	2.21	0.23	1456.07	14.49	0.85	1.32	0.007	0.71	1.67	0.090
70.10	1192	76.02	1152	35.13	15.15	0.46	1679.18	16.66	0.99	1.40	0.008	0.73	3.87	0.083
80.10	1323	86.02	1283	36.95	14.92	0.43	1900.07	18.82	1.12	1.50	0.010	0.75	3.45	0.071
90.00	1303	95.92	1263	36.67	13.17	0.38	2118.76	20.95	1.24	1.60	0.011	0.76	2.96	0.061
100.20	1087	106.12	1047	33.60	9.87	0.32	2344.07	23.16	1.38	1.70	0.012	0.77	2.34	0.050
110.10	774	116.02	734	28.57	6.33	0.25	2562.76	25.30	1.50	1.81	0.014	0.77	1.74	0.042
120.00	340	125.92	300	19.54	2.38	0.16	2781.45	27.44	1.63	1.91	0.015	0.77	1.00	0.035
130.10	85	136.02	45	11.27	0.33	0.08	3004.55	29.63	1.76	2.03	0.016	0.78	0.34	0.043
140.10	44	146.02	4	9.27	0.03	0.06	3225.45	31.79	1.89	2.14	0.018	0.78	0.09	0.108
150.10	34	156.02	0	8.72	0.00	0.00	3446.34	33.96	2.02	2.26	0.019	0.78	0.00	0.000
160.20	36	166.12	0	8.83	0.00	0.00	3669.45	36.15	2.15	2.37	0.020	0.78	0.00	0.000
170.10	41	176.02	1	9.11	0.01	0.05	3888.13	38.29	2.28	2.49	0.022	0.79	0.04	0.162
180.10	42	186.02	2	9.17	0.01	0.05	4109.03	40.46	2.41	2.61	0.023	0.79	0.05	0.107
65.00	816	70.92	776	29.29	10.94	0.41	1566.52	15.57	0.92	1.36	0.008	0.72	3.49	0.084
75.10	1318	81.02	1278	36.88	15.77	0.46	1789.62	17.74	1.05	1.45	0.009	0.74	3.74	0.077
85.40	1395	91.32	1355	37.91	14.84	0.42	2017.15	19.96	1.18	1.55	0.010	0.75	3.28	0.066
95.20	1182	101.12	1142	34.99	11.29	0.35	2233.62	22.08	1.31	1.65	0.012	0.76	2.62	0.055
105.20	958	111.12	918	31.62	8.26	0.28	2454.52	24.24	1.44	1.75	0.013	0.77	2.06	0.046
115.10	593	121.02	553	25.20	4.57	0.21	2673.21	26.38	1.57	1.86	0.014	0.77	1.43	0.038
125.20	196	131.12	156	15.43	1.19	0.12	2896.31	28.56	1.70	1.97	0.016	0.77	0.68	0.035

Tabelle 15: Messung ^{22}Na

U_H	n	U_H^k	n_k	Δn_k	n_f	Δn_f	Bρ	Δ(Bρ)	η	ϵ	$\Delta\epsilon$	F(Z,ϵ)	$\sqrt{\frac{N}{F\eta\epsilon}}$	$\Delta(\ldots)$
10.10	16	4.18	1.33	4.72	0.32	1.13	92.41	2.45	0.05	1.00	0.000	182.12	0.18	0.317
20.00	10	14.08	0.00	4.03	0.00	0.00	311.09	3.81	0.18	1.02	0.001	133.26	0.00	0.000
30.00	15	24.08	0.33	4.61	0.01	0.19	531.99	5.70	0.31	1.05	0.002	97.43	0.02	0.191
40.00	9	34.08	0.00	3.91	0.00	0.00	752.89	7.74	0.44	1.09	0.003	63.97	0.00	0.000
50.10	16	44.18	1.33	4.72	0.03	0.11	975.99	9.86	0.57	1.15	0.004	50.47	0.03	0.054
60.00	7	54.08	0.00	3.64	0.00	0.00	1194.68	11.96	0.70	1.22	0.005	42.33	0.00	0.000
70.10	32	64.18	17.33	6.19	0.27	0.10	1417.78	14.12	0.83	1.30	0.007	36.62	0.08	0.014
80.00	82	74.08	67.33	9.40	0.91	0.13	1636.47	16.25	0.96	1.39	0.008	34.11	0.14	0.010
90.10	121	84.18	106.33	11.28	1.26	0.13	1859.57	18.42	1.09	1.48	0.009	29.78	0.16	0.009
100.20	122	94.28	107.33	11.33	1.14	0.12	2082.68	20.60	1.22	1.58	0.011	27.43	0.15	0.008
110.10	168	104.18	153.33	13.20	1.47	0.13	2301.37	22.74	1.35	1.68	0.012	25.71	0.16	0.007
120.20	181	114.28	166.33	13.68	1.46	0.12	2524.47	24.92	1.48	1.79	0.013	24.24	0.15	0.006
130.20	159	124.28	144.33	12.86	1.16	0.10	2745.37	27.09	1.61	1.90	0.015	22.97	0.13	0.006
140.10	115	134.18	100.33	11.01	0.75	0.08	2964.05	29.23	1.74	2.01	0.016	21.96	0.10	0.006
150.20	60	144.28	45.33	8.14	0.31	0.06	3187.16	31.42	1.87	2.12	0.017	21.05	0.06	0.005
160.10	24	154.18	9.33	5.50	0.06	0.04	3405.84	33.56	2.00	2.23	0.019	20.23	0.03	0.009
170.20	16	164.28	1.33	4.72	0.01	0.03	3628.95	35.75	2.13	2.35	0.020	20.07	0.01	0.015
180.20	22	174.28	7.33	5.32	0.04	0.03	3849.84	37.92	2.26	2.47	0.021	18.59	0.02	0.008
192.20	12	186.28	0.00	4.27	0.00	0.00	4114.92	40.52	2.41	2.61	0.023	17.65	0.00	0.000
115.10	155	109.18	140.33	12.70	1.29	0.12	2411.81	23.82	1.42	1.73	0.013	24.84	0.15	0.007
125.20	173	119.28	158.33	13.39	1.33	0.11	2634.92	26.00	1.55	1.84	0.014	23.55	0.14	0.006

Tabelle 16: Messung ^{204}Tl

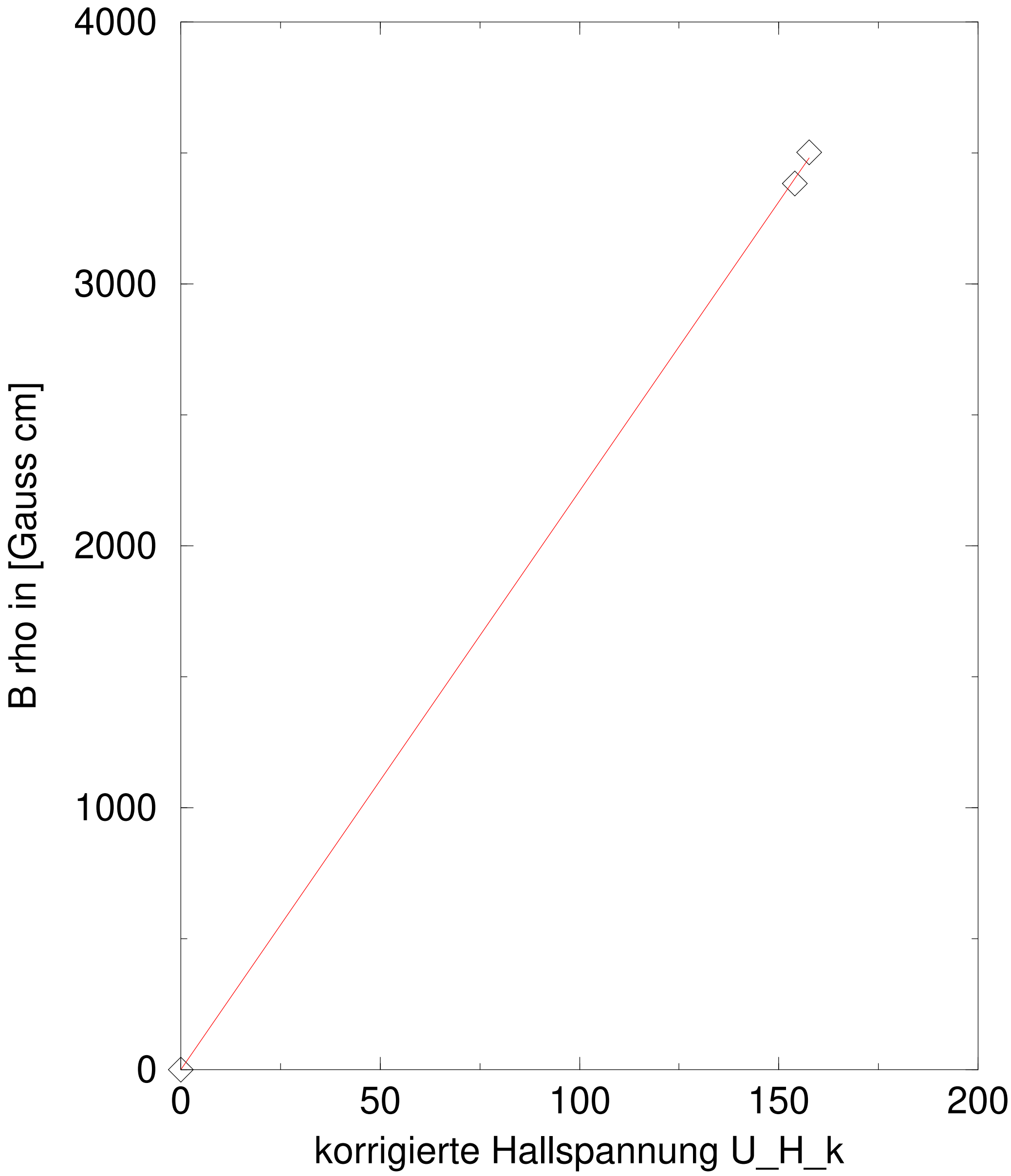

Abbildung 4: Linearer Zusammenhang zwischen U_H^k und Bρ

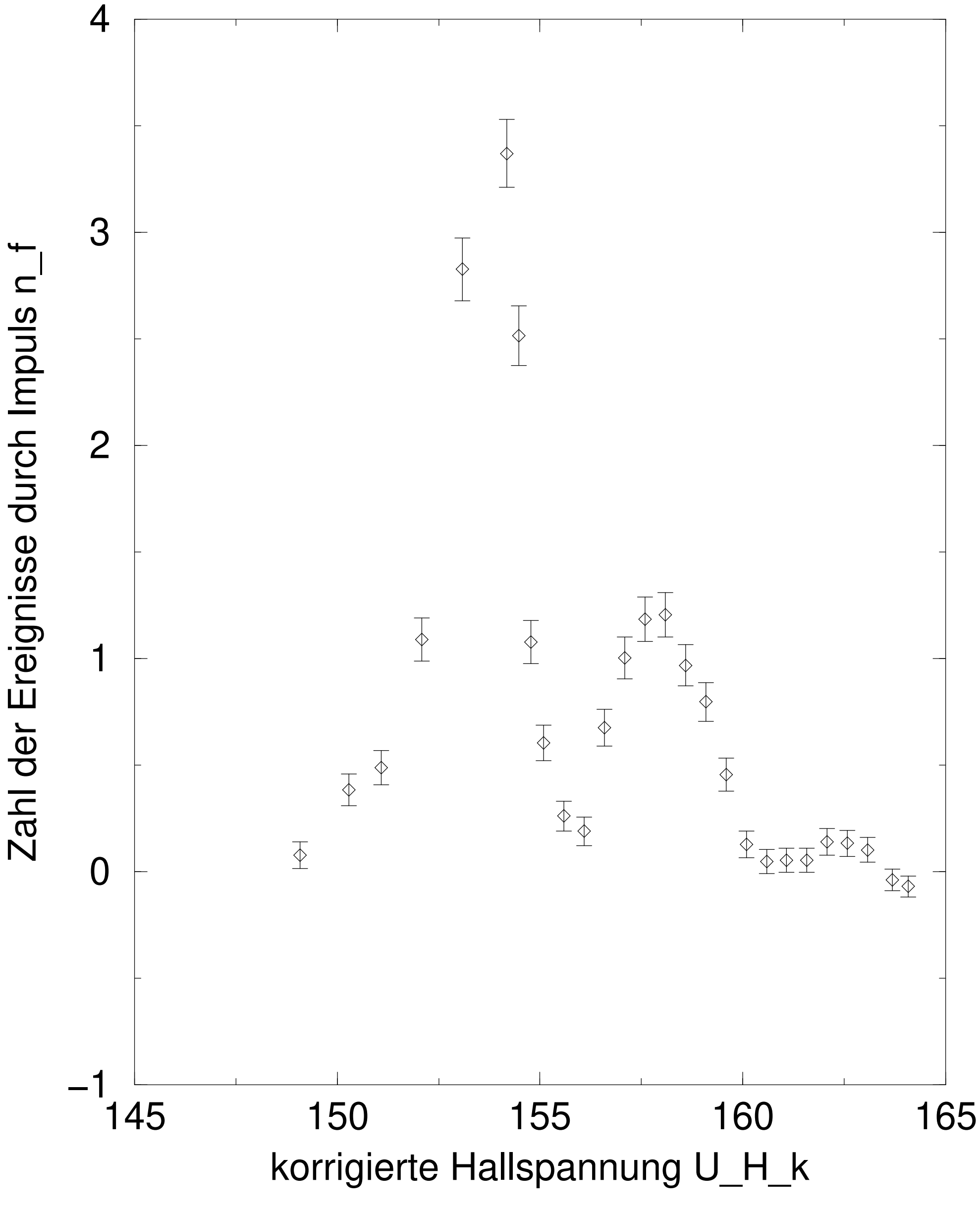

Abbildung 5: Spektrum von ^{137}Cs, 1% Transmission

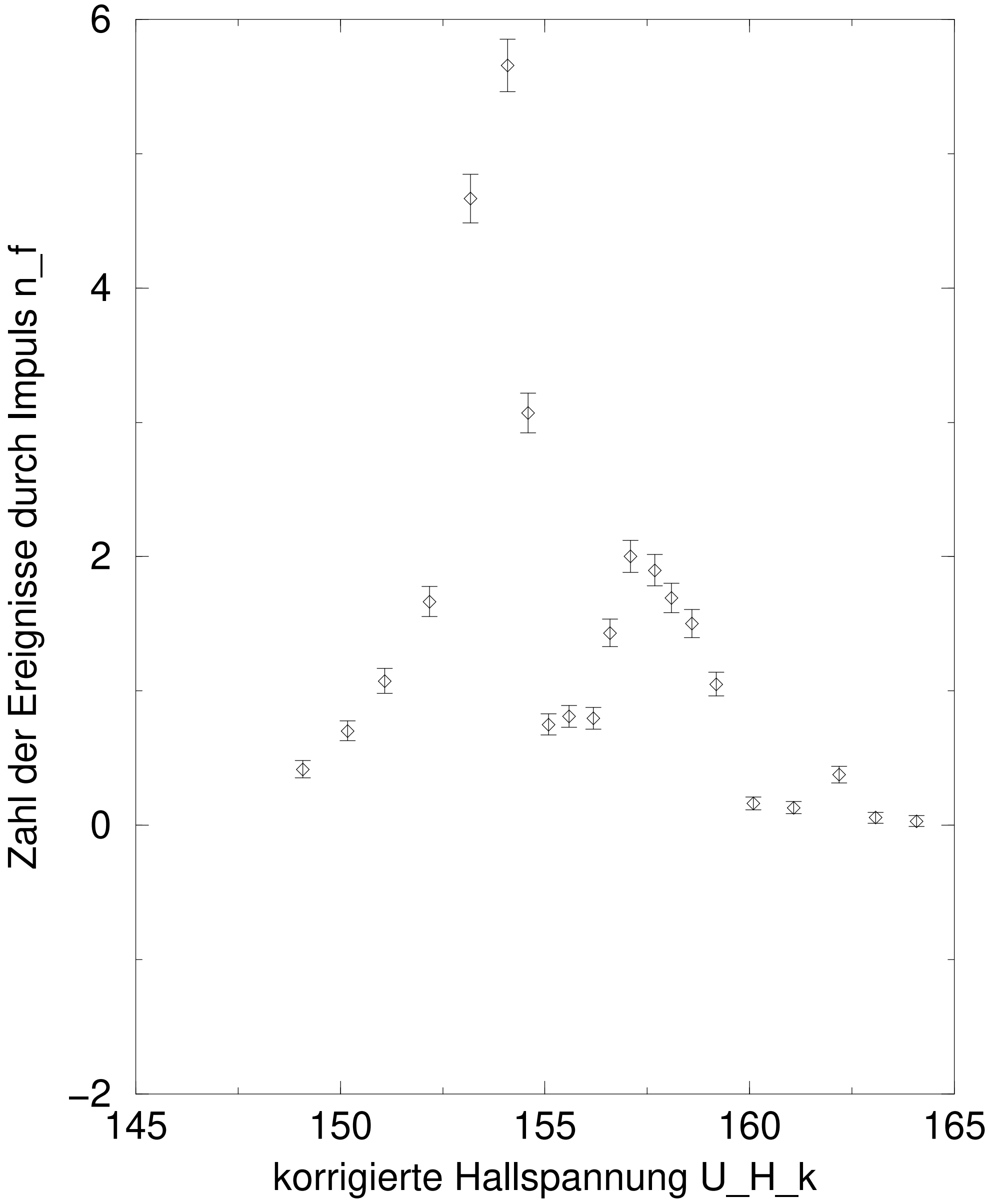

Abbildung 6: Spektrum von ^{137}Cs, 2% Transmission

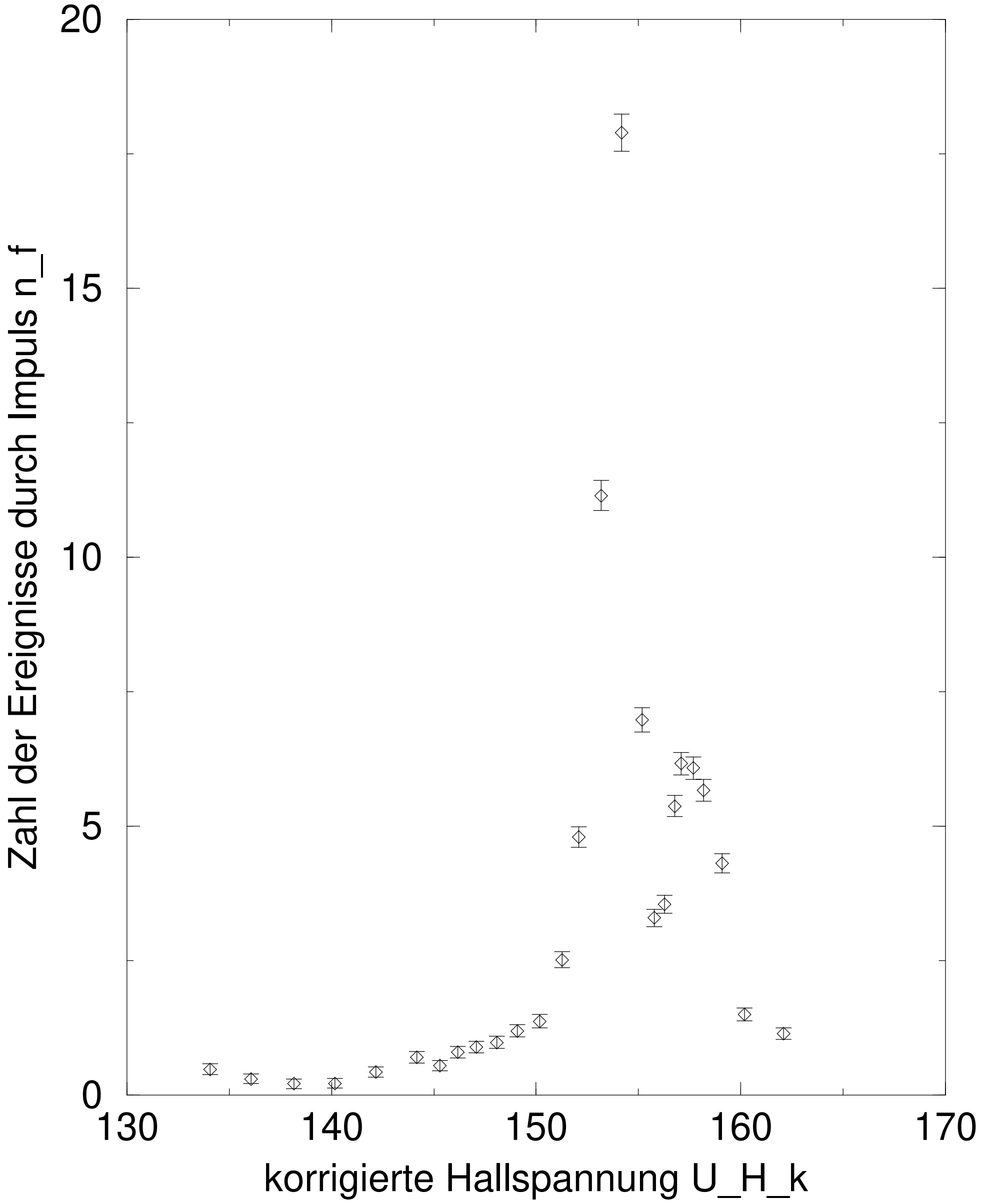

Abbildung 7: Spektrum von ^{137}Cs, 4% Transmission

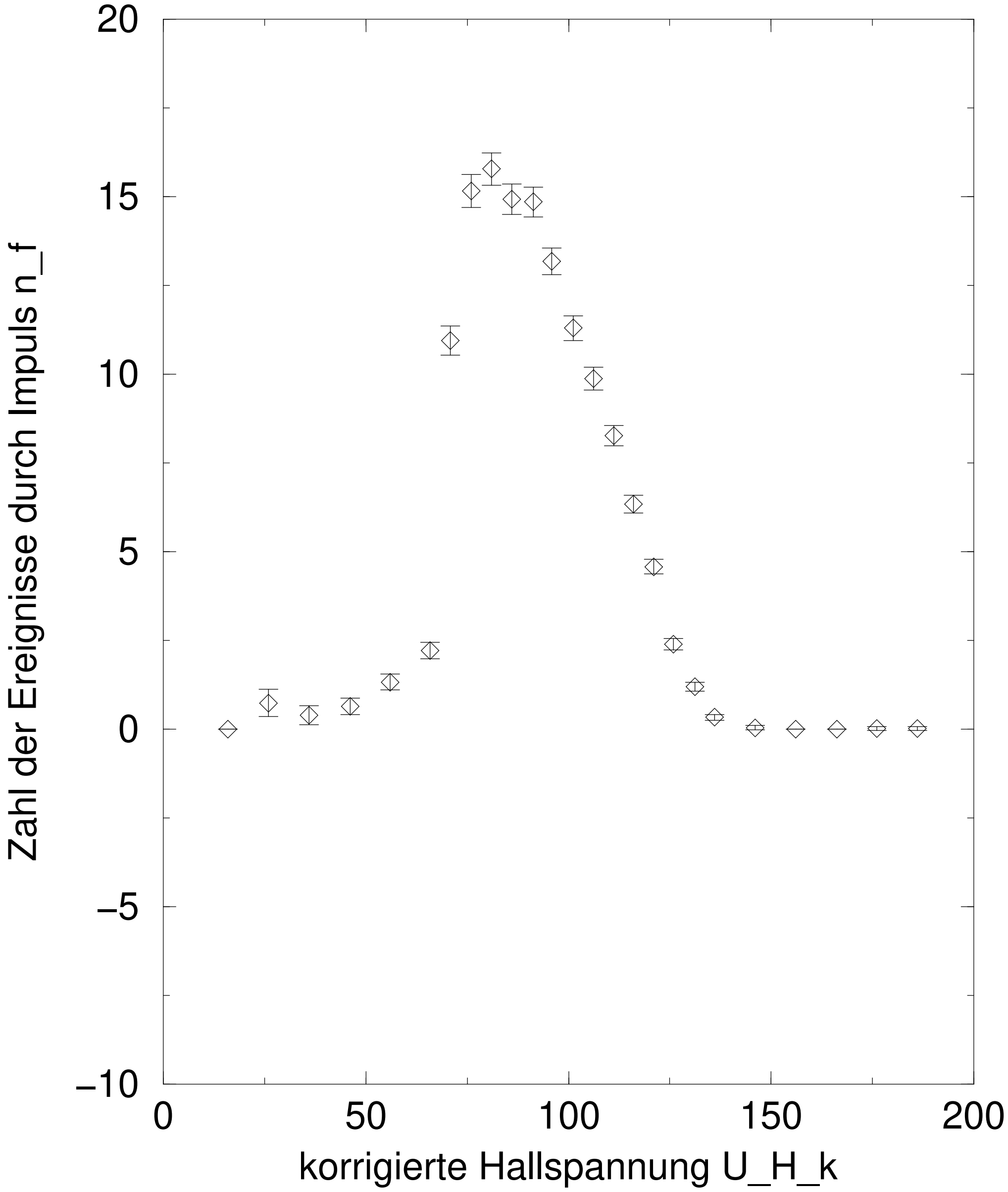

Abbildung 8: Spektrum von ^{22}Na

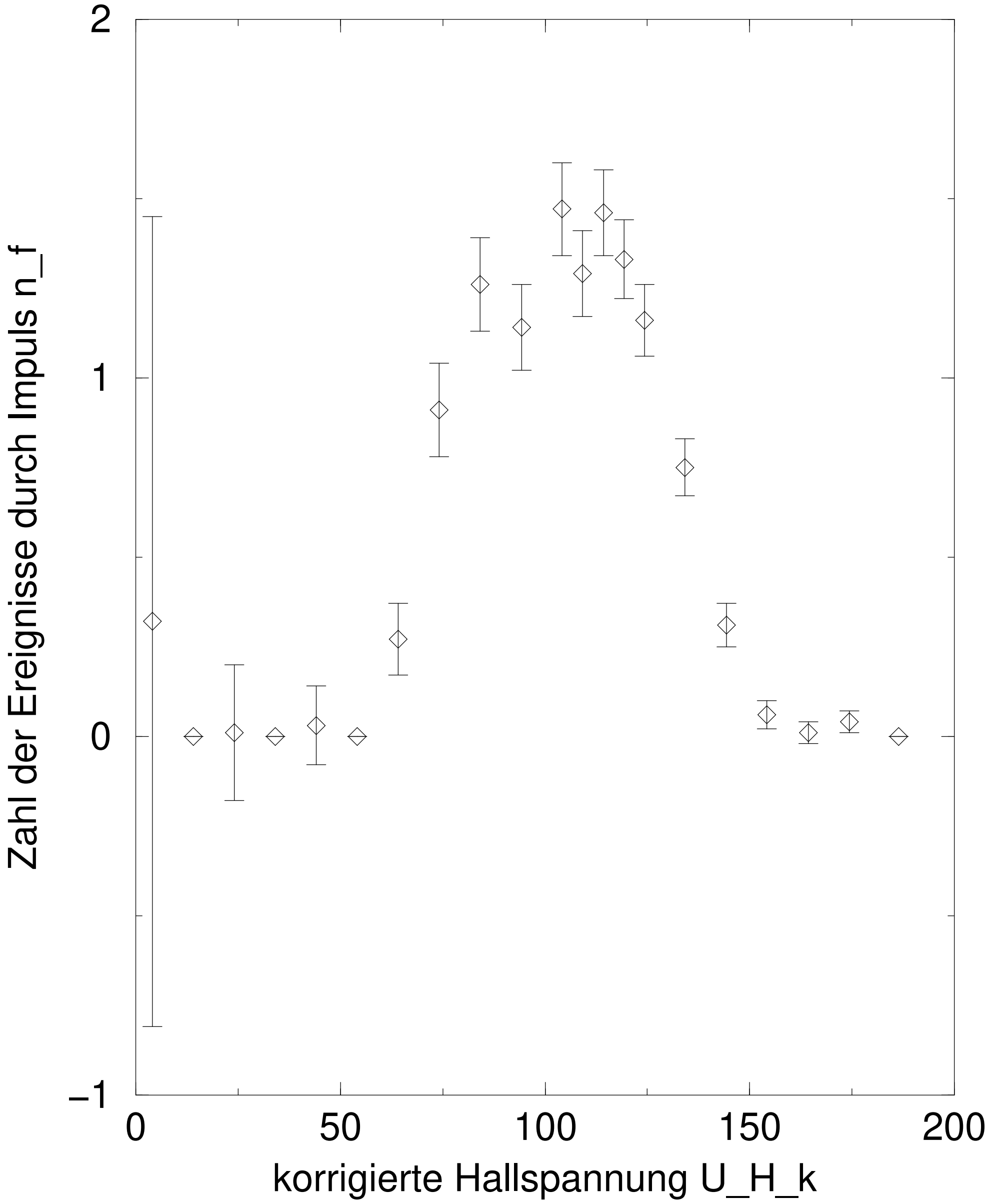

Abbildung 9: Spektrum von ^{204}Tl

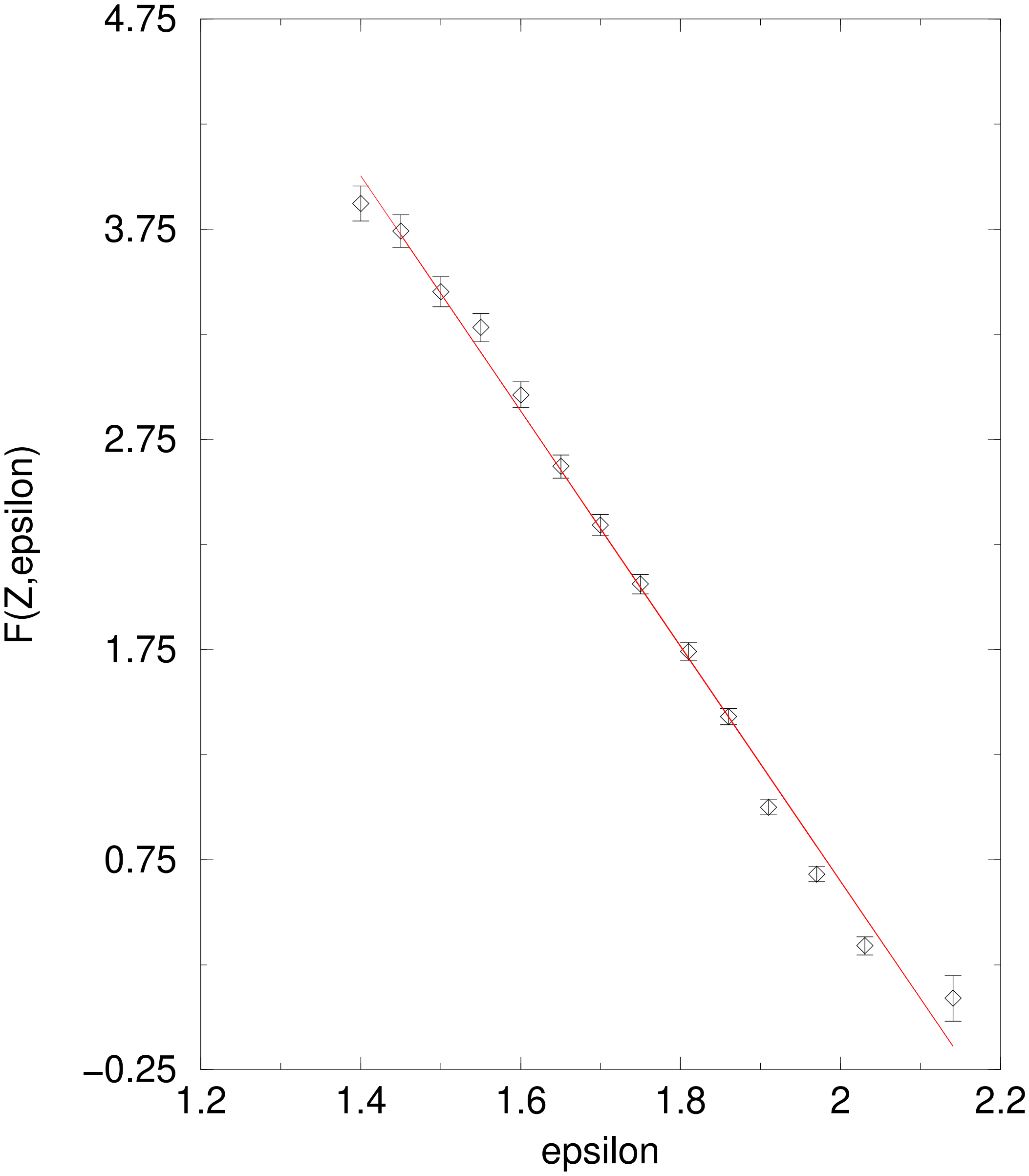

Abbildung 10: Kurie-Plot ^{22}Na

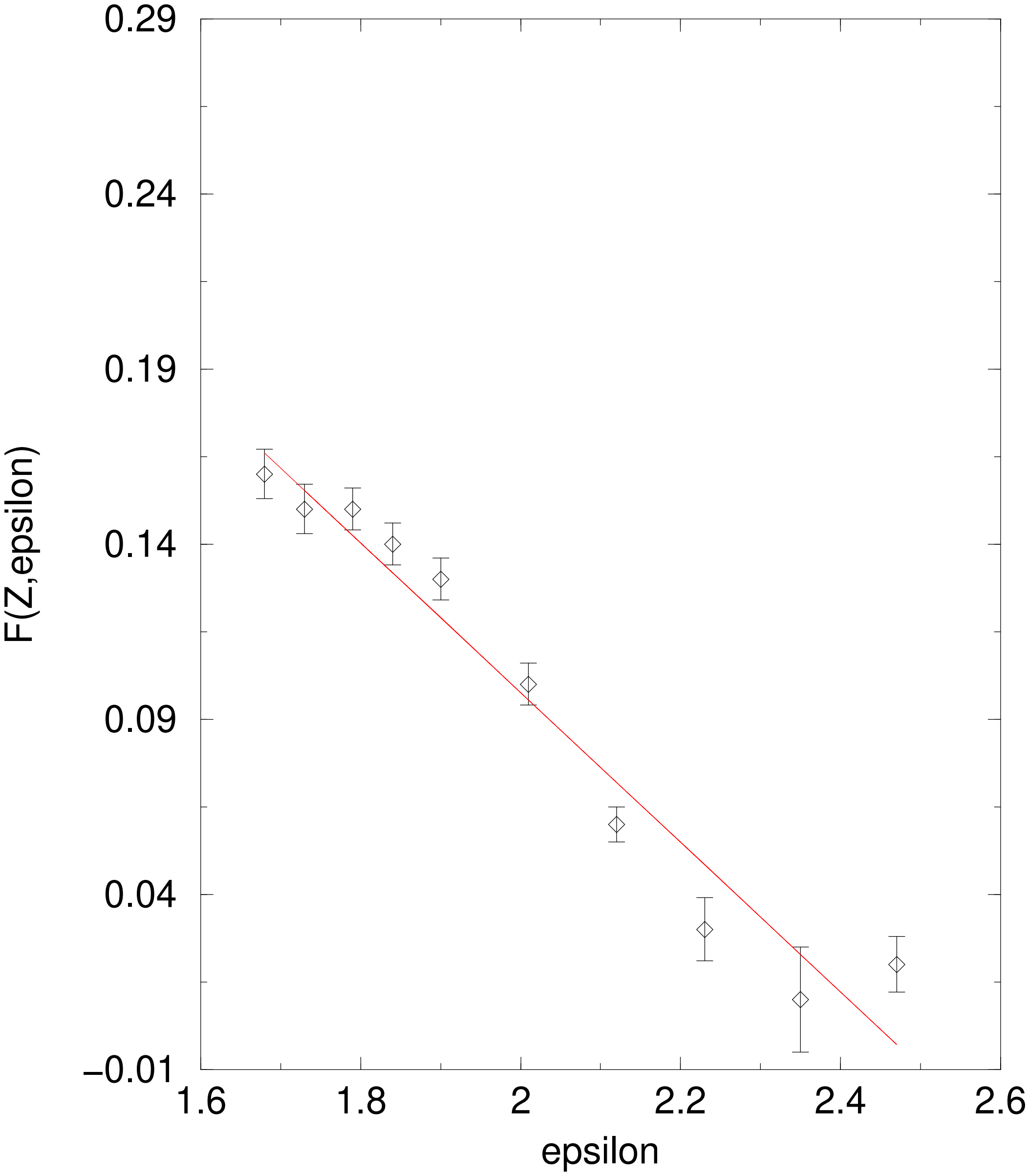

Abbildung 11: Kurie-Plot ^{204}Tl

Literatur

[Ba] R. J. Barlow *Statistics: A Guide to the Use if Statistical Methods in the Physical Sciences* Wiley, 1989

[Ma] T. Mayer Kuckuck *Kernphysik* Teubner, 1994

[Rie] Riezler, Kopitzki *Kernphysikalisches Praktikum* Teubner, 1963

[Ma] P. Marmier *Kernphysik I* Verlag der Fachvereine Zürich, 1977

[Sie] K. Siegbahn *Alpha-, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy, Volume I* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965