Theoretische Physik IV (Statistische Physik)

Vorlesung: PD Dr. Stefan Förste
Übungsleitung: M.Sc. Fabian Fischbach
http://www.th.physik.uni-bonn.de/people/fischbach/ws1819/tp4

–Hausaufgaben–

Abgabe der Hausaufgaben: Di./Mi. 22./23.01.2019 (in den Übungen)
Besprechung der Hausaufgaben: Di./Mi. 29./30.01.2019 (in den Übungen)

H.13.1 Schwankungsquadrate in der Quantenstatistik (4 Punkte)

Wir betrachten ein ideales Quantengas bei der Temperatur T. Die Teilchenzahl im Quantenzustand p werde mit n_p bezeichnet, die Energie in diesem Zustand mit ϵ_p. Berechnen Sie das Schwankungsquadrat $\langle n_p^2 \rangle - \langle n_p \rangle^2$ sowohl für die Bose-Einstein-Statistik (Bosonen) als auch für die Fermi-Dirac-Statistik (Fermionen).

H.13.2 Elektronengas am Nullpunkt (4 Punkte)

Wir betrachten ein ideales Quantengas aus N Elektronen in einem Volumen V am absoluten Temperatur-Nullpunkt.

a) Berechnen Sie die Fermienergie ϵ_F dieses Gases.

(*1 Punkt*)

b) Berechnen Sie die mittlere Energie E dieses Gases.

(*1 Punkt*)

c) Drücken Sie die mittlere Energie E als Funktion von ϵ_F und N aus.

(*1 Punkt*)

d) Warum ist die Energie pro Teilchen E/N hier keine aussagekräftige Größe?

(*1 Punkt*)

H.13.3 Entropie eines idealen Quantengases (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Entropie eines idealen Bose-(Fermi-)Gases dargestellt werden kann als

$$S = k_\mathrm{B} \sum_p \left[- \langle n_p \rangle \log \langle n_p \rangle \pm (1 \pm \langle n_p \rangle) \log(1 \pm \langle n_p \rangle) \right] \,, \tag{1}$$

wobei das obere Vorzeichen für den bosonischen und das untere für den fermionischen Fall gilt.

H.13.4 Weißer Zwerg (13 Punkte)

Als weißen Zwerg bezeichnet man einen Stern in einer der möglichen Endphasen der stellaren Evolution. In einem einfachen Modell besteht er aus einem nicht wechselwirkenden Elektronengas und einem Ionenhintergrund, der nur für die Ladungsneutralität und den Zusammenhalt des Sternes durch die Gravitation sorgt. Die Elektronendichte beträgt typischerweise $n = N/V = 10^{30}/\mathrm{cm}^3$ und die Masse $M = 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Wegen der hohen Dichte bewegt sich ein großer Teil der Elektronen relativistisch, es gilt also die Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon(p) = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2}$.

(a) Berechnen Sie den Fermi-Impuls $p_F(n)$ des Elektronengases in Abhängigkeit der Elektronendichte n. Schätzen Sie numerisch ab, oberhalb welcher Dichte $n_{\mathrm{rel.}}$ sich die Elektronen an der Fermi-Kante relativistisch[1] bewegen. *(3 Punkte)*

(b) Die Temperatur eines weißen Zwerges beträgt etwa 10^7 Kelvin. Berechnen Sie die Fermi-Energie ϵ_F des Elektronensystems für die oben angegebene Dichte n numerisch und zeigen Sie, dass $\epsilon_F \gg k_B T$ erfüllt ist. Deshalb wird in den folgenden Aufgabenteilen die Näherung $T = 0$ verwendet. *(1 Punkt)*

(c) Berechnen Sie die innere Energie[2] $U(R)$ in Abhängigkeit des Radius[3] R des weißen Zwerges, zuerst für den nichtrelativistischen ($p_F \ll mc$) und anschließend für den ultrarelativistischen Fall ($p_F \gg mc$). Verwenden Sie dabei die folgenden Energie-Impuls-Beziehungen:

$$\begin{aligned} &\text{nichtrelativistisch:} \quad && \epsilon(p) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \\ &\text{ultrarelativistisch:} \quad && \epsilon(p) = cp\ . \end{aligned}$$

(5 Punkte)

(d) Berechnen Sie hieraus den Druck[4] $P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_N$ des Elektronensystems für die beiden Fälle. Dieser Druck wird auch Pauli-Druck oder Entartungsdruck genannt. *(1 Punkt)*

(e) Betrachten Sie nun die Gesamtenergie $E(R) := U(R) + E_{\mathrm{Grav.}}(R)$ des Sterns, wobei $E_{\mathrm{Grav.}}(R) = -GM^2/R$ sei. Skizzieren Sie in einem Diagramm $E(R)$ für kleine und für große Sternradien (ultrarelativistisches bzw. nichtrelativistisches Regime).
Was ist die Bedingung an $E(R)$, dass ein Radius existiert, bei dem der Stern stabil ist (d. h. nicht kollabiert)? Zeigen Sie, dass der weiße Zwerg für Massen größer als eine kritische Masse M_c nicht stabil sein kann. Der Stern stürzt dann in sich zusammen. Bestimmen Sie diese Masse M_c. *(3 Punkte)*

<u>*Hinweis*</u>: Sie können mit folgenden Größen rechnen:

Plancksches Wirkungsquantum:	$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$
Boltzmann-Konstante:	$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Elektronenmasse:	$m = 9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3.00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

[1] Hierbei können Sie vereinfachend $p_F > mc$ ansetzen.
[2] Wir reservieren das Symbol E in dieser Aufgabe für die Gesamtenergie inklusiver der Gravitationsenergie.
[3] Wir gehen von einer Kugelgestalt des Sterns aus. Substituieren Sie den üblichen Volumenfaktor $V = \frac{4\pi}{3}R^3$.
[4] Beachten Sie, dass wir $F = U - TS$ mit $T = 0$ nutzen.