

Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste

Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach

<http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4>

–HAUSAUFGABEN–

Abgabe der Hausaufgaben: Di./Mi. 18./19.12.2018 (in den Übungen)

Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 08./09.01.2019 (in den Übungen)

H.10.1 Heizen eines Raumes¹

(10 Punkte)

Ein Raum mit einem Volumen V soll von $T_1 = 0^\circ\text{C}$ auf $T_2 = 20^\circ\text{C}$ erwärmt werden. Wir betrachten zunächst den isobaren Vorgang, d.h. indem während der Erwärmung Luftmoleküle entweichen, bleibt der Druck gleich dem Außendruck $P_0 \approx 1000\text{ hPa} = 1 \times 10^5\text{ N m}^{-2}$. Wir nehmen an, dass die Luft (hauptsächlich O_2 und N_2) als ideales Gas zweiatomiger Moleküle betrachtet werden kann. Wie man leicht zeigen kann, ist die isobare und isochore Wärmekapazität bei typischen Raumtemperaturen dann durch

$$C_P = \frac{7}{2}Nk_B, \quad \text{bzw.} \quad C_V = \frac{5}{2}Nk_B, \quad (1)$$

wobei N die Teilchenzahl ist, gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass die für die isobare Erwärmung von $T_1 = 0^\circ\text{C}$ auf $T_2 = 20^\circ\text{C}$ erforderliche Wärmemenge Q_P durch

$$Q_P = \frac{7}{2}N_1k_B T_1 \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \quad (2)$$

gegeben ist, wobei N_1 die Teilchenzahl im Anfangszustand ist.

(3 Punkte)

- b) Überprüfen Sie, dass für kleine Temperaturdifferenzen $\frac{T_2 - T_1}{T_1} \ll 1$ die Näherungsformel

$$Q_P = \frac{7}{2}N_1k_B(T_2 - T_1) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)^2\right) \quad (3)$$

gilt.

(1 Punkt)

- c) Das Volumen des Raumes sei $V = vV_0$, wobei $V_0 = 1\text{ m}^3$. Berechnen Sie die für die Erwärmung von $T_1 = 0^\circ\text{C}$ auf $T_2 = 20^\circ\text{C}$ benötigte Wärmemenge.

(1 Punkt)

¹A. Sommerfeld: *Vorlesungen über Theoretische Physik*, Bd. V: *Thermodynamik und Statistik*, (Harri Deutsch, Thun 1987)

- d) Betrachten Sie jetzt die Erwärmung eines hermetisch abgeschlossenen Raumes mit Volumen V , d.h. jetzt bleibt bei der Erwärmung die Teilchenzahl $N = N_1$ konstant. Berechnen Sie die benötigte Wärmemenge Q_N auch in diesem Fall.

(1 Punkt)

- e) Stellen Sie die Größe $\Delta Q(t) = \frac{Q_P - Q_N}{Q_0}$ mit $Q_0 = N_1 k_B T_1$ in Abhängigkeit von $t = \frac{T_2}{T_1}$ graphisch dar. Bestimmen Sie den Wert $t_0 > 1$ wo $\Delta Q(t_0) = 0$.

(2 Punkte)

- f) Auf welche Temperatur T_2 müsste man den Raum heizen, damit isobares Heizen sinnvoller wäre.

(0.5 Punkte)

- g) Wie viel Energie pro Kubikmeter spart man, falls man isoliert erwärmt?

(0.5 Punkte)

- h) Im Bereich $1 < t < t_0$ ist es also günstiger zuerst in einem abgeschlossenen Raum zu erwärmen und dann bei der Endtemperatur T_2 kurz den Druck auszugleichen. Wie groß ist im Übrigen die relative Druckerhöhung bei der Erwärmung in einem abgeschlossenen Raum?

(1 Punkt)

Beachten Sie, dass wir bei all unseren Rechnungen vernachlässigt haben, dass sich die Wände des Raumes mit aufheizen.

H.10.2 Gas aus zweiatomigen Molekülen

(9 Punkte)

Wir wollen in dieser Aufgabe ein nicht-wechselwirkendes Gas aus $N \gg 1$ gleichartigen, zweiatomigen Molekülen samt innerer Freiheitsgrade betrachten. Diese Freiheitsgrade sind durch Operatoren $H_{i,n}$ (n ist hier ein Teilchenindex) mit Energieeigenwerten $\varepsilon_{i,n}(\alpha_n)$ (abhängig von inneren Quantenzahlen α_n) im Hamilton-Operator H repräsentiert:

$$H = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\vec{p}_n^2}{2m} + H_{i,n} \right). \quad (4)$$

Die Impulse liefern hier, analog zu unserer bisherigen Betrachtung des idealen Gases, den Beitrag der Translationsbewegung der Molekülschwerpunkte (m ist die Molekülmasse). Behandelt man letztere klassisch², lautet die kanonische Zustandssumme

$$Z(T, V, N) = \frac{V^N}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \int d^3p_1 \dots d^3p_N e^{-\sum_{n=1}^N \frac{\vec{p}_n^2}{2mk_B T}} \prod_{n=1}^N \sum_{\alpha_n} e^{-\frac{\varepsilon_{i,n}(\alpha_n)}{k_B T}}, \quad (5)$$

wobei V das Gasvolumen und T die absolute Temperatur bezeichnet.

- a) Zeigen Sie zunächst die Beziehung

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} Z_i \right)^N \quad (6)$$

²Diese Näherung ist akzeptabel, wenn das Volumen pro Molekül V/N viel größer ist als die dritte Potenz der thermischen Wellenlänge $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2\pi mk_B T}$, das Gas in diesem Sinne also verdünnt ist.

mit $Z_i = \sum_{\alpha_n} \exp \left[-\frac{\varepsilon_{i,n}(\alpha_n)}{k_B T} \right]$ und einem beliebigen Teilchensex $n \in \{1, \dots, N\}$.
(1 Punkt)

b) Folgern Sie unter Nutzung der Stirlingschen Formel³ folgende Näherung der freien Energie:

$$F(T, V, N) \approx -Nk_B T \left[1 + \log \frac{V}{N\lambda^3} + \log Z_i \right]. \quad (7)$$

(2 Punkte)

c) Bestimmen Sie den Druck P und zeigen Sie, dass die Zustandsgleichung des idealen Gases

$$PV = Nk_B T \quad (8)$$

weiterhin gilt.
(1 Punkt)

d) Berechnen Sie die Entropie S und zeigen Sie anschließend für die innere Energie E

$$E = Nk_B T \left[\frac{3}{2} + T \frac{\partial \log Z_i}{\partial T} \right]. \quad (9)$$

Hinweis: Nutzen Sie die thermodynamische Relation $F = E - TS$.
(2 Punkte)

e) Nutzen Sie die Zwischenergebnisse, um die spezifischen Wärmen $C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N}$ und $C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,N}$ zu errechnen. Bestimmen Sie ferner den Adiabatenkoeffizient $\kappa = C_P/C_V$ dieses Gases.

Hinweis: Drücken Sie die Kapazitäten durch Ableitungen der inneren Energie E bzw. der Enthalpie $H = E + PV$ nach der Temperatur T aus.
(3 Punkte)

Das Ergebnis zeigt, dass die spezifischen Wärmekapazitäten im Vergleich zum Ergebnis des idealen Gases einen zusätzlichen Beitrag aus den inneren Freiheitsgraden erhalten. Wir werden hierauf zurückkommen und die Beiträge zu C_P bzw. C_V aus Molekülrotationen und relativen Schwingungen der Atome im Molekül explizit berechnen.

³Vgl. Aufgabe H.3.2: $N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$ für $N \gg 1$.